



二期课改新教材

上海市十余所名牌中学特级、高级教师联合推出

· 权威性 · 科学性 · 实用性

最新修订

数学同步追踪

高中一年级第一学期

(试用本)

主编/杨德胜 虞 涛
编者/朱伟卫 王 辉 万 军



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS



三期课改新教材

上海市十余所**名牌中学**特级、高级教师联合推出

· **权威性** · **科学性** · **实用性**

最新修订

数学同步追踪

高中一年级第一学期

(试用本)

主编/杨德胜 虞 涛
编者/朱伟卫 王 辉 万 军



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学同步追踪. 高中一年级第一学期:试用本/杨德胜 虞涛主编.

—上海:华东理工大学出版社,2004.7(2007.6重印)

(同步追踪丛书)

ISBN 978-7-5628-1565-5

I.数... II.杨... III.数学课—高中—教学参考资料

IV.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 060900 号

同步追踪丛书 二期课改新教材·最新修订·

数学同步追踪 高中一年级第一学期(试用本)

.....

主 编/杨德胜 虞 涛

编 者/朱伟卫 王 辉 万 军

责任编辑/刘 强

封面设计/渲彩轩

责任校对/李 晔

出版发行/华东理工大学出版社

地 址:上海市梅陇路 130 号,200237

电 话:(021)64250306(营销部)

传 真:(021)64252707

网 址:www.hdlgpress.com.cn

印 刷/江苏省通州市印刷总厂有限公司

开 本/787mm×1092mm 1/16

印 张/12.5

字 数/314 千字

版 次/2004 年 7 月第 1 版

印 次/2007 年 6 月第 3 次 2007 年 6 月最新修订

印 数/13101-18120 册

书 号/ISBN 978-7-5628-1565-5/O·110

定 价/17.00 元

(本书如有印装质量问题,请到出版社营销部调换。)

会委 内 容 提 要 卷 同》

最新修订的《数学同步追踪 高中一年级第一学期(试用本)》将“二期课改新教材”《高级中学课本 数学 高中一年级第一学期(试用本)》中的内容按章节顺序分 18 讲,每讲以问题为中心,以“问题思考”、“问题解析”、“问题精选”、“训练问题”为模式,激发学生的学习兴趣.各章后均新增“专题讨论”、“实践探究”、“研究性学习”、“人文选读”等内容,启迪学生的思维,培养学生的创新能力,追踪学生学习的全过程.本书是使用“二期课改新教材”的高中一年级师生首选的最新教学参考书.

《同步追踪丛书》编委会

主 编	杨德胜	虞 涛		
	(排名不分先后)			
编 委	王 辉	曹建华	万 军	田万国
	杨建华	张永华	朱伟卫	杨晓红
	贺亚丽	卜照泽	任升录	杨岚清
	吕志勇	曹喜平	蒲红军	曾国光
	翟立安			

修订前言

《同步追踪丛书》自2004年7月出版以来,得到广大师生的厚爱。两年时间里,多次重印,有不少专家、教师都提出了宝贵的意见,数百名同学(人次)发来电子邮件探讨问题。2006年“二期课改新教材”也作了修订,并于2006年9月在上海市高一年级全面推广使用。为此,我们进行了认真的研讨,现根据修订后的“二期课改新教材”对《同步追踪丛书》(第1版)作了如下修改:

1. 与修订后的“二期课改新教材”严格保持同步,更适合教师讲授新教材,更便于学生自学和检测学习效果。
2. 在“问题思考”和“问题解析”中,注重在紧扣新教材的基础上,深刻挖掘数学概念的内涵、定理的本质和公式的条件,阐述数学思想方法,分析知识学习中应注意的问题。
3. 在“问题精选”和“训练问题”中,删掉难、偏和超纲的例题与习题,做到精讲精练,切实减轻学生学习负担,使之更符合“二期课改”理念。

我们通过“二期课改”多年的教学研究也实践,力图使这套丛书最真实地体现新理念、反映新成果、透视新趋向。这套丛书被许多读者视为“来自‘二期课改’第一线的首选精品教辅”,这种高度认可与评价致使我们只能以加倍的努力和更大的投入作为回报。因此,我们认为此次修订后的丛书应当具有、也必须具有以下三个鲜明的特点:

◆权威性

来自上海市“二期课改”第一线的著名教育专家、新教材编写与修订人员、高考命题专家和十余所名牌中学的特级、高级教师参加了这套丛书的本次修订工作,使得这套丛书汇集了众多资深教育人士的最新研究成果,它不仅包括教材的最新变动、高考的最新态势、教学改革的最成果,而且对于教师处理新教材、学生学习新教材都给予了细致详细的建议和参考方案。对于他们在教育和培养下一代问题上的无私和毫无保留的奉献精神,我们表示感谢!

◆科学性

我们的这次修订不但汇总修改了原版丛书在内容知识性上的一些疏漏,还广泛征集了一些反映“二期课改”新理念、体现高考命题最新精神的例题和习题,请专家、资深教师字斟句酌地对其质量进行严格把关,并在教学中反复验证,致使这些选入的例题、习题都成为经典。对于他们在这次修订工作中的一丝不苟和孜孜不倦,我们表示感谢!

◆实用性

教师、学生对于“二期课改新教材”的内容体系和理念难免存在着困惑甚至冲突的情况,正如我们最早接触新教材时所碰到的那样,教师教得不顺手,学生接受也很困难。这套丛书正是我们多年从事新教材教学实践、从万千困惑中走出一条顺畅大道的见证,我们在其中疏

通了各章节的关系,理顺了教学的各个环节,把握了学生理解和掌握知识的关键点,并将崭新的参考方案呈现在你的面前,使之更加适合教师讲授新教材、学生学习新教材。希望我们的工作能为你少走弯路提供指引,企盼我们的努力同样也能得到你的认可!

愿我们这套《同步追踪丛书》:

给你打开一扇窗口,让你领略数学的博大精深;

开启你好奇的心灵,点燃你胸中的求知欲望;

激发你睿智的头脑,帮助你培养理性的思维;

给你实践的良机,增添你感受成功的喜悦;

给你数学的精神食粮,陶冶你美好的文化素养;

给你一双数学家的眼睛,丰富你观察世界的方式;

给你一套探究的模式,成为你终身探索世界的本领。

作者

2007年6月

前 言 QIANYAN

2002年8月,上海市教育委员会颁布了《上海市中小学数学课程标准》。在充分总结一期课改的基础上,进一步吸收、借鉴了国内外课改经验,并在2004年秋季,上海市开始使用在《上海市中小学数学课程标准》指导下的新教材。《上海市中小学数学课程标准》指出高中阶段的培养目标是“具有良好的学习态度、学习习惯和学习方法;具有自学能力和最基本的实践能力;具有问题意识和创新能力……”,这与以前的提法是不同的。新课程的要求与多年来笔者倡导的以“问题是数学的心脏”为座右铭,在教学中逐步形成“以培养学生主体意识和主动参与为起点,以培养学生能力为主线,以解决问题为中心,以学会创造为目标,以素质+特长为模式”的教学风格是不谋而合的。

为此,我们以问题为中心,以《上海市中小学数学课程标准》为准绳,以“问题思考”、“问题解析”、“问题精选”、“训练问题”为模式,与新教材试验本各章节同步,编写了这套《同步追踪丛书》,供高中各年级使用。

该丛书由上海市十余所名牌中学特级、高级教师联合推出:上海交通大学附属中学特级教师杨德胜,建平中学高级教师虞涛任主编。七宝中学特级教师卜照泽,延安中学高级教师吕志勇,建平中学高级教师田万国、杨建华、张永华,晋元高级中学高级教师任升录,大同中学高级教师杨岚清,复旦大学附属中学奥数高级教练万军,松江二中高级教师朱伟卫,进才中学高级教师曹喜平,上海交通大学附属中学高级教师曹建华,三林中学高级教师蒲红军,建平世纪中学高级教师杨晓红,周浦高级中学特级教师王辉,上海师范大学附属中学特级教师贺亚丽,控江中学高级教师曾国光,尚德实验学校高级教师翟立安等参与了具体的编写。在编写过程中得到华东理工大学出版社的支持和指导,在此表示衷心的感谢。

欢迎使用本书的读者提出宝贵的意见,使本书更具有科学性、实用性、指导性。希望她能跟踪你的学习,成为你的良师益友。

(联系请发 E-mail: yangdesheng1957@sina.com)

作者

2004年12月

目 录 CONTENT

第1章 集合和命题	(1)
第1讲 集合及其表示法	(1)
第2讲 集合之间的关系	(6)
第3讲 集合的运算	(10)
第4讲 命题的形式及等价关系	(15)
第5讲 充分条件,必要条件	(18)
第6讲 子集与推出关系	(22)
专题讨论 解读集合的元素	(26)
实践探究 集合的实际应用	(30)
研究性学习 以集合为背景的知识学习	(34)
人文选读 希尔伯特的旅馆	(38)
第2章 不等式	(39)
第7讲 不等式的基本性质	(39)
第8讲 一元二次不等式的解法	(44)
第9讲 其他不等式的解法	(50)
第10讲 基本不等式及其应用	(57)
*第11讲 不等式的证明	(62)
实践探究 不等式在实际问题中的应用	(68)
研究性学习 以不等式为主体的反思学习	(74)
人文选读 留心生活 感受数学	(80)
第3章 函数的基本性质	(81)
第12讲 函数的概念	(81)
第13讲 函数关系的建立	(86)
第14讲 函数的运算	(93)
第15讲 函数的基本性质	(98)
专题讨论 二次函数	(106)
实践探究 现实生活中的函数最优化问题	(114)
研究性学习 以函数基本性质为依托的潜能开发	(120)
人文选读 伽利略的实验	(126)

第 4 章 幂函数、指数函数和对数函数(上)	(128)
第 16 讲 幂函数	(128)
第 17 讲 指数函数	(134)
* 第 18 讲 借助计算器观察函数递增的快慢	(140)
专题讨论 函数的图像	(146)
实践探究 幂函数、指数函数的实际应用	(153)
研究性学习 含参数的不等式恒成立问题	(160)
人文选读 人体与函数	(167)
参考答案	(168)
(169)	
(171)	
(173)	
(175)	
(177)	
(179)	
(181)	
(183)	
(185)	
(187)	
(189)	
(191)	
(193)	
(195)	
(197)	
(199)	
(201)	
(203)	
(205)	
(207)	
(209)	
(211)	
(213)	
(215)	
(217)	
(219)	
(221)	
(223)	
(225)	
(227)	
(229)	
(231)	
(233)	
(235)	
(237)	
(239)	
(241)	
(243)	
(245)	
(247)	
(249)	
(251)	
(253)	
(255)	
(257)	
(259)	
(261)	
(263)	
(265)	
(267)	
(269)	
(271)	
(273)	
(275)	
(277)	
(279)	
(281)	
(283)	
(285)	
(287)	
(289)	
(291)	
(293)	
(295)	
(297)	
(299)	
(301)	
(303)	
(305)	
(307)	
(309)	
(311)	
(313)	
(315)	
(317)	
(319)	
(321)	
(323)	
(325)	
(327)	
(329)	
(331)	
(333)	
(335)	
(337)	
(339)	
(341)	
(343)	
(345)	
(347)	
(349)	
(351)	
(353)	
(355)	
(357)	
(359)	
(361)	
(363)	
(365)	
(367)	
(369)	
(371)	
(373)	
(375)	
(377)	
(379)	
(381)	
(383)	
(385)	
(387)	
(389)	
(391)	
(393)	
(395)	
(397)	
(399)	
(401)	
(403)	
(405)	
(407)	
(409)	
(411)	
(413)	
(415)	
(417)	
(419)	
(421)	
(423)	
(425)	
(427)	
(429)	
(431)	
(433)	
(435)	
(437)	
(439)	
(441)	
(443)	
(445)	
(447)	
(449)	
(451)	
(453)	
(455)	
(457)	
(459)	
(461)	
(463)	
(465)	
(467)	
(469)	
(471)	
(473)	
(475)	
(477)	
(479)	
(481)	
(483)	
(485)	
(487)	
(489)	
(491)	
(493)	
(495)	
(497)	
(499)	
(501)	
(503)	
(505)	
(507)	
(509)	
(511)	
(513)	
(515)	
(517)	
(519)	
(521)	
(523)	
(525)	
(527)	
(529)	
(531)	
(533)	
(535)	
(537)	
(539)	
(541)	
(543)	
(545)	
(547)	
(549)	
(551)	
(553)	
(555)	
(557)	
(559)	
(561)	
(563)	
(565)	
(567)	
(569)	
(571)	
(573)	
(575)	
(577)	
(579)	
(581)	
(583)	
(585)	
(587)	
(589)	
(591)	
(593)	
(595)	
(597)	
(599)	
(601)	
(603)	
(605)	
(607)	
(609)	
(611)	
(613)	
(615)	
(617)	
(619)	
(621)	
(623)	
(625)	
(627)	
(629)	
(631)	
(633)	
(635)	
(637)	
(639)	
(641)	
(643)	
(645)	
(647)	
(649)	
(651)	
(653)	
(655)	
(657)	
(659)	
(661)	
(663)	
(665)	
(667)	
(669)	
(671)	
(673)	
(675)	
(677)	
(679)	
(681)	
(683)	
(685)	
(687)	
(689)	
(691)	
(693)	
(695)	
(697)	
(699)	
(701)	
(703)	
(705)	
(707)	
(709)	
(711)	
(713)	
(715)	
(717)	
(719)	
(721)	
(723)	
(725)	
(727)	
(729)	
(731)	
(733)	
(735)	
(737)	
(739)	
(741)	
(743)	
(745)	
(747)	
(749)	
(751)	
(753)	
(755)	
(757)	
(759)	
(761)	
(763)	
(765)	
(767)	
(769)	
(771)	
(773)	
(775)	
(777)	
(779)	
(781)	
(783)	
(785)	
(787)	
(789)	
(791)	
(793)	
(795)	
(797)	
(799)	
(801)	
(803)	
(805)	
(807)	
(809)	
(811)	
(813)	
(815)	
(817)	
(819)	
(821)	
(823)	
(825)	
(827)	
(829)	
(831)	
(833)	
(835)	
(837)	
(839)	
(841)	
(843)	
(845)	
(847)	
(849)	
(851)	
(853)	
(855)	
(857)	
(859)	
(861)	
(863)	
(865)	
(867)	
(869)	
(871)	
(873)	
(875)	
(877)	
(879)	
(881)	
(883)	
(885)	
(887)	
(889)	
(891)	
(893)	
(895)	
(897)	
(899)	
(901)	
(903)	
(905)	
(907)	
(909)	
(911)	
(913)	
(915)	
(917)	
(919)	
(921)	
(923)	
(925)	
(927)	
(929)	
(931)	
(933)	
(935)	
(937)	
(939)	
(941)	
(943)	
(945)	
(947)	
(949)	
(951)	
(953)	
(955)	
(957)	
(959)	
(961)	
(963)	
(965)	
(967)	
(969)	
(971)	
(973)	
(975)	
(977)	
(979)	
(981)	
(983)	
(985)	
(987)	
(989)	
(991)	
(993)	
(995)	
(997)	
(999)	

第1章

集合和命题

第1讲 集合及其表示法

○ 问题思考

1. 什么叫做集合？什么叫做集合的元素？怎样表示一个对象与集合之间的关系？
2. 集合有哪些本质属性？
3. 怎样对集合进行分类？什么叫做空集？空集属于哪一类集合？
4. 集合的表示方法有哪些？正确表示一个集合要注意什么？

○ 问题解析

1. 把能够确切指定的一些对象看作一个整体，这个整体就叫做**集合**，简称**集**，通常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示；集合中的各个对象叫做这个集合的**元素**，通常用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示。

如果 a 是集合 A 的元素，就记作 $a \in A$ ，读作“ a 属于 A ”；如果 a 不是集合 A 的元素，就记作 $a \notin A$ ，读作“ a 不属于 A ”。

2. 集合的本质属性体现在其元素的**确定性**、**互异性**和**无序性**。即：

对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的。也就是说，任何一个对象要么是给定集合的元素，要么不是这个集合的元素，二者必居其一。

对于一个给定的集合，集合中的元素是各不相同的。也就是说，一个给定的集合中的任何两个元素都是不同的对象，集合中的元素不重复出现。

对于一个给定的集合，集合中的元素是没有先后顺序的。也就是说，集合中的元素地位是平等的，没有先后顺序的。我们可以根据需要对它们进行任何一种排列。

3. 按集合中元素的多少可将集合分为有限集和无限集。含有有限个元素的集合叫做**有限集**，含有无限个元素的集合叫做**无限集**。

不含有任何元素的集合叫做**空集**，记作 $\emptyset$ 。空集是有限集。

另外，从集合元素的属性来看，集合有数集（元素为数）、点集（元素为点）、……等常见的类型。常用的数集有自然数集 $\mathbf{N}$ ，正整数集 $\mathbf{N}^*$ ，整数集 $\mathbf{Z}$ ，有理数集 $\mathbf{Q}$ ，实数集 $\mathbf{R}$ 等。常见的数集还有方程的解集，不等式的解集等等。常见的点集如组成一条直线（抛物线）的点的集合、到定点的距离等于定长的点的集合等。

4. 集合常用列举法、描述法和图示法表示。

将集合中的元素一一列出来(在列举时不考虑元素的顺序),并且写在大括号内,这种表示集合的方法叫做**列举法**.

在括号内先写出这个集合的元素的一般形式,再划一条竖线,在竖线后面写上集合中元素所共同具有的特性,即 $A = \{x | x \text{ 满足的性质 } p\}$. 这种表示集合的方法叫做**描述法**.

用图形围成的区域来表示集合的方法叫做**图示法**.

正确表示一个集合要注意符号书写的规范性,如集合 $A = \{(x, y) | y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$ 与集合 $B = \{y | y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$ 是完全不同的两个集合. A 是点集,是由抛物线 $y = x^2 + 1$ 上所有的点组成的集合(也可以看成是所有点的坐标的集合),而 B 是数集,是由满足 $y = x^2 + 1$ 的所有 y 的值组成的集合,可得 $B = \{y | y \geq 1\}$. 另外特别要注意合理选择表示方法. 如元素个数较少的有限集常用列举法表示;元素个数较多或规律性很强的有限集和无限集常用描述法表示;抽象集合常用图示法表示,初中用数轴表示不等式的解集也是集合的图示法. 集合的几种表示方法可以相互转化,即一个集合可以用多种方法表示.

○ 问题精选

精选问题 1

下列各组对象的全体,不能组成集合的是().

- A. 满足 $|x| < 3$ 的整数
- B. 方程 $x^2 + 1 = 0$ 的实数解
- C. 本校高一年级身高在 1.80m 以上的同学
- D. 很接近 0 的数

【思路剖析】根据集合的本质属性去判断.

【问题解答】 A 中对象有 $-2, -1, 0, 1, 2$. 它们是一组确定的数,能组成集合. B 中方程没有实数解,因此实数解的全体是不含任何元素的集合,为 $\emptyset$. C 中身高在 1.80m 以上的同学是确定的,本校高一年级的任何一个同学的身高必在 1.80m 以上或以下,二者必居其一. 因此这些同学能组成集合. D 中很接近 0 的数没有统一的标准,不能组成集合,故应选 D .

【问题反思】元素的确定性是判断一组对象的全体能否组成集合的决定性条件. 出现“较快”、“很小”、“很高”……等不确定的条件时,一组对象就不能组成集合. 要注意“空集”与“不能组成集合”的区别.

精选问题 2

用符号“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”填空:

(1) 设集合 $M = \{x | x \leq \sqrt{19}\}$, $m = 3\sqrt{2}$, 则 m M ;

(2) 0 $\{y | y = -x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$;

(3) $(1, 1)$ $\{(x, y) | |x| = 1 \text{ 且 } |y| = 1\}$;

(4) $(0, 1)$ $\{y | y = x^2 + 1, x \in \mathbf{Z}\}$.

【思路剖析】判断一个对象是否属于已知集合,主要是判断该对象是否具有该集合元素的特性.

【问题解答】(1) $m = 3\sqrt{2} = \sqrt{18} \leq \sqrt{19}$, $\therefore m \in M$.

(2) 当 $x = \pm 1$ 时, $y = -x^2 + 1 = 0$. $\therefore 0 \in \{y | y = -x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$.

$$(3) |x|=1 \text{ 且 } |y|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1, \\ y=\pm 1. \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x=1, \\ y=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=1, \\ y=-1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-1, \\ y=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-1, \\ y=-1. \end{cases}$$

$$\therefore (1,1) \in \{(x,y) \mid |x|=1 \text{ 且 } |y|=1\}.$$

(4) 当 $x=0$ 时, $y=1$. 但 $\{y \mid y=x^2+1, x \in \mathbf{Z}\}$ 是由一些整数组成的集合, $(0,1)$ 表示一个点. 故 $(0,1) \notin \{y \mid y=x^2+1, x \in \mathbf{Z}\}$.

【问题反思】常见的数集和点集的元素的一般形式是 x 和 (x,y) . 应注意加以区别. 元素满足的性质要仔细分析, 判断一个对象是否具有这些性质有时需要综合应用所学的知识.

精选问题 3

用适当的方法表示下列集合:

(1) 被 3 除余 2 的全体整数组成的集合 A ;

(2) 使代数式 $\frac{\sqrt{2-x}}{x-1}$ 有意义的实数 x 组成的集合 B ;

(3) 坐标平面上横轴上所有点组成的集合 C ;

(4) 小于 10 的所有质数(素数)组成的集合 D ;

(5) 使 $\frac{6}{x-1} \in \mathbf{Z}$ 的整数 x 组成的集合 E .

【思路剖析】先要熟练掌握列举法和描述法, 图示法一般作为辅助方法. 有限集且元素个数较少时, 多用列举法; 其余集合常用描述法.

【问题解答】(1) 用描述法: $A = \{x \mid x = 3k + 2, k \in \mathbf{Z}\}$.

(2) 用描述法: $B = \{x \mid x \leq 2 \text{ 且 } x \neq 1\}$.

(3) 用描述法: $C = \{(x,y) \mid y=0, x \in \mathbf{R}\}$.

(4) 用列举法: $D = \{2, 3, 5, 7\}$.

(5) 用列举法: $E = \{-5, -2, -1, 0, 2, 3, 4, 7\}$. 用描述法: $\{x \mid x \in \mathbf{Z}, \frac{6}{x-1} \in \mathbf{Z}\}$.

【问题反思】列举法要注意不重不漏地全部列出集合中的各个元素, 描述法要注意选好元素的一般形式.

精选问题 4

已知集合 $A = \{x \mid x = a + \sqrt{2}b, a, b \in \mathbf{Z}\}$. 若 $x_1, x_2 \in A$. 试证明: $x_1 x_2 \in A$.

【思路剖析】根据 A 中元素的本质属性去判断.

【问题解答】设 $x_1 = a_1 + \sqrt{2}b_1, x_2 = a_2 + \sqrt{2}b_2, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{Z}$. 则:

$$x_1 x_2 = (a_1 + \sqrt{2}b_1)(a_2 + \sqrt{2}b_2) = (a_1 a_2 + 2b_1 b_2) + \sqrt{2}(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

由 $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{Z}$ 知, $a_1 a_2 + 2b_1 b_2 \in \mathbf{Z}, a_1 b_2 + a_2 b_1 \in \mathbf{Z}$.

$$\therefore x_1 x_2 \in A.$$

【问题反思】本题实际说的是集合 A 关于乘法是封闭的. 同学们可以去判断一下, $\frac{x_1}{x_2}$ ($x_2 \neq 0$) 是否属于 A , 即集合 A 关于除法是否封闭.

○ 训练问题

一、填空题

1. 用列举法表示集合 $\{x | x < 5, \text{且 } x \in \mathbf{N}^*\} =$ _____.
 2. 用列举法表示集合 $\{(x, y) | x + y = 5, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\} =$ _____.
 3. 用描述法表示集合: 被 3 除余 1 的自然数的全体 _____.
- 用适当的方法表示下列集合(4~6 题):
4. 所有能够整除 12 的自然数组成的集合: _____.
 5. 所有小于 2 的实数组成的集合: _____.
 6. 所有小于 10 的正偶数: _____.
 7. 集合 $A = \{y | (x-1)y^2 + 2y + 1 = 0\}$ 中只含有一个元素(这时称 A 为单元素集), 则实数 $x =$ _____.
 8. 已知集合 $A = \{x | 2x^2 + x + m = 0\}$, $B = \{x | 2x^2 + nx + 2 = 0\}$. 若 $\frac{1}{2} \in A$ 且 $\frac{1}{2} \in B$. 则 m , n 的值分别是 _____.

二、选择题

9. 下列集合中, 不是空集的是().
 - A. 满足 $x > 2$ 且 $x < 0$ 的实数 x 组成的集合
 - B. 方程 $x^2 + 1 = 0$ 的实根组成的集合
 - C. 绝对值小于 0 的实数组成的集合
 - D. $\{\emptyset\}$
10. 下列集合中, 无限集是().
 - A. $\{x | x \leq 100, x \in \mathbf{N}\}$
 - B. $\{x | 0 < x < 1, x \in \mathbf{Q}\}$
 - C. $\{x | 0 < x < 10, x \in \mathbf{Z}\}$
 - D. $\{x | 0 < x < 1, x \in \mathbf{N}\}$
11. 集合 $A = \{x | x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{x | x = 4k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$. 又 $a \in A, b \in B$, 则必有().
 - A. $a + b \in A$
 - B. $a + b \in B$
 - C. $a + b \in C$
 - D. $a + b \notin A, B, C$ 中任一个
12. 如果 $M = \{(1, 2), (1, 0)\}$, 则下列写法正确的是().
 - A. $1 \in M$
 - B. $\{1, 0\} \in M$
 - C. $(1, 0) \in M$
 - D. $2 \in M$

三、解答题

13. 求满足 $x \in \{1, 2, x^2\}$ 的所有实数 x 所构成的集合.

14. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b$, 集合 $A = \{x | f(x) = 2x\}$, 若 $A = \{2\}$, 求 a, b 的值以及 $f(x)$.

15. 已知集合 A 满足条件: 若 $a \in A, a \neq 1$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$.

- (1) 若 $2 \in A$, 则集合 A 中是否还有其他元素? 如果没有, 请说明理由; 如果有, 试求集合 A 中的所有元素.
- (2) 集合 A 能否为单元素集? 如果能, 请求出集合 A ; 如果不能, 请说明理由.

16. (1) 已知集合 $A = \{y | y = x^2 - 2, -1 < x < 3, x \in \mathbb{N}\}$. 试用列举法表示集合 A .
- (2) 已知集合 $B = \{y | y = x^2 - 2, -1 < x < 3, y \in \mathbb{N}\}$. 试用列举法表示集合 B .
- (3) 已知集合 $C = \{(x, y) | y = x^2 - 2, -1 < x < 3, x \in \mathbb{N}\}$. 试用列举法表示集合 C .

第2讲 集合之间的关系

○ 问题思考

1. 什么叫做子集?
2. 怎样定义两个集合相等?
3. 什么叫做真子集?
4. 空集与其他集合有怎样的关系?
5. 讨论两个集合之间的关系要注意些什么?

○ 问题解析

1. 对于两个集合 A 和 B , 如果集合 A 中的任何一个元素都属于集合 B , 那么集合 A 叫做集合 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$), 读作“ A 包含于 B ”或“ B 包含 A ”.

2. 对于两个集合 A 和 B , 如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 那么叫做集合 A 与集合 B 相等, 记作 $A = B$, 读作“集合 A 等于集合 B ”.

3. 对于两个集合 A 和 B , 如果 $A \subseteq B$, 并且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A , 那么集合 A 叫做集合 B 的真子集, 记作: $A \subsetneq B$ 或 $(B \supsetneq A)$, 读作“ A 真包含于 B ”或“ B 真包含 A ”.

4. 空集是任何集合的子集, 是任何非空集合的真子集.

5. 集合之间有包含、相等、真包含三种关系. 要判定 $A \subseteq B$, 只要判定 A 中的任一元素都是 B 中的元素, 要判定 $A = B$, 既要判定 A 的元素都是 B 的元素, 又要判定 B 的元素都是 A 的元素. 或者说, 如果两个集合中的元素完全相同, 那么这两个集合相等. 要判断 $A \subsetneq B$, 只要判定 A 的元素都是 B 的元素, 且 B 中至少有一个元素不是 A 的元素. 在讨论时不要忽视空集的情形.

○ 问题精选

精选问题 1

已知集合 $A = \{3, 3+m, 3+5m\}$, $B = \{3, 3n, 3n^2\}$, 且 $A = B$, 求 m, n 的值.

【思路剖析】利用集合的相等, 注意集合的元素的互异性.

【问题解答】由题意得 $\begin{cases} 3+m=3n, \\ 3+5m=3n^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 3+m=3n^2, \\ 3+5m=3n. \end{cases}$

解方程组, 得 $\begin{cases} m=0, \\ n=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=-\frac{27}{25}, \\ n=-\frac{4}{5} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=9, \\ n=4. \end{cases}$

当 $m=0, n=1$ 时 $3+m=3$ 不合题意, 故所求 m, n 的值为 $\begin{cases} m=-\frac{27}{25}, \\ n=-\frac{4}{5} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=9, \\ n=4. \end{cases}$

【问题反思】两个集合相等, 一是要注意元素的无序性, 二是要注意元素的互异性. 通常应检验所求值.

精选问题 2

已知集合 $M=\{x|x^2+x-6=0\}$, $B=\{x|ax+1=0\}$, 且 $B\subseteq M$, 求 a 的值.

【思路剖析】先求出集合 M . 集合 B 要讨论, 不少同学忽略 B 为空集的情形.

【问题解答】由题意, 得 $M=\{-3, 2\}$.

对于集合 B , 当 $a=0$ 时, $B=\emptyset$, 此时显然 $B\subseteq M$.

当 $a\neq 0$ 时, $B=\{-\frac{1}{a}\}$, 要 $B\subseteq M$, 则 $-\frac{1}{a}=-3$ 或 $-\frac{1}{a}=2$, 即 $a=\frac{1}{3}$ 或 $a=-\frac{1}{2}$.

综上所述, 所求 a 的值为 $a=0$ 或 $a=-\frac{1}{2}$ 或 $a=\frac{1}{3}$.

【问题反思】注意区别子集和真子集的定义, 空集是一切非空集合的真子集.

精选问题 3

设集合 $A=\{x|x^2-1=0, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x|x^2-2ax+b=0, x\in\mathbf{R}\}$, 若 $B\subseteq A$ 且 $B\neq\emptyset$, 求 a, b 的值.

【思路剖析】集合 B 由一元二次方程的根所组成, $B\neq\emptyset$ 说明此方程有实数根, 注意此方程的根的分布情况.

【问题解答】由题意, 得 $A=\{1, -1\}$.

$\because B\subseteq A$ 且 $B\neq\emptyset$,

$\therefore B$ 只可能是 $B=\{1\}$, $B=\{-1\}$, $B=\{1, -1\}$.

若 $B=\{1\}$, 即方程 $x^2-2ax+b=0$ 有等根 1, 故此时 $a=1, b=1$;

若 $B=\{-1\}$, 即方程 $x^2-2ax+b=0$ 有等根 -1 , 故此时 $a=-1, b=1$;

若 $B=\{1, -1\}$, 即方程 $x^2-2ax+b=0$ 有两根 $-1, 1$, 此时 $a=0, b=-1$.

综上所述, a, b 的值为

$$\begin{cases} a=1, \\ b=1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a=-1, \\ b=1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a=0, \\ b=-1. \end{cases}$$

【问题反思】讨论不重不漏. 刚开始学习集合, 应注意转化为自己熟悉的语言进行分析.

精选问题 4

设 $A\subseteq\{x|x<10, x\in\mathbf{N}^*\}$ 且满足“若 $a\in A$, 则 $6-a\in A$ ”, 求集合 A 的个数.

【思路剖析】若 $A=\emptyset$, 显然满足题设. 若 $A\neq\emptyset$, $\because a\in A, 6-a\in A$, 则 $1\leq a<10$ 且 $1\leq 6-a<10$, 故 $1\leq a\leq 5$.

【问题解答】由题意及思路剖析知 $1\leq a\leq 5, a\in\mathbf{N}^*$, 且 a 与 $6-a$ 同时在 A 中出现, 即 1 与 5、2 与 4 成对出现, 3 单独出现, 故集合 A 的个数为 $2^3=8$ 个.

【问题反思】注意 A 可以是空集, a 与 $6-a$ 成对出现. 同时提倡用列举法写出 A 的各种可能情形, 以便在实验的过程中发现问题, 培养由特殊到一般的数学思想方法. 此题 A 的