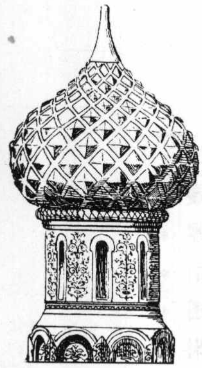
俄罗斯数学
教材选译

偏微分方程讲义

(第3版)

□ O. A. 奥列尼克 著
□ 郭思旭 译

高等教育出版社
Higher Education Press



俄罗斯数学
教材选译

● 数学天元基金资助项目

偏微分方程讲义

(第3版)

□ O. A. 奥列尼克 著
□ 郭思旭 译

高等教育出版社
Higher Education Press

图书在版编目 (CIP) 数据

偏微分方程讲义 (第 3 版) / (俄罗斯) 奥列尼克著; 郭思旭译. —北京: 高等教育出版社, 2008.1

ISBN 978-7-04-022521-1

I.偏... II.①奥...②郭... III.偏微分方程-高等学校-教材 IV. 0175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 199204 号

策划编辑 赵天夫 **责任编辑** 赵天夫 **封面设计** 王凌波 **责任印制** 尤 静

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京市南方印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2008 年 1 月第 1 版
印　　张	14.25	**印　　次**	2008 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	300 000	**定　　价**	32.00 元

物 料 号　22521-00

奥列尼克
О. А. Олейник
(1925—2001)

20世纪杰出的女数学家。1942年考取彼尔姆州国立大学数学物理系，1944年转入莫斯科大学数学力学系，并在此一直工作到生命结束。1952年获切鲍塔列夫奖，1954年获罗蒙诺索夫一等奖，1991年当选为俄罗斯科学院院士，并成为许多国家的外籍院士。早在大学时代就开始了自己的科学研究，到了研究生时期对希尔伯特第16个问题中关于代数几何问题进行了研究，所得到的许多结果至今被广泛引用。从20世纪50年代起在高阶微分方程、非线性偏微分方程、力学、物理学等方面做了一系列杰出工作。

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

第二版序

我们在本版中摘录了奥丽迦·阿尔先尼耶夫娜·奥列尼克写于 1976 年、当年由莫斯科大学出版社出版的本教科书第一册的序. 奥丽迦·阿尔先尼耶夫娜本来计划写作本教科书的第二册 —— 双曲型偏微分方程及边值问题理论. 然而, 由于一系列情况, 写作第二册的工作没能完成. 莫斯科大学力学数学系微分方程教研室的同事们在奥丽迦·阿尔先尼耶夫娜逝世后, 依据 O. A. 奥列尼克在莫斯科大学力学数学系多年来讲授必修课程偏微分方程论课程的讲义提纲, 承担了完成教科书的任务. A. Ю. 高里茨基, E. B. 拉德凯维奇, A. C. 沙玛耶夫参加了这项工作. 结果是 O. A. 奥列尼克所写的教科书, 补充了如下部分: 柯瓦列夫斯卡娅定理的证明, 非齐次弦振动方程的混合问题, 波动方程的柯西问题以及对称双曲组理论. 应当指出, 虽然这些内容不是奥丽迦·阿尔先尼耶夫娜亲自写的, 但是与她讲授过的偏微分方程基本课程讲义的内容是极为接近的.

本版的排版是由 A. C. 高洛得茨基, T. O. 卡布斯金娜 Г. A. 切契金用 TEX 排版系统完成的; A. B. 波洛夫斯基赫 B. A. 康德拉季耶夫与 O. C. 罗赞诺娃阅读了全文并提出了一系列有价值的意见.

微分方程教研室全体同仁深信本版将会在高校大学生的 "偏微分方程" 专业的教学过程中得到使用, 并且成为对奥丽迦·阿尔先尼耶夫娜·奥列尼克院士的最好的纪念 —— 她是杰出的数学学者、卓越的教师、细心的领导者, 一位坚毅、富有同情心、仁慈的人.

A. C. 沙玛耶夫

第一版序节录

本书的第一册是作者近年来在莫斯科大学力学数学系为三年级大学生讲授的课程的扩充. 在本课程中介绍偏微分方程理论的古典与现代基础性的部分. 书中收入了泛函分析、广义函数理论与函数空间理论方面的知识.

本书评论者: Ю. В. 叶果洛夫教授、Н. В. 叶菲莫夫教授, А. С. 卡拉什尼柯夫副教授.

"偏微分方程" 课程, 在莫斯科大学力学数学系是在第五和第六学期讲授, 与 "分析 III" 课程平行进行, 后一课程中讲授函数论与泛函分析基础, 这对于 "偏微分方程" 课程是必要的. "偏微分方程" 课程的特点与此相关, 本书《偏微分方程讲义》正是此课程的扩充. 教程分为两个部分.

第一部分主要叙述拉普拉斯方程、热传导方程、波动方程作为三种基本类型的偏微分方程的最简单的代表的基本事实. 勒贝格积分、函数空间与广义函数仅仅应用于某些个别定理, 这些定理在读者第一次阅读时可以略去. 例如, 外尔 (H. Weyl) 引理、拉普拉斯算子与热传导算子的亚椭圆性定理、有关基本解的定理就是这样的内容. 第一章 (绪论性的一章) 包含分析学和广义函数理论的一些知识, 它们在教程的第一册要用到.

作者感谢 Т. Д. 文特策尔、Г. А. 约希费扬和 А. С. 卡拉什尼柯夫, 他们通读了全稿并提出了有益的建议, 同样要感谢 И. Г. 尼洛娃对书稿所做的装帧工作.

目　录

第 1 章 辅助命题

1.1 符号. 分析中的一些命题

我们引入今后要用的一些符号. 其中大多数是通用的.

设 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 是实 n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}_x^n$ 中的点, 对这个空间中的两个点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $x^0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 考虑数量积

$$(x,x^0)=\sum_{j=1}^n x_jx_j^0$$

以及两点间的距离

$$|x-x^0|=\sqrt{\sum_{j=1}^n(x_j-x_j^0)^2}.$$

一般地, 对任意两个集合 A 与 B 有如下一些表示: $A\subset B$ 表示集合 A 包含在集合 B 中; $A\cap B$ 表示集合 A 与 B 之交, 即它们公共元素的集合; $A\backslash B$ 表示不含于集合 B 中的集合 A 的元素. 用 $\varnothing$ 表示空集. $a\in A$ 表示元素 a 属于集合 A.

如果点集 $A\subset\mathbb{R}_x^n$, 那么用 $\bar{A}$ 表示集合 A 的闭包, 即 A 的所有极限点的集合.

$\mathbb{R}_x^n$ 中的开连通集称为**区域**, 表示为 Ω. 如果对于所有的点 $x\in\Omega$ 成立条件 $|x|<M$, 其中 M 是某一常数, 那么称区域 Ω 是有界区域. 区域 Ω 的边界记为 $\partial\Omega$, 即 $\partial\Omega=\overline{\Omega}\backslash\Omega$. $\inf\limits_{x,y}|x-y|$ 称为空间 $\mathbb{R}_x^n$ 中两个集合 A 与 B 的距离, 其中 $x\in A$, $y\in B$.

应用花括号 $\{;\}$ 表示欧几里得空间中的集合 A 是方便的, 其中在分号 “;” 前写出该空间中属于 A 的点的坐标, 而在 “;” 之后指出确定该点是属于集合 A 的点的坐标的条件. 于是, 例如, $\{x;|x-x^0|<R\}$ 定义了中心在点 x^0、半径为 R 的球. 今后把

这样的球记为 $Q_R^{x^0}$. 而 $S_R^{x^0}=\{x;|x-x^0|=R\}$ 则表示中心在 x^0, 半径为 R 的球面.

我们用 $\mathbb{R}_{x,y}^{m+k}$ 表示 $m+k$ 维空间 $\{x,y;\ x\in\mathbb{R}_x^m, y\in\mathbb{R}_y^k\}$. 设 $A\subset\mathbb{R}_x^n, B\subset\mathbb{R}_y^k$. 那么 $A\times B=\{x,y;\ x\in A, y\in B\}$.

在第 4 章将考虑欧几里得空间 $\mathbb{R}_{x,t}^{n+1}=\{x,t;\ x\in\mathbb{R}_x^n, t\in\mathbb{R}_t^1\}$, 其中 "时间" 坐标 t 特意分出来.

若定义在集合 A 的点 x 处的函数 $f(x)$ 在集合 A 所有内点处有直到 $k\,(k\geqslant 1)$ 阶的连续偏导数, 且这些偏导数可连续延拓到 A 上, 则函数 $f(x)$ 属于 $C^k(A)$ **类** (简记为 $f\in C^k(A)$). 若函数 $f(x)$ 在集合 A 的所有点连续, 则 $f\in C^0(A)$. 且 $C^\infty(A)$ 表示对任意 $m\geqslant 1$ 属于 $C^m(A)$ 的函数类. 设 $A\in\mathbb{R}_{x,t}^{n+1}=(x_1,\cdots,x_n,t)$. 若函数 $f(x,t)$ 在 A 的所有内点处对 x 有直到 k 阶连续偏导数, 对 t 有直到 m 阶连续偏导数, 且这些偏导数可连续延拓到 A 上, 其中 $k\geqslant 1$, $m\geqslant 1$, 则说 $f(x,t)$ 属于 $C^{k,m}(A)$ 类.

现在引入定义在 Ω 上的函数 $f(x)$ 的支集的概念. 设 K 是 Ω 中这样一些点的集合, $f(x)$ 在 K 中每一个点的某个邻域中等于零. 那么集合 $\Omega\backslash K$ 称为函数 $f(x)$ 的**支集**, 并记为 $\operatorname{supp} f$. 用 $C_0^\infty(\Omega)$ 表示 Ω 中无穷次可微、具有紧支集的函数的类. 这样的函数称为**具有紧支集的函数或试验函数**. 若 Ω 是有界区域, 则 $C_0^\infty(\Omega)$ 类中的任何函数无穷次可微且在区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 的某个邻域中属于 Ω 的点处变为零. 若 $\Omega=\mathbb{R}_x^n$, 则 C_0^∞ 类中的函数 $f(x)$ 在某个有限区域外等于零, 并在任意点 x 处无穷次可微.

我们用 $L_p(\Omega)$, $p\geqslant 1$, 表示在 Ω 中定义的且满足

$$\int\limits_\Omega |u(x)|^p dx<\infty$$

的可测函数 $u(x)$ 的类. $L_p(\Omega)$ 中的函数 $u(x)$ 构成具有范数 $\|u\|_{L_p(\Omega)}=\left(\int\limits_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ 的巴拿赫空间 (参看 [1]). 若对于任意区域 Ω_1 有区域 $\overline{\Omega}_1\subset\Omega$, 对给定在 Ω 上的可测函数 $u(x)$ 有

$$\int\limits_{\Omega_1} |u(x)|dx<\infty,$$

则函数 $u(x)$ 称为**局部可和**的.

我们将说区域 Ω 属于 A^k **类**, $k\geqslant 1$, 若对于任意点 $x^0\in\partial\Omega$ 存在整数 $l, 1\leqslant l\leqslant n$, 及区域 $Q_\rho^{x^0}$, ρ 为常数, 使得 $\partial\Omega\cap Q_\rho^{x^0}$ 的点位于超曲面

$$x_l=f_l(x_1,\cdots,x_{l-1},x_{l+1},\cdots,x_n)$$

上, 同时 $f_l\in C^k(g_l)$, 其中 g_l 是函数 f_l 的自变量的变动区域.

今后我们同样考虑"分块光滑"的区域, 它可以用光滑区域来近似. 现在来给出准确的定义. 我们将说, 区域 Ω 属于 B^k 类, $k \geqslant 1$, 若存在如下区域 Ω_m 的序列: $\Omega_m \in A^k$, $\Omega_m \subset \Omega$, $\Omega_m \subset \Omega_{m+1}$, 且当 $m \to \infty$ 时

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_m} dx \to 0, \qquad \int\limits_{\partial\Omega_m\setminus\partial\Omega} dS \to 0,$$

其中 dS 是曲面 $\partial\Omega_m$ 的面积元素. 对于 $k \geqslant 1$ 的 A^k 类区域, 同样对 $k \geqslant 1$ 的 B^k 类区域, 高斯 – 奥斯特洛格拉茨基公式成立, 这个公式是在分析教程中证明过的, 我们把它叙述为下列形式. 设函数 $u_j(x)$, $j = 1, \cdots, n$, 属于 $C^1(\overline{\Omega})$ 类, $\Omega \in A^k$ 或 $\Omega \in B^k$, $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 则

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} dx = \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{n} u_j \nu_j dS, \tag{1.1}$$

其中 dS 是 $\partial\Omega$ 的面积元素. 由公式 (1.1) 可推出如下的**分部积分公式**, 这一公式常常在偏微分方程的理论中应用. 设 $u(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ 及 $v(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $\Omega \in B^k$. 那么

$$\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_l} dx = -\int\limits_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_l} dx + \int\limits_{\partial\Omega} uv\nu_l dS. \tag{1.2}$$

公式 (1.2) 可由高斯 – 奥斯特洛格拉茨基公式 (1.1) 中当 $j \neq l$ 以及 $u_l = uv$ 时令 $u_j = 0$ 得到.

我们将要应用有关在区域 Ω 中的连续函数族的相对紧性的阿尔泽拉定理. 用 $\mathcal{F}$ 表示给定在 Ω 中的函数 $f(x)$ 的族. 若对于所有 $x \in \Omega$ 及对于所有 $f \in \mathcal{F}$ 有

$$|f(x)| \leqslant M, \quad \text{其中 } M > 0 \text{ 是常数},$$

则称族 $\mathcal{F}$ 在 Ω 中一致有界. 若对于任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$, 使得对任意函数 $f \in \mathcal{F}$, 对所有满足 $|x - x^0| \leqslant \delta$ 的点 x, x^0 有

$$|f(x) - f(x^0)| \leqslant \varepsilon,$$

则称族 $\mathcal{F}$ 在 Ω 中等度连续.

定理 1 (阿尔泽拉) *如果给定在有界区域 Ω 中的函数族 $\mathcal{F}$ 是一致有界并且等度连续的, 那么由此族中可以选出在 Ω 中一致收敛的函数序列.*

此定理的证明可以在 [1] 中找到 (见 § 2.7). 若区域 Ω 中任意两点 x' 与 x'' 可用位于 Ω 内之折线联结, 此折线之长不超过 $N|x' - x''|$, 其中 $N > 0$ 为一常数, 则在函数 $f(x) \in \mathcal{F}$ 的一阶导数族在 Ω 中一致有界的条件下, 函数 $f(x)$ 的族 $\mathcal{F}$ 等度连续.

这可由下述得出: 对位于某属于 Ω 的线段上的任意两点 x' 与 x'', 按照拉格朗日公式有

$$f(x')-f(x'')=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(\theta)}{\partial x_j}(x'_j-x''_j),$$

其中 θ 是位于这线段上的点, 因此

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant M_1 n\left|x'_j-x''_j\right|,$$

其中 $M_1=\sup\limits_{k,\Omega}\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right|$.

现在证明在本教程中将要用到的一些不等式.

1.1.1 赫尔德 (Hölder) 不等式

设数 $p>1$. $p'=\dfrac{p}{p-1}$. 于是有

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1. \tag{1.3}$$

若 $s=t^{p-1}$, $t\geqslant 0$, 则 $t=s^{p'-1}$. 所以对平面 (t,s) 上的任意点 (t_1,s_1), $t_1\geqslant 0$, $s_1\geqslant 0$, 有

$$s_1t_1\leqslant\int_0^{t_1}t^{p-1}dt+\int_0^{s_1}s^{p'-1}ds,$$

或者 (参看图 1.1)

$$s_1t_1\leqslant\frac{t_1^p}{p}+\frac{s_1^{p'}}{p'}. \tag{1.4}$$

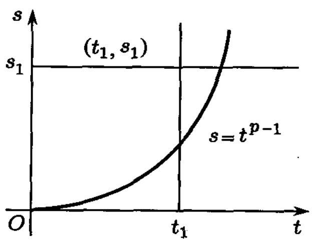


图 1.1

设 $t_1(x)$ 与 $s_1(x)$ 是 Ω 中这样的可测非负函数:

$$\int_\Omega |t_1(x)|^p dx=1,\quad \int_\Omega |s_1(x)|^{p'}dx=1. \tag{1.5}$$

那么, 对 Ω 积分不等式 (1.4) 并考虑到关系式 (1.3) 便得到

$$\int\limits_\Omega t_1(x)s_1(x)dx \leqslant 1. \tag{1.6}$$

其次, 若 $u(x) \in L_p(\Omega)$, $v(x) \in L_{p'}(\Omega)$, 则函数

$$t_1(x) = \frac{|u(x)|}{\left(\int\limits_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad s_1(x) = \frac{|v(x)|}{\left(\int\limits_\Omega |v(x)|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}}}$$

满足条件 (1.5), 所以不等式 (1.6) 成立. 因此

$$\int\limits_\Omega |u(x)||v(x)|dx \leqslant \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_\Omega |v(x)|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{1.7}$$

不等式 (1.7) 称为赫尔德不等式. 如果 $p=2$ 与 $p'=2$, 那么不等式 (1.7) 具有如下形式:

$$\int\limits_\Omega |u(x)||v(x)|dx \leqslant \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_\Omega |v(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.8}$$

不等式 (1.8) 称为**柯西 – 布尼亚科夫斯基不等式.**

1.1.2 弗里德里希斯 (Friedrichs) 不等式

设 $u(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ 且在 $\partial\Omega$ 上 $u(x) = 0$. 那么

$$\int\limits_\Omega |u|^2 dx \leqslant C \int\limits_\Omega \sum_{j=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 dx, \tag{1.9}$$

其中常数 C 仅与区域 Ω 的范围有关.

实际上, 设 $\Omega \subset \{x; |x| < R\}$, $R > 0$ 为一常数. 当 $x \in \mathbb{R}_x^n \setminus \Omega$, 令 $u = 0$, 就补充定义了 u 在 $\overline{\Omega}$ 外的值. 于是

$$u(x) = \int\limits_{-R}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1.$$

由此等式, 应用柯西 – 布尼亚科夫斯基不等式, 便得

$$|u(x)|^2 \leqslant \int\limits_{-R}^{x_1} \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 dx_1 \int\limits_{-R}^{x_1} dx_1 \leqslant 2R \int\limits_{-R}^{R} \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 dx_1,$$

$$\int\limits_\Omega |u(x)|^2 dx \leqslant 2R \int\limits_{\mathbb{R}_{x'}^{n-1}} \int\limits_{-R}^{R} \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 dx_1 dx' \leqslant 4R^2 \int\limits_\Omega \sum_{j=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 dx.$$

在以后还将证明, 弗里德里希斯不等式对更广的函数类成立.

1.1.3 非负函数的导数的估计

对任意的、给定在所有的 x 值上并属于 $C^2(\mathbb{R}_x^1)$ 的非负函数 $\varphi(x)$, 成立下述不等式:

$$\left|\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|^2 \leqslant 2\left\{\sup_{\mathbb{R}_x^1}\left|\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right|\right\}\varphi(x). \tag{1.10}$$

实际上, 假定不等式 (1.10) 在某点 x^0 不成立. 这意味着

$$\left|\frac{d\varphi(x^0)}{dx}\right|^2 > 2\left\{\sup_{\mathbb{R}_x^1}\left|\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right|\right\}\varphi(x^0), \quad \varphi(x^0)\neq 0. \tag{1.11}$$

考虑点 $x^1 = x^0 - 2\varphi(x^0)\left(\frac{d\varphi(x^0)}{dx}\right)^{-1}$. 那么根据泰勒公式

$$\varphi(x^1) = \varphi(x^0) - 2\varphi(x^0)\left(\frac{d\varphi(x^0)}{dx}\right)^{-1}\frac{d\varphi(x^0)}{dx} + 2|\varphi(x^0)|^2\left(\frac{d\varphi(x^0)}{dx}\right)^{-2}\frac{d^2\varphi(\theta)}{dx^2}$$

或

$$\varphi(x^1) = -\varphi(x^0)\left[1 - 2\varphi(x^0)\left(\frac{d\varphi(x^0)}{dx}\right)^{-2}\frac{d^2\varphi(\theta)}{dx^2}\right].$$

因为依照假设在点 x^0, 不等式 (1.11) 成立, 那么

$$1 - 2\varphi(x^0)\left(\frac{d\varphi(x^0)}{dx}\right)^{-2}\frac{d^2\varphi(\theta)}{dx^2} > 0,$$

因此 $\varphi(x^1) < 0$, 这与对所有 $x\in\mathbb{R}_x^1$ 有 $\varphi(x)\geqslant 0$ 的条件矛盾.

1.2 磨光函数. 广义导数

当 $x\in\mathbb{R}_x^n$ 及 $h\in\mathbb{R}_h^1$, $h>0$, 给定的函数 $w_h(x)$ 若满足下述条件, 则称为**磨光核**:

1. 对任意 $h>0$, $w_h(x)\in C^\infty(\mathbb{R}_x^n)$;
2. 当 $|x|>h$, $w_h(x)=0$;
3. 在 $\mathbb{R}_x^n$ 内 $w_h(x)\geqslant 0$;
4. 对任意 $h>0$, $\int\limits_{\mathbb{R}_x^n} w_h(x)dx = 1$.

函数

$$w_h(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{h^2}{|x|^2-h^2}}, & \text{当 } |x|<h, \\ 0, & \text{当 } |x|\geqslant h. \end{cases} \tag{1.12}$$