基于语言信息的决策理论与方法

●徐泽水　著

科学出版社
www.sciencep.com

基于语言信息的决策理论与方法

徐泽水 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

决策信息以语言变量或不确定语言变量形式给出的决策问题广泛存在于现实生活之中，如人事考核、军事系统效能评估、网上拍卖、供应链管理、风险投资、医疗诊断等. 在决策过程中，人们对诸如人的综合素质、武器装备的性能、工程项目、企业合作伙伴等决策对象进行评估时往往会直接给出定性的评估信息(如差、中、良、优等自然语言形式)，因此，基于语言信息的决策理论与方法不仅具有重要的学术价值，而且具有广阔的应用前景. 本书将主要介绍近年来作者在语言评估标度、语言信息的集成方式、语言判断矩阵排序理论与方法，以及语言群决策、多时段(或多阶段)语言决策和交互式语言决策理论与方法等方面的最新研究成果.

本书可作为运筹学、信息科学、管理科学和系统工程等领域的研究人员和工程技术人员的参考书，也可作为高等院校相关专业研究生和高年级本科生的教学用书.

图书在版编目（CIP）数据

基于语言信息的决策理论与方法 / 徐泽水著. —北京：科学出版社，2008

ISBN 978-7-03-021120-0

Ⅰ. 基… Ⅱ. 徐… Ⅲ. 决策学-研究 Ⅳ. C934

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 031072 号

责任编辑：陈玉琢 / 责任校对：朱光光

责任印制：赵德静 / 封面设计：王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 4 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2008 年 4 月第一次印刷 印张：12 3/4

印数：1—3 000 字数：240 000

定价：38.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

前　言

决策信息以语言变量或不确定语言变量形式给出的决策问题广泛存在于现实生活之中，如人事考核、军事系统效能评估、网上拍卖、供应链管理、风险投资、医疗诊断等. 在决策过程中，人们对诸如人的综合素质、武器装备的性能、工程项目、企业合作伙伴等决策对象进行评估时，往往会直接给出定性的评估信息(如差、中、良、优等自然语言形式)，因此，对该类问题的研究不仅具有重要的理论意义，而且具有广阔的应用背景，从而引起了人们的高度关注. 目前，基于语言信息的决策理论与方法主要有以下 4 类: ①基于扩展原理的近似计算模型: 该模型首先把语言信息转化成模糊数，再利用模糊数运算法则进行近似计算; ②基于次序的语言计算模型: 该模型主要利用 max 和 min 算子或 round 算子进行近似计算; ③基于语言术语与数值组成的二元模型: 该模型将语言信息转化为由语言评估标度与$[-0.5,0.5)$中的数值组成的二元组进行运算; ④直接利用语言信息进行运算与分析. 其中，类型①和②存在着丢失决策信息的缺点，从而最终导致决策结果缺乏精确性; 类型③不易丢失决策信息，但二元模型的叙述较为繁琐，不便计算，因而影响了其实用性; 而类型④不仅不易丢失决策信息而且计算便利，实用性较强.

近年来，作者对类型④及相关课题进行了深入系统的研究，主要体现在语言评估标度、语言信息的集成方式、语言判断矩阵排序理论与方法，以及语言群决策、多时段(或多阶段)语言决策和交互式语言决策理论与方法等方面. 本书将对上述研究成果作详细介绍.

本书共分为 4 章:

第 1 章介绍语言决策的基础——语言评估标度. 把语言评估标度分成两类: 加性语言评估标度和积性语言评估标度，并侧重介绍非均匀加性语言评估标度和非均匀积性语言评估标度.

第 2 章介绍语言信息的集成方式. 主要对现有的语言信息集成算子进行全面系统的综述.

第 3 章介绍语言判断矩阵、不确定语言判断矩阵、残缺语言判断矩阵、一致性语言判断矩阵、可接受语言判断矩阵等概念，以及它们的优良性质，并且详细介绍基于这些语言判断矩阵的一系列决策途径.

第 4 章介绍属性权重不能完全确知且属性值为语言术语或不确定语言变量的

多属性决策方法.

本书可作为运筹学、信息科学、管理科学和系统工程等领域的研究人员和工程技术人员的参考书，也可作为高等院校相关专业研究生和高年级本科生的教学用书.

本书得到了国家自然科学基金项目[编号: 70571087]的资助，在此特向国家自然科学基金委员会表示感谢.

徐泽水

2008 年 1 月于北京

一些常用符号

S_i	语言评估标度
$\bar{S}_i$	拓展语言评估标度
s_α, s_β	语言术语
$\tilde{s}_i$	不确定语言变量
$w, \omega, \zeta, \upsilon, \xi$	权重向量
x_i, e_k, G_k	方案，决策者，属性
$X, E, G, \Omega, \Theta, H, \tilde{S}_i$	集合
d, ρ	距离，相似度
$\left\langle u_i, s_{\alpha_i} \right\rangle, \left\langle u_i, \tilde{s}_{\alpha_i} \right\rangle$	二元数据
$\left\langle v_i, u_i, s_{\alpha_i} \right\rangle, \left\langle v_i, u_i, \tilde{s}_i \right\rangle$	三元数据
$A, A_k, B, B_k, \tilde{A}, \tilde{A}_k, \tilde{B}, \tilde{B}_k, R, \tilde{R}, R_k, \tilde{R}_k, P$	矩阵
$a_{ij}, a_{ij}^{(k)}, b_{ij}, b_{ij}^{(k)}, r_{ij}, \tilde{r}_{ij}, r_{ij}^{(k)}, \tilde{r}_{ij}^{(k)}, p_{ij}$	元素
c_j	贴近度
$\alpha_0, \tau_0, \eta_0, \beta_0$	阈值
$\varepsilon_j^+, \varepsilon_j^-$	上偏差变量，下偏差变量

目　　录

第 1 章　语言评估标度

由于客观事物的复杂性和不确定性、以及人类思维的模糊性, 人们 (决策者) 在对诸如学生的综合素质、汽车的性能等进行评估时, 一般喜欢直接用 “优” 、“良”、“中”、“差” 等语言形式给出 [1~20]. 考虑到决策者在对决策对象进行语言测度时, 一般事先需要适当的语言评估标度, 文献 [2,4~6,11,12] 定义了一种语言术语下标均为非负整数、且术语个数为奇数的语言评估标度, 并把它们转化为三角模糊数、梯形模糊数或语言术语与数值组成的二元模型进行计算. 文献 [18] 给出了一种语言术语下标以零为中心对称、且术语个数为奇数的语言评估标度, 并且直接利用语言变量进行运算与分析. 上述两种标度的语言术语下标基本上是均匀的, 形式较为单一, 已经不能满足决策理论的发展和实际应用的需要. 文献 [21,22] 研究了非均匀积性语言评估标度. 文献 [23] 则对非均匀加性语言评估标度进行了探讨. 本章将对这些标度进行介绍.

1.1　加性语言评估标度

语言评估标度是语言决策的基础. 决策者在进行定性测度时, 一般需要事先确定适当的语言评估标度. 文献 [2,4~6,11,12] 定义了一种语言术语下标均为非负整数的加性语言评估标度

$$\boldsymbol{S}_1 = \{s_\alpha | \alpha = 0,\ 1,\ \cdots,\ \tau\}, \tag{1.1}$$

其中 s_α 表示语言术语, 特别地, s_0 和 s_τ 分别表示决策者实际使用的语言术语的下限和上限, τ 为偶数, 且 $\boldsymbol{S}_1$ 满足下列条件:

1) 若 $\alpha > \beta$, 则 $s_\alpha > s_\beta$;

2) 存在负算子 $\operatorname{neg}(s_\alpha) = s_\beta$, 使得 $\alpha + \beta = \tau$.

例如, 当 $\tau = 6$ 时, $\boldsymbol{S}_1$ 可取 (见图 1.1)

$$\boldsymbol{S}_1 = \{s_0 = \text{极差}, s_1 = \text{很差}, s_2 = \text{差}, s_3 = \text{一般}, s_4 = \text{好}, s_5 = \text{很好}, s_6 = \text{极好}\}.$$

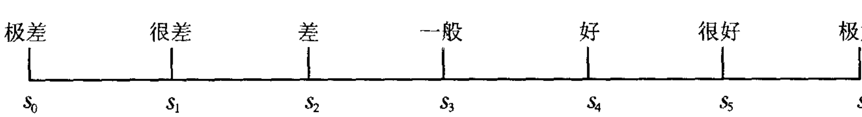

图 1.1　加性语言评估标度 $\boldsymbol{S}_1(\tau = 6)$

Bordogna 等 [2] 指出: $\boldsymbol{S}_1$ 中的语言术语个数不能太少; 否则, 得到的语言信息会很粗略, 从而影响决策方案之间的比较和排序; 但 $\boldsymbol{S}_1$ 中的语言术语个数也不能太多; 否则, 会给决策者在专业知识、时间等方面提出过高的要求, 从而增加了决策者的决策负担.

在决策信息集成过程中, 集成结果往往与加性语言评估标度 $\boldsymbol{S}_1$ 中的元素不相匹配. 为便于计算和避免丢失决策信息, 文献 [23] 在原有标度 $\boldsymbol{S}_1$ 的基础上定义一个拓展标度

$$\bar{\boldsymbol{S}}_1 = \{s_\alpha |\ \alpha \in [0, q]\}, \tag{1.2}$$

其中 $q(q > \tau)$ 是一个充分大的自然数, 且若 $s_\alpha \in \boldsymbol{S}_1$, 则称 s_α 为本原术语; 否则, 称 s_α 为拓展术语 (或称虚拟术语). 拓展后的标度仍满足上述条件 1) 和 2). 一般地, 决策者运用本原术语评估决策方案, 而拓展术语只在语言计算和决策方案排序过程中出现.

基于上述拓展加性语言评估标度, 下面给出相应的运算法则:

定义 1.1[23]　设 $s_\alpha, s_\beta \in \bar{\boldsymbol{S}}_1$, $\lambda \in [0, 1]$, 则

1) $s_\alpha \oplus s_\beta = s_{\alpha+\beta}$;

2) $\lambda s_\alpha = s_{\lambda\alpha}$.

然而, 在运算过程中, 若取 s_2= 差, s_4= 好, 则

$$s_2 \oplus s_4 = s_6, \tag{1.3}$$

即: 语言术语 “差” 与 “好” 的集成为 “极好”, 这与实际情形并不相符.

为克服上述标度的缺点, 文献 [18] 对上述加性语言评估标度进行了改进, 给出了一种语言术语下标以零为中心对称、且语言术语个数为奇数的语言评估标度

$$\boldsymbol{S}_2 = \{s_\alpha | \alpha = -\tau, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, \tau\}, \tag{1.4}$$

其中 s_α 表示语言术语, 特别地, $s_{-\tau}$ 和 s_τ 分别表示决策者实际使用的语言术语的下限和上限, τ 为正整数, 且 $\boldsymbol{S}_2$ 满足下列条件:

1) 若 $\alpha > \beta$, 则 $s_\alpha > s_\beta$;

2) 存在负算子 $\text{neg}(s_\alpha) = s_{-\alpha}$, 特别地, $\text{neg}(s_0) = s_0$.

例如, 当 $\tau = 3$ 时, $\boldsymbol{S}_2$ 可取 (见图 1.2)

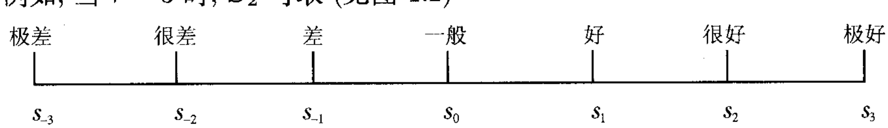

图 1.2　加性语言评估标度 $\boldsymbol{S}_2(\tau = 3)$

$\boldsymbol{S}_2=\{s_{-3}=$ 极差$, s_{-2}=$ 很差$, s_{-1}=$ 差$, s_0=$ 一般$, s_1=$ 好$, s_2=$ 很好$, s_3=$ 极好$\}$.

为了便于计算和避免丢失决策信息, 类似地, 可在加性语言评估标度 $\boldsymbol{S}_2$ 的基础上定义一个拓展标度 $\bar{\boldsymbol{S}}_2=\{s_\alpha|\ \alpha\in[-q,q]\}$, 其中 $q(q>\tau)$ 是一个充分大的自然数. 相应于 $\bar{\boldsymbol{S}}_2$ 的运算法则, 可类似于定义 1.1 中的 1) 和 2). 这样, 若取 $s_{-2}=$ 差, $s_2=$ 好, 则有

$$s_{-2}\oplus s_2=s_0, \tag{1.5}$$

即: 语言术语 “差” 与 “好” 的集成为 “一般”, 这与实际情形相一致.

上述两种标度的语言术语下标基本上是均匀的. 但是, 文献 [23] 指出: 在实际应用中, 随着语言术语下标的增大, 相邻语言术语下标之间的偏差绝对值也应该随着增大, 因此, 有必要对语言评估标度作进一步研究. 文献 [24] 对几种常见的数值评估标度 (1~9 标度, 9/9~9/1 标度, 10/10~18/2 标度和指数标度) (见表 1.1) 从不同的角度进行了模拟评估, 结果表明: 10/10~18/2 标度的性能最好.

表 1.1 4 种数值标度

	1~9 标度	指数标度	9/9~9/1 标度	10/10~18/2 标度
相 同	1	$9^{(0)}(1)$	9/9(1)	10/10(1)
稍 大	3	$9^{(1/9)}(1.277)$	9/7(1.286)	12/8(1.5)
明显大	5	$9^{(3/9)}(2.08)$	9/5(1.8)	14/6(2.333)
强烈大	7	$9^{(6/9)}(4.327)$	9/3(3)	16/4(4)
极端大	9	$9^{(9/9)}(9)$	9/1(9)	18/2(9)
	k	$9^{(k/9)}(4.327)$	$9/(10-k)$	$(9+k)/(11-k)$

基于 10/10~18/2 数值标度思想, 文献 [23] 给出一种语言术语下标以零为中心对称、且术语个数为奇数的加性语言评估标度:

首先给出语言术语下标在零右边的语言术语集:

$$\boldsymbol{S}_3^+=\left\{s_\alpha|\alpha=\frac{\tau+i}{\tau+2-i}-1=\frac{2(i-1)}{\tau+2-i},\ \ i=2,\cdots,\tau-1,\tau\right\}, \tag{1.6}$$

则语言术语下标在零左边的语言术语集为

$$\boldsymbol{S}_3^-=\left\{s_\alpha|\alpha=-\frac{2(i-1)}{\tau+2-i},\quad i=\tau,\tau-1,\cdots,2\right\}. \tag{1.7}$$

结合 (1.6) 式和 (1.7) 式, 文献 [23] 定义加性语言评估标度为

$$\boldsymbol{S}_3=\left\{s_\alpha|\alpha=-\frac{2(\tau-1)}{\tau+2-\tau},-\frac{2(\tau-1-1)}{\tau+2-(\tau-1)},\cdots,0,\cdots,\frac{2(\tau-1-1)}{\tau+2-(\tau-1)},\frac{2(\tau-1)}{\tau+2-\tau}\right\}. \tag{1.8}$$

(1.8) 式可进一步简化为

$$\boldsymbol{S}_3=\left\{s_\alpha|\alpha=-(\tau-1),\ -\frac{2}{3}(\tau-2),\cdots,0,\cdots,\frac{2}{3}(\tau-2),\ \tau-1\right\},\tag{1.9}$$

其中 s_α 表示语言术语, 特别地, $s_{-(\tau-1)}$ 和 $s_{(\tau-1)}$ 分别表示决策者实际使用的语言术语的下限和上限, τ 为正整数, 语言术语的个数为 $2\tau-1$, 且 $\boldsymbol{S}_3$ 满足下列条件:

1) 若 $\alpha>\beta$, 则 $s_\alpha>s_\beta$;

2) 存在负算子 $\mathrm{neg}(s_\alpha)=s_{-\alpha}$, 特别地, $\mathrm{neg}(s_0)=s_0$.

例如, 当 $\tau=1$ 时, $\boldsymbol{S}_3$ 可取 (见图 1.3)

$$\boldsymbol{S}_3=\{s_{-1}=\text{差}, s_0=\text{一般}, s_1=\text{好}\}$$

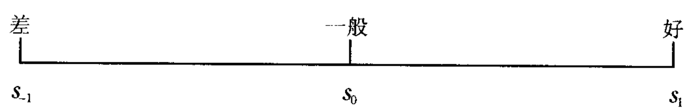

图 1.3　加性语言评估标度 $\boldsymbol{S}_3(\tau=1)$

当 $\tau=4$ 时, $\boldsymbol{S}_3$ 可取 (见图 1.4)

$$\boldsymbol{S}_3=\{s_{-3}=\text{极差}, s_{-4/3}=\text{很差}, s_{-1/2}=\text{差}, s_0=\text{一般}, s_{1/2}=\text{好}, s_{4/3}=\text{很好}, s_3=\text{极好}\}.$$

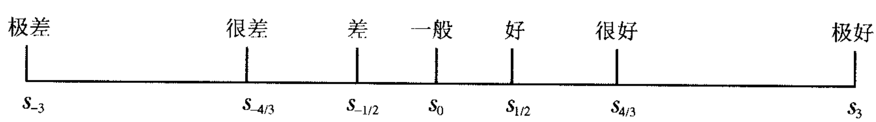

图 1.4　加性语言评估标度 $\boldsymbol{S}_3(\tau=4)$

当 $\tau=5$ 时, $\boldsymbol{S}_3$ 可取 (见图 1.5)

$$\boldsymbol{S}_3=\{s_{-4}=\text{极差}, s_{-2}=\text{很差}, s_{-1}=\text{差}, s_{-0.4}=\text{稍差}, s_0=\text{一般}, s_{0.4}=\text{稍好},$$
$$s_1=\text{好}, s_2=\text{很好}, s_4=\text{极好}\}.$$

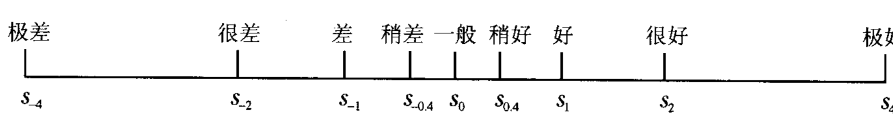

图 1.5　加性语言评估标度 $\boldsymbol{S}_3(\tau=5)$

类似地, 为了便于计算和避免丢失决策信息, 可在加性语言评估标度 $\boldsymbol{S}_3$ 的基础上定义一个拓展标度:

$$\bar{\boldsymbol{S}}_3=\{s_\alpha|\ \alpha\in[-q,q]\},$$

其中 $q(q>\tau-1)$ 是一个充分大的自然数. 拓展加性语言评估标度 $\bar{S}_3$ 的运算法则与定义 1.1 相同.

定理 1.1[23] 对于加性语言评估标度 S_3, 随着其语言术语下标绝对值的增大, 相邻语言术语下标之间的偏差绝对值也随着增大.

证明 现考虑语言术语集 S_3^+: 设 s_{α_1} 和 s_{α_2} 为 S_3^+ 中两个相邻的语言术语, 不妨设它们的下标分别为

$$\alpha_1=\frac{2(i-1)}{\tau+2-i},\quad \alpha_2=\frac{2(i+1-1)}{\tau+2-(i+1)},$$

则

$$\begin{aligned}|\alpha_1-\alpha_2|&=\frac{2(i+1-1)}{\tau+2-(i+1)}-\frac{2(i-1)}{\tau+2-i}=\frac{2i}{\tau-i+1}-\frac{2(i-1)}{\tau+2-i}\\&=\frac{2(\tau+1)}{(\tau+2-i)(\tau+1-i)}.\end{aligned}\tag{1.10}$$

由 (1.10) 式可知: 随着 i 值的增大, 其分子不变, 分母减小, 因而偏差绝对值 $|\alpha_1-\alpha_2|$ 随着增大. 其他情形类似可证.

上面介绍了 3 种加性语言评估标度$S_i(i=1,2,3)$, 其中S_1和S_2为均匀加性语言评估标度, 而 S_3 为非均匀加性语言评估标度. 在实际应用中, 可以根据实际情况适当地选取加性语言评估标度. 一般地, 与 $S_i(i=1,2)$ 相比, S_3 具有更好的实用性.

下一节将对积性语言评估标度进行介绍.

1.2 积性语言评估标度

文献 [21] 定义了一种积性语言评估标度:

$$S_4=\{s_\alpha|\alpha=1/\tau,\cdots,1/2,1,2,\cdots,\tau\},\tag{1.11}$$

其中 s_α 表示语言术语, 特别地, $s_{1/\tau}$ 和 s_τ 分别表示决策者实际使用的语言术语的下限和上限, τ 为正整数, 且 S_4 满足下列条件:

1) 若 $\alpha>\beta$, 则 $s_\alpha>s_\beta$;

2) 存在互反算子 $\mathrm{rec}(s_\alpha)=s_\beta$, 使得 $\alpha\beta=1$, 特别地, $\mathrm{rec}(s_1)=s_1$.

例如, 当 $\tau=4$ 时, S_4 可取 (见图 1.6)

$$S_4=\{s_{1/4}=极差, s_{1/3}=很差, s_{1/2}=差, s_1=一般, s_2=好, s_3=很好, s_4=极好\}.$$

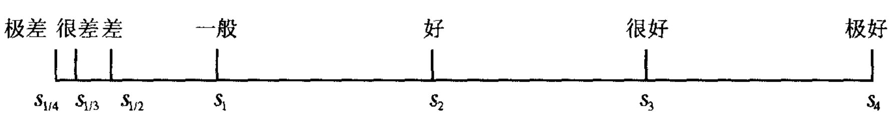

图 1.6 积性语言评估标度 $S_4(\tau=4)$

积性语言评估标度 $\boldsymbol{S}_4$ 具有下列性质:

定理 1.2 设 $\boldsymbol{S}_4$ 如 (1.11) 式所示, 且设语言术语下标在数值 1 右边和左边的语言术语集分别为

$$\boldsymbol{S}_4^+ = \{s_\alpha | \alpha = 1, 2, \cdots, \tau - 1,\ \tau\} \tag{1.12}$$

和

$$\boldsymbol{S}_4^- = \left\{ s_\alpha | \alpha = \frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau - 1}, \cdots, \frac{1}{2}, 1 \right\}, \tag{1.13}$$

则

1) $\boldsymbol{S}_4^+$ 中相邻语言术语下标之间的偏差绝对值为常数;

2) 随着 $\boldsymbol{S}_4^-$ 中语言术语下标绝对值的增大, 其相邻语言术语下标之间的偏差绝对值也随着增大.

证明 1) 把 (1.12) 式改写为

$$\boldsymbol{S}_4^+ = \{s_{\alpha_i} | \alpha_i = i, \quad i = 1, 2, \cdots, \tau\}, \tag{1.14}$$

则

$$|\alpha_{i+1} - \alpha_i| = (i + 1) - i = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, \tau - 1, \tag{1.15}$$

因此, 对任意 $i = 1, 2, \cdots, \tau - 1$, $|\alpha_{i+1} - \alpha_i|$ 为常量.

2) 把 (1.13) 式改写为

$$\boldsymbol{S}_4^- = \left\{ s_{\alpha_i} | \alpha_i = \frac{1}{\tau - (i - 1)}, \quad i = 1, 2, \cdots, \tau \right\}, \tag{1.16}$$

则

$$|\alpha_{i+1} - \alpha_i| = \frac{1}{\tau - (i + 1 - 1)} - \frac{1}{\tau - (i - 1)} = \frac{1}{(\tau - i + 1)(\tau - i)}, \quad i = 1, 2, \cdots, \tau - 1. \tag{1.17}$$

由 (1.17) 式可知: $|\alpha_{i+1} - \alpha_i|$ 随着 i 值的增大而增大. 定理证毕.

文献 [22] 定义了另一种积性语言标度：

$$\boldsymbol{S}_5 = \left\{ s_\alpha | \alpha = \frac{1}{\tau},\ \frac{2}{\tau}, \cdots, \frac{\tau - 1}{\tau},\ 1,\ \frac{\tau}{\tau - 1}, \cdots, \frac{\tau}{2},\ \tau \right\}, \tag{1.18}$$

其中 s_α 表示语言术语, 特别地, $s_{1/\tau}$ 和 s_τ 分别表示决策者实际使用的语言术语的下限和上限, τ 为正整数, 且 $\boldsymbol{S}_5$ 满足下列条件:

1) 若 $\alpha > \beta$, 则 $s_\alpha > s_\beta$;

2) 存在互反算子 $\mathrm{rec}(s_\alpha) = s_\beta$, 使得 $\alpha\beta = 1$, 特别地, $\mathrm{rec}(s_1) = s_1$.

例如, 当 $\tau = 4$ 时, $\boldsymbol{S}_5$ 可取 (见图 1.7)

$\boldsymbol{S}_5 = \{s_{1/4} =$ 极差, $s_{1/2} =$ 很差, $s_{3/4} =$ 差, $s_1 =$ 一般, $s_{4/3} =$ 好, $s_2 =$ 很好, $s_4 =$ 极好$\}$.

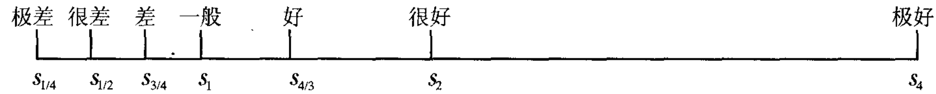

图 1.7 积性语言评估标度 $\boldsymbol{S}_5(\tau=4)$

积性语言评估标度 $\boldsymbol{S}_5$ 具有下列性质:

定理 1.3 设 $\boldsymbol{S}_5$ 如 (1.18) 式所示, 且设语言术语下标在数值 1 右边和左边的语言术语集分别为

$$\boldsymbol{S}_5^+=\left\{s_\alpha|\alpha=1,\frac{\tau}{\tau-1},\cdots,\frac{\tau}{2},\ \tau\right\} \tag{1.19}$$

和

$$\boldsymbol{S}_5^-=\left\{s_\alpha|\alpha=\frac{1}{\tau},\frac{2}{\tau},\cdots,\frac{\tau-1}{\tau},1\right\}, \tag{1.20}$$

则

1) 随着 $\boldsymbol{S}_5^+$ 中语言术语下标绝对值的增大, 其相邻语言术语下标之间的偏差绝对值也随着增大;

2) $\boldsymbol{S}_5^-$ 中相邻语言术语下标之间的偏差绝对值为常数.

证明 1) 为方便起见, 把 (1.19) 式改写为

$$\boldsymbol{S}_5^+=\left\{s_{\alpha_i}|\alpha_i=\ \frac{\tau}{\tau-(i-1)},\ \ i=1,2,\cdots,\tau\right\}, \tag{1.21}$$

则

$$|\alpha_{i+1}-\alpha_i|=\frac{\tau}{\tau-(i+1-1)}-\frac{\tau}{\tau-(i-1)}=\frac{\tau}{(\tau-i+1)(\tau-i)},\quad i=1,2,\cdots,\tau-1. \tag{1.22}$$

由 (1.22) 式可知 $|\alpha_{i+1}-\alpha_i|$ 随着 i 值的增大而增大.

2) 把 (1.20) 式改为

$$\boldsymbol{S}_5^-=\left\{s_{\alpha_i}|\alpha_i=\frac{i}{\tau},\ \ i=1,2,\cdots,\tau\right\}, \tag{1.23}$$

则

$$|\alpha_{i+1}-\alpha_i|=\frac{i+1}{\tau}-\frac{i}{\tau}=\frac{1}{\tau},\quad i=1,2,\cdots,\tau-1, \tag{1.24}$$

因此, 对任意 $i=1,2,\cdots,\tau-1$, $|\alpha_{i+1}-\alpha_i|$ 为常量. 定理证毕.

从定理 1.2 和定理 1.3 可知: 本节介绍的两种积性语言评估标度 $\boldsymbol{S}_4$ 和 $\boldsymbol{S}_5$ 都是局部非均匀语言评估标度, 其中 $\boldsymbol{S}_4$ 为左边部分 $\boldsymbol{S}_4^-$ 非均匀, 右边部分 $\boldsymbol{S}_4^+$ 均匀; 而 $\boldsymbol{S}_5$ 则是右边部分 $\boldsymbol{S}_5^+$ 非均匀, 左边部分 $\boldsymbol{S}_5^-$ 均匀. 对于全局非均匀积性语言评估标度有待于人们进一步研究和探讨.

第 2 章 语言信息集成算子

在现实生活中, 许多决策问题, 如评估汽车的“舒适度”和“设计”等属性 (或指标) 时, 一般很难用定量的数值来表示, 此时, 用定性的术语 (语言信息), 如“好”、“一般”和“差”等来表述则比较适合和方便. 如何对语言信息进行集成是一个十分重要的课题. 近年来, 许多学者对语言信息集成方式进行了研究, 基于第 1 章中介绍的语言评估标度 $\boldsymbol{S}_i(i=1, 2, 3, 4, 5)$, 提出了各种不同的语言信息集成算子, 如语言取大和取小算子 [25~30] 、语言中值算子 [26~28]、语言加权中值算子 [26~28]、语言取大取小加权平均算子 [29]、基于拓展原理的语言集成算子 [31~37]、基于符号的语言集成算子 [38]、二元组平均算子 [4]、二元组加权平均算子 [4]、二元组有序加权平均算子 [4]、语言加权有序平均算子 [39]、语言平均算子 [18, 21, 40, 41]、语言加权分离算子 [42,43]、语言加权联合算子 [42,43]、语言加权平均算子 [18,40~42]、双序的加权平均算子 [2,25,29]、双序的语言集成算子 [38]、双序的混合集成算子 [18]、语言有序加权平均算子 [18,21,30,41,43~48]、逆语言有序加权平均算子 [42,48]、语言混合集成算子 [20]、导出的语言有序加权平均算子 [41]、不确定语言平均算子 [13,41]、不确定语言加权平均算子 [41]、不确定语言有序加权平均算子 [13,41]、导出的不确定语言有序加权平均算子 [41,49]、不确定语言混合集成算子 [13] 等. 这些语言信息集成算子已在诸多领域得到广泛应用, 如: 工程 [1,18]、决策 [2,5,13,18~21,29,34,38,41~64]、信息检索 [11,35,65~68]、医疗诊断 [32,69]、营销 [48,70]、人工智能 [3]、排序 [71]、生物技术 [33]、材料选择 [36]、软件系统 [37]、人事管理 [72]、教育评估系统 [73]、供应链管理和维修服务 [18] 等. 文献 [74] 对上述语言信息集成算子进行了综述.

2.1 基于线性序的语言信息集成算子 [74]

设 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 为一组语言数据, 且 $a_j \in \boldsymbol{S}_1$, $j=1,2,\cdots,n$. 文献 [25~27] 给出如下语言取大 (LM_1) 算子:

$$\mathrm{LM}_1(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \max_j\{a_j\} \tag{2.1}$$

和语言取小 (LM_2) 算子:

$$\mathrm{LM}_2(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \min_j\{a_j\}. \tag{2.2}$$

在文献 [26~28] 中, Yager 等定义了一种语言中值 (LM_3) 算子:

$$LM_3(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{cases} b_{\frac{n+1}{2}}, & 若n为奇数,\\ b_{\frac{n}{2}}, & 若n为偶数,\end{cases} \tag{2.3}$$

其中 b_j 为 $a_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 中第 j 大的语言数据.

$LM_i(i=1,2,3)$ 算子是 3 种最简单的语言集成算子, 它们是很多其他语言信息集成算子的基础.

例 2.1 设 $\boldsymbol{S}_1=\{s_0,s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6\}$, $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=(s_0,s_2,s_1,s_5,s_3)$ 为 $\boldsymbol{S}_1$ 中一组语言数据, 则

$$LM_1(s_0,s_2,s_1,s_5,s_3)=\max\{s_0,s_2,s_1,s_5,s_3\}=s_5,$$

$$LM_2(s_0,s_2,s_1,s_5,s_3)=\min\{s_0,s_2,s_1,s_5,s_3\}=s_0.$$

把语言数据组 (s_0,s_2,s_1,s_5,s_3) 重新排序, 得

$$b_1=s_5,\quad b_2=s_3,\quad b_3=s_2,\quad b_4=s_1,\quad b_5=s_0,$$

因此

$$b_{\frac{5+1}{2}}=b_3=s_2,$$

从而

$$LM_3(s_0,s_2,s_1,s_5,s_3)=b_3=s_2.$$

Yager 等 [26~28] 进一步考虑了语言加权中值集成问题:

假设 $((w_1,a_1),(w_2,a_2),\cdots,(w_n,a_n))$ 为一组二元数据对, 其中 a_i 为语言术语, w_i 为 a_i 的权重, 它满足下列条件:

$$w_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n),\quad \sum_{i=1}^{n}w_i=1, \tag{2.4}$$

并且假设 $a_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 重新排序后, b_j 为 $a_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 中第 j 大的语言数据, 则 $((u_1,b_1),(u_2,b_2),\cdots,(u_n,b_n))$ 为 $((w_1,a_1),(w_2,a_2),\cdots,(w_n,a_n))$ 的一种有序形式, 其中 u_j 是成为 b_j 的 a_i 的权重. 例如, 若 $b_j=a_5$, 则 $u_j=w_5$. 设

$$z_i=\sum_{j=1}^{i}u_j, \tag{2.5}$$

若

$$LWM((u_1,b_1),(u_2,b_2),\cdots,(u_n,b_n))=b_k, \tag{2.6}$$