

三 锚 三 船舶工程精品图书

船舶运动与建模

(第2版)

李殿璞 编著



國防工業出版社

National Defense Industry Press

船舶运动与建模

(第2版)

李殿璞 编著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书以从事船舶控制与仿真的读者为对象,系统地讲述了船舶运动数学模型和建模方法。本书中,水面船舶和潜器被纳入同一体系,内容对各类船舶具有通用性,且模型结果形式上便于实施控制和仿真。此外,本书提供了多种现成建模结果,便于控制和仿真时直接引用。

本书适合于船舶自动化、船舶自动控制、船舶电气设备、电气工程及其自动化专业高年级本科生和相关学科研究生作为教材采用,也可供船舶设计、建造、操纵、使用、管理、航运等有关专业作为仿真辅助教材使用。同时也可供从事上述各专业及其他相关专业的科技工作者和管理人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

船舶运动与建模/李殿璞编著. —2 版. —北京:国防工业出版社,2008.2

ISBN 978-7-118-05459-0

I. 船... II. 李... III. 船舶运动-建立模型 IV. U661.32

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 177607 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 24¼ 字数 562 千字

2008 年 2 月第 2 版第 1 次印刷 印数 1—2500 册 定价 48.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422

发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535

发行业务:(010)68472764

第2版前言

本书第2版是在第1版的基础上经进一步补充、订正和认真审校后完成的。相对第1版而言,本书第2版在多方面更趋完善。第2版仍然秉承和贯彻第1版前言中所述的各项撰写指导原则,这些撰写原则的内容请见后附的第1版前言,不一一重述。第2版在系统性、严谨性、完整性等方面得到了更进一步的提升。

应当说明的是,第1版撰写时因教学急用,有一些部分未来得及仔细推敲和校正,出版时也比较匆忙,未及仔细校正,以致出现了一些疏漏和印刷差错。这些问题在第2版中都全面、仔细地做了订正。

现将第2版各章节所作的主要改动说明如下。

首先,第2版扩充了相当一部分内容,主要包括:增加了有流速情况下的水下机器人空间运动方程一章(第十三章);增加了建立姿态运动学方程的反对称阵方法的内容(第一章);增加了实用潜艇模型的水平面运动方程、垂直面运动方程和空间运动方程的内容(第四,五,九章);增加了理想螺旋推进器和四象限螺旋桨工作特性两节(第十二章)。

其次,对一些章节做了较大的修改和调整;主要包括:理顺了向量间的运算关系(第一章);与角有关状态变量采用了通用定义(第一章);补充了水动力系数函数因奇偶性而导致简化的内容(第四,五章);个别章节安排作了较大调整(第九,十一,十二章)。

再其次,规范了不同坐标系下的符号表示,使符号体系更加合理。

此外,重新绘制和调整了部分图和表。

本书第2版的出版得到了张志民、王丽娟同志的热情协助,国防工业出版社许西安同志和王鑫同志为本书编辑、出版做了重要和卓有成效的工作,在此一并表示深切的谢意。

在第2版出版之际,应当特别提到李效峰在打印电子原稿时所付出的大量劳动,没有他的辛苦工作,此书不可能提早与读者见面。

限于编著者学识,错误和不当之处仍在所难免,恳请读者批评指正。

编著者

2007年8月

第1版前言

本书是按照中国船舶工业总公司教材编写委员会审定的船舶自动化专业“船舶运动与建模”课程教学大纲编写的,可作为大学高年级本科生教材和研究生教材。本书主要面向从事船舶控制和仿真的读者对象。除船舶自动化、船舶自动控制、船电设备等专业可用作教材外,也可供船舶设计、建造、操纵、使用、管理、航运等有关专业作为仿真辅助教材使用。同时也可供从事上列各专业及其他相关专业的科技工作者和管理人员参考。

本书内容和船舶操纵性关系极为密切,但与通常的操纵性教材在内容取舍和侧重点上有很大不同。本书舍弃了很多对自动化专业学生和科技人员来说属于基础和常规的内容,使内容更为简洁;同时补充了一些很必要的理论力学和流体力学知识,重点介绍了有关的一些基本力学概念,把有关的力学知识作了归纳、串联,构成了一定的理论系统,使非力学专业的读者更便于理解并省去很多整理、查证的功夫。本书把船舶运动建模方法和模型的数学表达作为侧重点,以服务于对船实施控制和仿真的总目标。讨论中假设所研究的船舶对象,包括船体、船附体、控制面和推进动力的设计业已完成,因而不讨论与此有关的设计问题,只针对已建造完成的船研究建模问题。

本书强调内容的通用性。给出的结果将不针对某型船或某些艇,而着力于构造尽可能具有一般指导意义和普遍适用性的理论框架。不论是作为基础教学,还是作为面向广泛对象的仿真建模技术,教授通用理论框架显然比传授某些船或某些艇的特定经验和专门知识更重要。

本书注重内容的系统性。内容由浅入深,论述力求严密。由定常状态入手,以后讲述一般三自由度运动,而后再讨论空间运动。同时把水面船和潜器运动纳入同一理论体系。

就建模方法来说,本书仍然沿用现有的微分方程建模法和泰勒级数展开法。关于泰勒级数方法,现在一直只使用纵向匀速直航工作点下的展开式。考虑到船的建模技术近年来的新发展和适应一些新建模方法的需要,本书所讨论的泰勒展开式将把直航工作点展开扩充为任意工作点展开,将给出任意工作点下的展开式。同时也将给出各具有典型意义的工作点,包括纵向直航工作点下的展开式。

本书注重实用性。从仿真的需要来说,多数读者,特别是大多数非造船专业的学

生和科技人员,都希望能更快地和很方便地得到所需要的模型结果,而不是要经过十分繁琐的推导才能得到结果。所以本书尽可能地给出了常见的一些展开式,以便读者引用。

从模型结果具有的形式看,本书注意尽可能符合船舶控制系统设计者的需要,对线性模型给出了矩阵形式的状态方程;对非线性模型,则使控制量和状态量加以分离,变为状态向量加控制阵乘控制向量的形式。对所有结果中的状态量、控制量、扰动量都作了明确划分,规范了写法,因而更便于实施控制。公式结果一般用矩阵形式表述,其优点是物理意义明确,组合关系清楚,便于查对。少数情况下给出了展开式。在符号使用方面,除符合国际惯例外,主要符号还做到了尽量不重复、不二用,以免混淆。

本书兼顾水上和水下,不限于讨论潜器。在本书中“潜器”一词被作为水下船的通称,它包括潜艇、深潜艇、水下机器人等所有水下船。本书有些章节只适用于潜器,有些章节只讨论水面船,有些是通用的。

本书的出版得到了刘胜、彭侠夫同志的大力支持,也得到全国高校船舶类教材委员会唐加亨和李文秀等同志的积极协助,谨此致谢。

由于编著者学识所限,难免有错误和不当之处,敬请读者批评指正。

编 著 者
1998 年 4 月

目 录

第一章 坐标系及其变换	1
第一节 固定坐标系	1
第二节 运动坐标系	2
第三节 惯量矩阵和惯量主轴	4
第四节 速度向量与两坐标系的关系	11
第五节 运动坐标系与固定坐标系间的旋转变换	14
第六节 姿态运动学方程	18
第七节 建立姿态运动学方程的另一种方法	21
第二章 水平面定常回转运动	26
第一节 水平面坐标系	26
第二节 水平回转运动过程	28
第三节 水平定常回转运动数学模型	29
第四节 水平回转的耦合运动	35
第五节 水动力系数测定试验简介(一)	37
第六节 船舶水动力学中的无因次化体系	42
第三章 垂直面定常直线运动	46
第一节 垂直面坐标系	46
第二节 垂直面定常直线运动方程	48
第三节 等速直线定深航行	54
第四节 变深过程中的斜向定常运动	57
第五节 垂直面定常直线运动数字实例	65
第四章 水平面运动方程	68
第一节 水平面运动一般方程	68
第二节 水动力的泰勒级数表示	72
第三节 水动力函数一阶展开式中的水动力系数	77
第四节 水平面运动线性方程	81
第五节 二阶展开式中的水动力系数	85
第六节 螺旋推进器的推力和扭矩	92

第七节	水平面运动非线性方程	96
第八节	实用潜艇模型的水平面运动方程	99
第九节	有定向水平流时的水平面运动方程	102
第十节	水动力系数测定试验简介(二)	104
第五章	垂直面运动方程	109
第一节	垂直面运动一般方程	109
第二节	水动力的泰勒级数表示	113
第三节	水动力函数一阶展开式中的水动力系数	116
第四节	垂直面运动线性方程	119
第五节	二阶展开式中的水动力系数	124
第六节	垂直面非线性运动方程	132
第七节	实用潜艇模型的垂直面运动方程	137
第八节	有定向水平流时的垂直面运动方程	141
第六章	动量、动量矩及其导数	143
第一节	动量和动量矩	143
第二节	动量的导数和动量矩的导数	148
第七章	空间运动方程	154
第一节	建立船舶空间运动一般方程	155
第二节	船舶所受静力分析	160
第三节	水动力的泰勒级数表示	163
第四节	螺旋推进器的推力	177
第五节	六自由度空间运动方程的向量形式	180
第六节	六自由度空间运动方程的展开形式	184
第八章	流体惯性力和流体黏性力	191
第一节	附加质量和流体惯性力	191
第二节	流体黏性力	210
第九章	空间运动方程在特定情况下的简化	212
第一节	空间运动方程左端的简化	212
第二节	流体惯性力公式系数的简化	217
第三节	水动力系数整体的简化	238
第四节	舵水动力系数的简化	250
第五节	特定情况下的简化空间运动方程	258
第六节	实用潜艇空间运动方程	270

第十章 水动力系数的近似推算	280
第一节 附加质量和加速度系数的近似推算	280
第二节 速度一次项水动力系数的估算	286
第三节 角速度一次项水动力系数的估算	289
第四节 舵角水动力系数的估算	292
第五节 耦合水动力系数的近似推算	293
第六节 数例	296
第十一章 水面状态船舶横摇纵摇升沉运动方程	301
第一节 静力的泰勒展开式	301
第二节 无风浪时的船舶横摇纵摇升沉运动方程	305
第三节 无风浪时的船舶纵摇升沉运动方程	314
第四节 无风浪时的船舶直航横摇运动方程	315
第五节 规则波作用下直航船舶的横摇运动	317
第十二章 螺旋推进器特性	326
第一节 理想推进器	326
第二节 理想螺旋推进器	329
第三节 螺旋推进器的几何学	332
第四节 螺旋桨的推力和阻转矩	334
第五节 四象限螺旋桨工作特性	340
第六节 螺旋桨与船体的相互作用	345
第七节 装船后的螺旋桨工作特性	348
第十三章 有流速情况下的水下机器人空间运动方程	354
第一节 水下机器人空间运动一般方程	354
第二节 流体惯性力显式表达的水下机器人运动方程	355
第三节 定向水平流情况下的水下机器人运动方程	358
第四节 定向恒速流情况下的水下机器人运动方程	360
第五节 定向恒速流情况下流体惯性力显式表达的水下机器人运动方程	361
第六节 状态方程形式的水下机器人运动方程	362
第七节 外力和外力矩	364
符号表	371
参考文献	374

第一章 坐标系及其变换

研究船舶运动通常采用直角坐标系。基本的坐标系是固定坐标系(也称地面坐标系或静止坐标系)和运动坐标系(也称船体坐标系)。按惯例一律采用右手系。研究船舶运动所用参数、符号体系在国际上普遍采用国际水池会议(ITTC)与造船和轮机工程学会(SNAME)术语公报^[1,2]推荐的体系。本书也采用这一体系。

本章的学习重点是掌握两种基本坐标系的定义及其主要符号;深入掌握惯量矩阵、惯量主轴概念和惯量矩阵随坐标系平移和旋转的变换关系;明确速度向量与两基本坐标系的角位置关系和符号表示;深入掌握两基本坐标系间的旋转变换矩阵;学习如何建立姿态运动方程。

第一节 固定坐标系

一、固定坐标系的几种形式

为研究船舶运动,必须建立表达船舶运动的坐标系,或称参考系。同一般物体的力学运动一样,船舶运动问题也有运动学问题和动力学问题之分。单纯描述船舶位置、速度、加速度,以及姿态、角速度、角加速度随时间变化的问题属于运动学问题;研究船舶受到力和力矩作用后如何改变运动位置和姿态的问题属于动力学问题。由于运动的相对性,对于运动学问题来说,参考系的选择几乎不受什么限制,只要能作为描述运动的参照基准和研究问题比较方便即可;而对动力学问题来说则不然,参考系不能任意选择。牛顿定律的成立依赖于一定的参考系,这种参考系称惯性参考系,只有在惯性参考系下才能运用牛顿定律。因此研究船舶动力学问题时,也就是在运用牛顿定律以及其他根据牛顿定律推演得到的不同形式的动力学定律时,必须在惯性参考系下进行。

对于在小范围、短时间内发生的力学过程来说,地球表面可近似被认为是惯性参考系,船舶运动问题属于这样的力学过程,因此,我们在研究船舶动力学问题时,一般总是以大地作为参考系,通常把坐标系建立在地面、海面上或建立在海平面以下的海水中。

研究船舶运动所用的固定坐标系通常有如图 1-1 所示的三种形式。固定坐标系原点

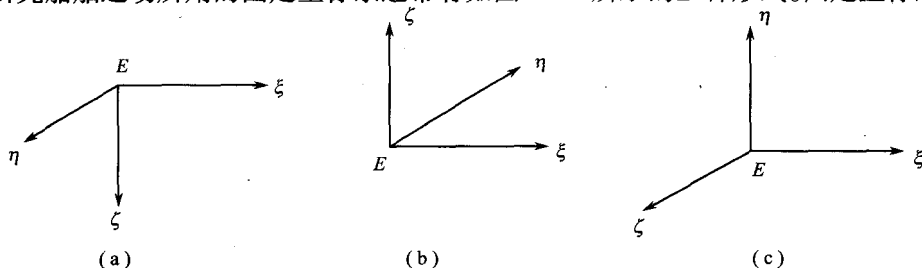


图 1-1 固定坐标系的几种形式

E 可选在海面或海中某一点, $E\xi$ 轴保持水平, 一般常以船舶的主航向为 $E\xi$ 轴的正向, 少数情况下把主航向取为 $E\eta$ 轴的正向。对于图 1-1(a), $E\xi$ 和 $E\eta$ 轴置于水平面内, $E\zeta$ 轴垂直于 $E\xi\eta$ 坐标平面, 其正向指向地心。对于图 1-1(b), $E\xi$ 和 $E\eta$ 轴仍置于水平面内, 不同的是 $E\zeta$ 轴的正方向指向天顶。图 1-1(c) 把 $E\xi$ 和 $E\zeta$ 轴置于水平面内, 而把 $E\eta$ 轴的正方向指向天顶。

二、固定坐标系下的主要符号

船舶在水面或水下运动, 其重心 G 的坐标记为 ξ_G, η_G, ζ_G 。船舶重心 G 的速度 U_G 是一个向量, 它在固定坐标系 ξ, η, ζ 轴上投影依次为 $U_{G\xi}, U_{G\eta}, U_{G\zeta}$, 即

$$U_G^s = (U_{G\xi} \ U_{G\eta} \ U_{G\zeta})^T = (\dot{\xi}_G \ \dot{\eta}_G \ \dot{\zeta}_G)^T \tag{1-1}$$

相应地, 船体原点的速度 U 可用它在 ξ, η, ζ 轴上的投影分量 U_ξ, U_η, U_ζ 表示为

$$U^s = (U_\xi \ U_\eta \ U_\zeta)^T = (\dot{\xi} \ \dot{\eta} \ \dot{\zeta})^T \tag{1-2}$$

船舶在某瞬时, 除去作沿直线的运动之外, 还会绕空间某一轴线作旋转运动。旋转运动也用向量表示, 绕某轴的旋转角速度记为 Ω , 向量 Ω 的方向与旋转轴向保持一致, 具体指向按右手螺旋规则确定。船体的旋转角速度向量 Ω 在固定坐标系 ξ, η, ζ 轴上的投影值依次为 $\Omega_\xi, \Omega_\eta, \Omega_\zeta$, 即

$$\Omega^s = (\Omega_\xi \ \Omega_\eta \ \Omega_\zeta)^T \tag{1-3}$$

船舶所受到的外力 F 也是一个向量, 它在固定坐标系 ξ, η, ζ 轴上的投影值依次为 F_ξ, F_η, F_ζ , 即

$$F^s = (F_\xi \ F_\eta \ F_\zeta)^T \tag{1-4}$$

同样, 船舶所受的外力矩 T 是一个向量, 它在固定坐标系 ξ, η, ζ 轴上的投影值分别为 T_ξ, T_η, T_ζ , 即

$$T^s = (T_\xi \ T_\eta \ T_\zeta)^T \tag{1-5}$$

把上面给出的固定坐标系下使用的符号归纳到一起, 可得表 1-1。

表 1-1 固定坐标系的主要符号

点和向量	ξ 轴	η 轴	ζ 轴	点和向量	ξ 轴	η 轴	ζ 轴
船舶重心 R_G^s	ξ_G	η_G	ζ_G	角速度 Ω^s	Ω_ξ	Ω_η	Ω_ζ
船舶原点 R_o^s	ξ_o	η_o	ζ_o	力 F^s	F_ξ	F_η	F_ζ
速 度 U^s	U_ξ	U_η	U_ζ	力矩 T^s	T_ξ	T_η	T_ζ

第二节 运动坐标系

一、运动坐标系的几种形式

固定坐标系虽然是惯性参考系, 但很多情况下使用起来不够方便, 比如研究船与周围海水间的相互作用力时, 因水动力决定于船体与海水的相对运动, 用固定坐标系参数来表

达就很困难。又比如,船体的转动惯量用固定坐标系参数来表示,形式上也会变得很复杂。因此除固定坐标系外,还需要建立其他坐标系。最常用的是建立在船体上的坐标系,称为运动坐标系或船体坐标系。因为运动坐标系固结于船体上,随船体作任意形式的运动,所以它除了静止和在作匀速直线运动的情况之外,都不能被认为是惯性系。

船体坐标系的原点 o 可以取在船重心 G 处,即 o 与 G 重合,但更一般的是取在 G 以外的点上。如果船体结构上存在对称面,则原点将取在对称面上。船体坐标系的坐标轴几乎无例外地都取得与图 1-1 所示的固定坐标系相对应,相应地有如图 1-2 所示的几种典型形式。

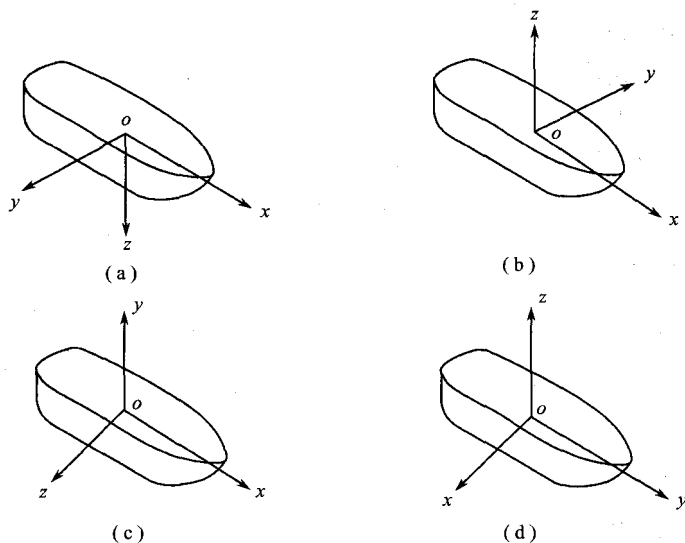


图 1-2 船体坐标系的几种形式

在船体坐标系中,一般把 ox 轴取在纵中剖面内,指向船首,平行于水线面。图 1-2 (d) 把 oy 轴取在纵中剖面内,并指向船首和平行水线面,是一个例外。在图 1-2(a) 中,取 oy 轴与纵中剖面垂直,指向右舷,平行于水线面, oz 轴在纵中剖面内,指向船底方向,与水线面垂直。在图 1-2(b) 中,与图 1-2(a) 不同的是 oy 轴指向左舷, oz 轴指向船底反方向。在图 1-2(c) 中, y 轴指向船底反方向,而 z 轴指向船右舷。在图 1-2(d) 中, ox 轴指向右舷, oz 轴指向船底反方向。

本书除个别部分外,均采用图 1-1(a)、图 1-2(a) 所示的坐标系。

二、船体坐标系下的主要符号

前面的式(1-1)是船体重心 G 的速度 U_G 在固定坐标系下的向量表示,同一个向量 U_G 也可以在船体坐标系下表示。设 U_G 在船体坐标系 x, y, z 轴上的投影值依次为 u_G, v_G, w_G ,则可写出

$$U_G = (u_G \quad v_G \quad w_G)^T \quad (1-6)$$

相应地,船体原点的速度 U ,可用它在船体坐标系上的三个投影分量 u, v, w 表示为

$$U = (u \quad v \quad w)^T \quad (1-7)$$

式中 u ——纵向速度;
 v ——横向速度;
 w ——垂直甲板方向速度。

注意,这里虽然采用了船体坐标系,但船体的速度 U_c 和 U 仍是相对于固定坐标系的,只是投影到船体坐标系上去了。

同样,式(1-2)所表示的船舶绕某轴的旋转角速度 Ω ,可用它在船体坐标系 x, y, z 轴上的投影分量 p, q, r 表示为

$$\Omega = (p \quad q \quad r)^T \quad (1-8)$$

式中 p ——横倾角速度;
 q ——纵倾角速度;
 r ——偏航角速度。

船体所受外力 F ,可用它在船体坐标系 x, y, z 轴上的投影 X, Y, Z 表示为

$$F = (X \quad Y \quad Z)^T \quad (1-9)$$

式中 X ——纵向力;
 Y ——横向力;
 Z ——垂直甲板方向力。

船体所受外力矩 T ,可用它在船体坐标系 x, y, z 轴上的投影分量 K, M, N 表示为

$$T = (K \quad M \quad N)^T \quad (1-10)$$

式中 K ——横倾力矩;
 M ——纵倾力矩;
 N ——偏航力矩。

注意,速度和力的分量均以指向坐标轴的正向为正,角速度和力矩的正方向按右手螺旋规则确定。例如, p 和 K 的正方向,是指绕 ox 轴使 oy 轴转向 oz 轴的方向,而 q 和 M 的正方向,是指绕 oy 轴使 oz 轴转向 ox 轴的方向。

把上面给出的船体坐标系下使用的一些符号归纳到一起,可得表 1-2。

表 1-2 船体坐标系的主要符号

点和向量	x 轴	y 轴	z 轴	点和向量	x 轴	y 轴	z 轴
船舶重心 R_c	x_c	y_c	z_c	角速度 Ω	p	q	r
船舶原点 R_o	0	0	0	力 F	X	Y	Z
速度 U	u	v	w	力矩 T	K	M	N

第三节 惯量矩阵和惯量主轴

船运动坐标系的建立和惯量主轴概念有密切关系,因此要求对惯量主轴概念有较深入的了解。本节将首先讨论刚体绕任意轴的转动惯量,由此引入惯量矩阵,随后在此基础上介绍与惯量主轴有关的一些概念。本节还将讨论惯量矩阵在坐标系平移和旋转后的变换问题。

一、绕任意轴转动惯量和绕坐标轴转动惯量的关系

本节所讨论的内容是一个一般的理论力学问题,具有普遍性,不仅仅局限于船舶。为保持这一理论结果的一般性,在这里,假设所讨论的对象是一个一般的刚体对象。

如图1-3所示实线所围成的刚体, $oxyz$ 是在刚体上建立的一个坐标系,原点 o 是刚体上的一点。现在任取一通过原点 o 的轴线 L , 讨论绕任意轴 L 的转动惯量和绕坐标轴 x, y, z 的转动惯量的关系。

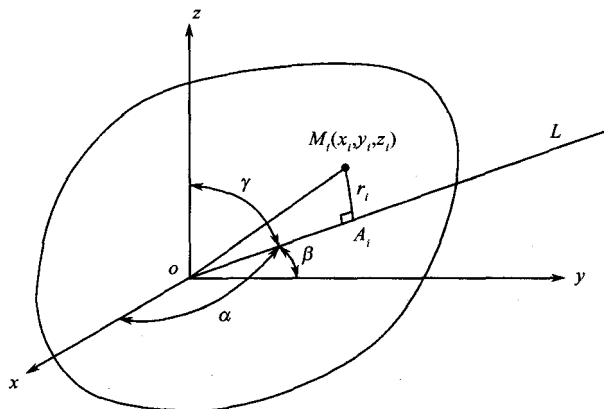


图1-3 刚体绕任意轴的转动惯量

轴 L 的方向可用方向余弦向量 L 来表示,它的各个分量,是轴 L 上的单位向量在 x, y, z 轴上的投影值,即

$$L = (\cos\alpha \quad \cos\beta \quad \cos\gamma)^T \quad (1-11)$$

式中 α, β, γ ——轴 L 与坐标轴 x, y, z 间的夹角。

把刚体分割为很多个微体积元。设点 M_i 处的微元的质量为 m_i , 过点 M_i 向轴 L 作垂线 $M_i A_i$ 得点 M_i 到轴 L 的距离 r_i 。因为

$$r_i^2 = \overline{oM_i^2} - \overline{oA_i^2}$$

和注意到 $\overline{oM_i}$ 在轴 L 上的投影,等于 $\overline{oM_i}$ 各分量 x_i, y_i, z_i 在轴 L 上投影之和,即

$$\overline{oA_i} = x_i \cos\alpha + y_i \cos\beta + z_i \cos\gamma$$

可知点 M_i 处微元对轴 L 的转动惯量

$$\Delta J_L = m_i r_i^2$$

因为

$$\begin{aligned} r_i^2 &= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - (x_i \cos\alpha + y_i \cos\beta + z_i \cos\gamma)^2 = \\ &= (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - (x_i \cos\alpha + y_i \cos\beta + z_i \cos\gamma)^2 = \\ &= (y_i^2 + z_i^2)\cos^2\alpha + (z_i^2 + x_i^2)\cos^2\beta + (x_i^2 + y_i^2)\cos^2\gamma - \\ &\quad 2y_i z_i \cos\beta \cos\gamma - 2z_i x_i \cos\gamma \cos\alpha - 2x_i y_i \cos\alpha \cos\beta \end{aligned}$$

把所有微元的转动惯量相加,得到整个刚体对轴 L 的转动惯量

$$\begin{aligned}
J_L &= \sum_i m_i r_i^2 = \\
&\cos^2 \alpha \sum_i (y_i^2 + z_i^2) m_i + \cos^2 \beta \sum_i (z_i^2 + x_i^2) m_i + \cos^2 \gamma \sum_i (x_i^2 + y_i^2) m_i - \\
&2\cos\beta\cos\gamma \sum_i y_i z_i m_i - 2\cos\gamma\cos\alpha \sum_i x_i z_i m_i - 2\cos\alpha\cos\beta \sum_i x_i y_i m_i = \\
&J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma + 2J_{yz} \cos\beta\cos\gamma + 2J_{zx} \cos\gamma\cos\alpha + 2J_{xy} \cos\alpha\cos\beta
\end{aligned} \tag{1-12}$$

式中 J_x ——刚体绕 x 轴的转动惯量, $J_x = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2)$;

J_y ——刚体绕 y 轴的转动惯量, $J_y = \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2)$;

J_z ——刚体绕 z 轴的转动惯量, $J_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$;

J_{yz} ——刚体对 y, z 轴的惯量积, $J_{yz} = - \sum_i m_i y_i z_i$;

J_{zx} ——刚体对 z, x 轴的惯量积, $J_{zx} = - \sum_i m_i z_i x_i$;

J_{xy} ——刚体对 x, y 轴的惯量积, $J_{xy} = - \sum_i m_i x_i y_i$ 。

式(1-12)是关于方向余弦向量 L 各分量的一个实系数的二次齐式,可写成方向余弦向量 L 的一个二次型函数,即

$$J_L = L^T J L = (\cos\alpha \quad \cos\beta \quad \cos\gamma) \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} & J_{zx} \\ J_{xy} & J_y & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{yz} & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} \tag{1-13}$$

在此式中,转动惯量 J_L 是一个实二次型,它是一个标量, J 是一个与实二次型 J_L 对应的实对称矩阵

$$J = \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} & J_{zx} \\ J_{xy} & J_y & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{yz} & J_z \end{bmatrix} \tag{1-14}$$

矩阵 J 是一个三阶实对称阵,称为实二次型 J_L 的矩阵。

式(1-13)明确地表达了刚体绕任意轴转动惯量 J_L 和刚体绕坐标轴 x, y, z 的转动惯量 J_x, J_y, J_z 之间的关系。绕坐标轴转动惯量 J_x, J_y, J_z , 实际上分别是惯量阵 J 的三个主对角线元素。

二、惯量矩阵及其变换

式(1-14)的实对称阵 J 又称惯量矩阵。由矩阵 J 的各元素的定义可知,矩阵 J 除决定于刚体自身的质量分布外,还与所选择的坐标系有关,因此更准确地说,应称 J 为关于坐标系 $oxyz$ 的惯量矩阵。在不同的坐标系下有不同的惯量阵。另外还可看到,尽管矩阵 J 是通过求刚体对轴 L 的转动惯量引入的,但实际上最后得到的矩阵 J 与具体选择哪一个轴 L

并无关系,矩阵 J 所表达的只是刚体对给定坐标系的惯量性质。

下面讨论惯量矩阵 J 在坐标系改变后的变化,分坐标系平移和坐标系旋转两种情况加以讨论。

(一) 惯量矩阵 J 在坐标系平移时的变化

今有质量为 M 的刚体,设平移前的坐标系是 $oxyz$,平移后得到的新坐标系是 $o'x'y'z'$ 。新坐标系的原点在原坐标系中的坐标是 (d_x, d_y, d_z) ,如图 1-4 所示。据此可定义点 o' 的位

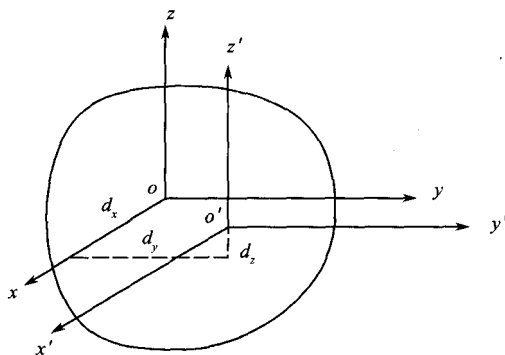


图 1-4 矩阵 J 在坐标平移时的变化

置向量

$$\mathbf{d} = (d_x \quad d_y \quad d_z)^T \quad (1-15)$$

又设坐标平移前刚体重心 G 的坐标是 $(x_G \quad y_G \quad z_G)$,据此可定义重心 G 的位置向量

$$\mathbf{R}_G = (x_G \quad y_G \quad z_G)^T \quad (1-16)$$

下面计算新惯量阵各元素。按式(1-12),对每个微元进行平移,所有微元相加,可算得坐标系平移后刚体对坐标轴 x' 的转动惯量

$$\begin{aligned} J'_{x'} &= \sum_i m_i [(y_i - d_y)^2 + (z_i - d_z)^2] = \\ &= \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) + (d_y^2 + d_z^2) \sum_i m_i - 2d_y \sum_i m_i y_i - 2d_z \sum_i m_i z_i = \\ &= J_x + M(d_y^2 + d_z^2) - 2d_y M y_G - 2d_z M z_G \end{aligned} \quad (1-17)$$

式中 M ——刚体总质量。

同样推导可得

$$J'_{y'} = J_y + M(d_z^2 + d_x^2) - 2d_z M z_G - 2d_x M x_G \quad (1-18)$$

$$J'_{z'} = J_z + M(d_x^2 + d_y^2) - 2d_x M x_G - 2d_y M y_G \quad (1-19)$$

由式(1-12),还可算得坐标系平移后刚体对坐标轴 y', z' 的惯量积

$$\begin{aligned} J'_{y'z'} &= - \sum_i m_i (y_i - d_y)(z_i - d_z) = \\ &= - \sum_i m_i y_i z_i - d_y d_z \sum_i m_i + d_y \sum_i m_i z_i + d_z \sum_i m_i y_i = \\ &= J_{yz} - M d_y d_z + d_y M z_G + d_z M y_G \end{aligned} \quad (1-20)$$

同样推导可得

$$J'_{zx} = J_{zx} - Md_z d_x + d_z Mx_G + d_x Mz_G \quad (1-21)$$

$$J'_{xy} = J_{xy} - Md_x d_y + d_x My_G + d_y Mx_G \quad (1-22)$$

根据式(1-17) ~ 式(1-22) 可知,刚体在坐标系由 $oxyz$ 平移到 $o'x'y'z'$ 后,其惯量矩阵将由 J 改变为

$$J' = \begin{bmatrix} J'_x & J'_{xy} & J'_{zx} \\ J'_{xy} & J'_y & J'_{yz} \\ J'_{zx} & J'_{yz} & J'_z \end{bmatrix} \quad (1-23)$$

此式是计算刚体在坐标系发生平移后的惯量矩阵的一般公式。

下面根据式(1-23) 给出两个常用的特定情况下的公式。

1. 平移前坐标系原点位于刚体重心 G 的情况

这种情况下因为

$$x_G = y_G = z_G = 0$$

前面的公式将得到简化,可知

$$J' = \begin{bmatrix} J'_x & J'_{xy} & J'_{zx} \\ J'_{xy} & J'_y & J'_{yz} \\ J'_{zx} & J'_{yz} & J'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x + M(d_y^2 + d_z^2) & J_{xy} - Md_x d_y & J_{zx} - Md_x d_z \\ J_{xy} - Md_x d_y & J_y + M(d_z^2 + d_x^2) & J_{yz} - Md_y d_z \\ J_{zx} - Md_x d_z & J_{yz} - Md_y d_z & J_z + M(d_x^2 + d_y^2) \end{bmatrix} =$$

$$J + M \begin{bmatrix} d_y^2 + d_z^2 & -d_x d_y & -d_x d_z \\ -d_x d_y & d_z^2 + d_x^2 & -d_y d_z \\ -d_x d_z & -d_y d_z & d_x^2 + d_y^2 \end{bmatrix} \quad (1-24)$$

2. 平移后坐标系原点移到刚体重心 G 的情况

这种情况下必有

$$x_G = d_x \quad y_G = d_y \quad z_G = d_z$$

通过计算可得到

$$J' = \begin{bmatrix} J'_x & J'_{xy} & J'_{zx} \\ J'_{xy} & J'_y & J'_{yz} \\ J'_{zx} & J'_{yz} & J'_z \end{bmatrix} = J - M \begin{bmatrix} d_y^2 + d_z^2 & -d_x d_y & -d_x d_z \\ -d_x d_y & d_z^2 + d_x^2 & -d_y d_z \\ -d_x d_z & -d_y d_z & d_x^2 + d_y^2 \end{bmatrix} \quad (1-25)$$

(二) 惯量矩阵 J 在坐标系旋转时的变化

让我们研究图1-3所示刚体绕轴 L 的转动惯量表达式(1-13) 随坐标系的改变。设坐标系 $oxyz$ 经绕任意一个轴旋转后改变为 $ox'y'z'$, 由 $oxyz$ 到 $ox'y'z'$ 的变换显然是一正交变换。设对应的正交变换阵为 Q , 则轴 L 的新、旧方向余弦向量之间的关系可以表示为