21世纪普通高等教育基础课规划教材

线性代数

LINEAR ALGEBRA

汤茂林 徐汉娃 ◎主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21 世纪普通高等教育基础课规划教材

线 性 代 数

主编　汤茂林　徐汉娃
参编　胡耀胜　吴　纯　杜汉玲

机 械 工 业 出 版 社

本书是根据作者多年的教学实践，结合教育部关于高等教育线性代数教学基本要求编写而成的。

本书共分为6章，内容有行列式，矩阵运算，线性方程组，矩阵的特征值与特征向量，二次型及线性代数的简单应用。在附录中还简单介绍了数学软件 Mathematica 在线性代数中的应用。

本书可作为高等院校本、专科各专业线性代数的教材，也可供工程技术人员自学参考。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/汤茂林，徐汉娃主编. —北京：机械工业出版社，2007.7（2008.3 重印）

21 世纪普通高等教育基础课规划教材

ISBN 978-7-111-21961-3

Ⅰ.线… Ⅱ.①汤…②徐… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 112330 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

责任编辑：张继宏 版式设计：张世琴 责任校对：吴美英

封面设计：王伟光 责任印制：邓 博

北京京丰印刷厂印刷

2008 年 3 月第 1 版 · 第 2 次印刷

169mm×239mm · 6.625 印张 · 256 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-21961-3

定价：18.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

销售服务热线电话：（010）68326294

购书热线电话：（010）88379639 88379641 88379643

编辑热线电话：（010）88379711

封面无防伪标均为盗版

前　　言

近年来，普通高等教育“十五”国家规划教材，注意将线性代数的知识和经济学及其他有关应用问题适当结合起来，这对于培养高等技术应用型人才，无疑起到重要的作用。但是线性代数的教学实践表明，要使线性代数和高职高专的特点有机地相结合，这就要做到论述详尽，易懂，内容注意适用，够用，便于自学。为此，经过我们的努力，结合高职高专的特点，编写了这本线性代数教材。

本书突出基本概念，理论和方法。概念和结论的引入由具体到抽象、由特殊到一般，尽量从提出问题或引入具体易懂的例子阐明重要的概念，结论与方法。适当减少一些定量的推导，力求通俗易懂，深入浅出。

书中带“*”号的内容，可不作为教学要求，供对线性代数课程要求较高的读者使用。

参加本书编写的有，杜汉玲（第1章），汤茂林（第2章），吴纯（第3章、第6章），胡耀胜（第4章），徐汉娃（第5章），全书由汤茂林总纂。

本书在编写过程中，得到了武汉商业服务学院教务处、基础课部及机械工业出版社的大力支持，在此，一并表示感谢。

由于水平所限，书中难免存在问题，恳请读者和同行批评指正。

编　者

2007年3月于武汉后官湖畔

目　　录

第1章 行 列 式

在生产实践和科学研究中，有许多问题可以直接或间接地表示成一些变量间的线性关系。因此，研究变量间的线性关系是一个非常重要的问题。线性代数是主要研究线性函数的一个数学分支。行列式是研究线性方程组的有力工具，它不仅在数学本身，而且在其他数学分支、科技和经济领域都有着广泛的应用。本章由简单的2阶、3阶行列式引出 n 阶行列式的概念，然后讨论 n 阶行列式的性质和计算方法，以及用 n 阶行列式解 n 元 n 个方程的线性方程组的克莱姆法则。

1.1 2阶、3阶行列式

1. 2阶行列式

行列式是人们从解线性方程组的需要中建立起来的。我们先来解两个未知量 x_1、x_2 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

这里 b_1、b_2 是常数项，a_{ij}为 x_j 的系数$(i, j=1, 2)$，i, j 叫做下脚标，i 表示它在第 i 个方程，j 表示它是第 j 个未知量的系数，x_j 表示第 j 个未知量。

用加减消元法解方程组(1-1)，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1-1)有唯一的解，其解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

定义1-1 记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$称为2阶行列式，它表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

行列式中横排叫行，竖排叫列。其中 a_{ij}称为行列式中第 i 行，第 j 列的元素。

设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

当 $D\neq 0$ 时，利用 2 阶行列式，方程组(1-1)的解可表示为：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D}$$

这里称 D 为方程组(1-1)的系数行列式。

【例 1-1】 解二元线性方程组 $\begin{cases} 4x_1-2x_2=5 \\ x_1+4x_2=8 \end{cases}$。

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=4\times 4-(-2)\times 1=18\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}=5\times 4-(-2)\times 8=36$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}=4\times 8-5\times 1=27$$

所以原方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{36}{18}=2,\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{27}{18}=\frac{3}{2}$$

2. 3 阶行列式

设三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1-2}$$

用消元法解方程组(1-2)得

$$Dx_1=D_1,\ Dx_2=D_2,\ Dx_3=D_3$$

其中

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$D_1=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3$$

$$D_2=a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}$$

$$D_3=a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}$$

当 $D\neq 0$ 时，方程组(1-2)有唯一解，其解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}$$

下面引进 3 阶行列式的概念。

定义 1-2 记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，称为 3 阶行列式。

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

3 阶行列式含有 3 行 3 列，共 9 个元素。等式右边的代数式叫做 3 阶行列式的展开式。式中共有 6 项，每一项都是行列式中不同行不同列的 3 个元素的乘积。其中 3 项为正，3 项为负。展开行列式时，各项前面的符号可由图 1-1 画线的方法记忆：

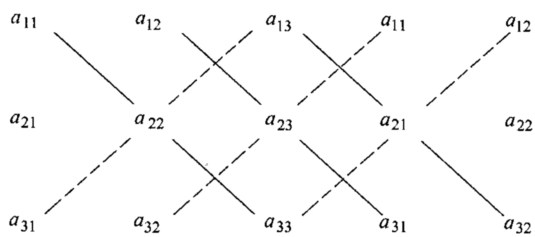

图 1-1

图 1-1 中实线连接的 3 个元素相乘所得到的项取正号，虚线连接的 3 个元素相乘所得到的项取负号。a_{11}，a_{22}，a_{33}所在的对角线称为主对角线，a_{13}，a_{22}，a_{31}所在的对角线称为次对角线。

于是，有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

这里 D 称为方程组(1-2)的系数行列式。

【例 1-2】 解线性方程组$\begin{cases}3x_1+2x_2-x_3=4\\x_1-x_2+2x_3=5\\2x_1-x_2+x_3=3\end{cases}$。

解 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&2&-1\\1&-1&2\\2&-1&1\end{vmatrix}=8,\ D_1=\begin{vmatrix}4&2&-1\\5&-1&2\\3&-1&1\end{vmatrix}=8$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3&4&-1\\1&5&2\\2&3&1\end{vmatrix}=16,\ D_3=\begin{vmatrix}3&2&4\\1&-1&5\\2&-1&3\end{vmatrix}=24$$

所以原方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=2,\ x_3=\frac{D_3}{D}=3$$

习 题 1-1

1. 计算下列 2 阶、3 阶行列式的值

(1) $\begin{vmatrix}3&-2\\6&4\end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix}\lambda-1&3\\2&\lambda+1\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}0&1&2\\1&2&0\\2&0&1\end{vmatrix}$;　(4) $\begin{vmatrix}a&1&a\\-1&a&1\\a&-1&a\end{vmatrix}$。

2. 用行列式解下列方程组

(1) $\begin{cases}x_1+2x_2=1\\3x_1-x_2=-4\end{cases}$;　(2) $\begin{cases}x_1-2x_2=3\\x_1-5x_2=-9\end{cases}$;

(3) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\2x_1-x_2-x_3=1\\x_1-x_2+x_3=2\end{cases}$;　(4) $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=-2\\2x_1+x_2-3x_3=1\\-x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$。

1.2 *n* 阶行列式

为了定义 n 阶行列式，先介绍排列的一些概念。

1. 排列及逆序数

定义 1-3 由 1, 2, …, n 组成的一个有序数组称为一个 n 元排列。

例如：3 1 2 是一个 3 元排列，3 1 2 4 5 是一个 5 元排列。

【例 1-3】 写出由 1, 2, 3 组成的所有的 3 元排列。

解 由 1，2，3 组成的有序数组有且仅有以下 6 个：

$$1\,2\,3,\ 1\,3\,2,\ 2\,1\,3,\ 2\,3\,1,\ 3\,1\,2,\ 3\,2\,1$$

这就是由数 1，2，3 组成的全部 3 元排列。

由 n 个连续自然数组成的不同的排列共有 $n\cdot(n-1)\cdots2\cdot1=n!$ 个，所以 n 元排列一共有 $n!$ 个。

定义 1-4 在 n 元排列 $i_1\cdots i_p\cdots i_q\cdots i_n$ 中，若 $i_p>i_q$，则称 i_p 与 i_q 组成一个**逆序**，排在 i_q 前比 i_q 大的数字的个数，称为这个排列中 i_q 的**逆序数**。排列中所有数字的逆序数之和，称为这个排列的逆序数。记为 $N(i_1\,i_2\cdots\,i_n)$。

【例 1-4】 求下列排列的逆序数

(1) 1 3 2 4； (2) 2 4 3 1 5； (3) $n\ (n-1)\cdots3\ 2\ 1$。

解 (1) 从左到右，依次讨论每个数字在排列 1 3 2 4 中的逆序数，1 的逆序数为 0，3 的逆序数为 0，2 的逆序数为 1，4 的逆序数为 0，然后把它们相加，得

$$N(1\,3\,2\,4)=0+0+1+0=1$$

(2) $N(2\,4\,3\,1\,5)=0+0+1+3+0=4$。

(3) $N(n\ (n-1)\cdots3\ 2\ 1)=0+1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$。

在自然顺序的排列 $1\,2\,3\cdots n$ 中，每个数字的逆序数都为零，因此 $N(1\,2\,3\cdots n)=0$。

定义 1-5 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**。

如上例中，排列 1 3 2 4 是奇排列，排列 2 4 3 1 5 和自然顺序列 $1\ 2\ 3\ \cdots\ n$ 是偶排列。而排列 $n\ (n-1)\cdots3\ 2\ 1$ 的奇偶性取决于 n 的值。

2. *n* 阶行列式的定义

在 1.1 节中已给出了 2 阶、3 阶行列式的定义，由 3 阶行列式的展开式可看出它有如下结构特征：

(1) 等式右边的每项是 3 个数的乘积，这 3 个数按行下标自然顺序排列，即行下标排列都是 1 2 3，而列下标构成某个 3 元排列，记为 $j_1\,j_2\,j_3$，则各项的一般形式为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，说明这 3 个数取自行列式的不同行不同列。

(2) 等式右边乘积项的列下标排列不重复，且无遗漏，恰好是全部三元排列，共 $3!$ 项。

(3) 各项的符号：带正号的 3 项其列下标排列分别为 1 2 3，2 3 1，3 1 2 均为偶排列。带负号的 3 项列下标排列分别为 1 3 2，2 1 3，3 2 1 均为奇排列。因此，当行下标按自然顺序排列时，列下标排列的奇偶数决定了各乘积项的符号。

于是 3 阶行列式可定义成：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2j_3)}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 $\sum\limits_{(j_1j_2j_3)}$ 表示对3元排列 $j_1j_2j_3$ 对应的6项求和。

根据3阶行列式这一定义形式，可以把行列式概念推广到 n 阶情形。

定义 1-6 由 n 行、n 列共 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的如下形式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

称为 n 阶行列式，简记 $D=\det(a_{ij})$，其中 $\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 表示对所有 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 对应的项(共 $n!$ 项)求和。a_{ij} 为行列式 D 中第 i 行，第 j 列的元素。

由定义来确定 n 阶行列式的值，一般首先对不同行不同列的 n 个元素作乘积，然后把这些乘积的元素所处位置的行下标按自然顺序排列，则列下标排列的奇偶性决定该项符号，再对所有这样的 $n!$ 个乘积求和，即可得行列式的值。

行列式从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线。

【例 1-5】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

解 由定义知 n 阶行列式的一般项为 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

考察行列式 D 的非零项，因 D 的第 n 行除 a_{nn} 外，其余全为零，故所有含 a_{nj_n} $(j_n\neq n)$ 的乘积项也全为零，因而只考虑 $j_n=n$ 的项即可；再看第 $n-1$ 行，除 $a_{n-1,n-1}$ 和 $a_{n-1,n}$ 外，其余全为零，从而只考虑 $j_{n-1}=n-1$ 或 n 的情形。又由于乘积项中每个数取自不同行不同列，那么只能取 $j_{n-1}=n-1$，这样依次上推，D 的非零项只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，该项列下表排列的逆序数 $N(1\ 2\ \cdots\ n)=0$，于是

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这个行列式主对角线以下元素全为零，称为上三角形行列式。类似地，可以计算

下三角形行列式(主对角线以上元素全为零)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特殊情况:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots n)$，这种行列式称为对角行列式。

【例1-6】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$。

解 行列式 D 中，只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 这一项不等于零，所以

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{N(4\,3\,2\,1)}1\times 2\times 3\times 4=(-1)^{6}\times 24=24$$

习 题 1-2

1. 确定下述排列的逆序数，并确定排列的奇偶性

(1) 3 2 1 4 5;　　(2) 5 2 3 1 4 7 6 9 8;

(3) 2 4 6 $\cdots(2n)(2n-1)\cdots$5 3 1。

2. 选择 i 和 j，使

(1) 1 2 7 i 3 5 6 j 9 成偶排列;

(2) 3 6 i 4 j 2 8 9 5 成奇排列。

3. 根据行列式的定义计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

4. 试确定 i 和 j 的值，使

(1) $a_{13}a_{2i}a_{3j}a_{42}$在4阶行列式中带正号；

(2) $a_{35}a_{i4}a_{13}a_{j2}a_{51}$在5阶行列式中带负号。

1.3 行列式的性质

由行列式的定义来计算 n 阶行列式，需要计算 $n!$ 个乘积项，如果阶数较高，计算量极大。因此有必要了解行列式的基本性质，以简化计算。

把 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行与列互换，得到新的行列式，记为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ 称为 D 的**转置行列式**。

显然行列式 D 也是行列式 D^{T} 的转置行列式。比较行列式 D 与 D^{T}，可以得到

性质1 行列互换，行列式的值不变。即 $D=D^{\mathrm{T}}$。

例如3阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=10,\qquad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=10$$

这一性质说明，在行列式中行与列的地位是相同的，因此，凡是有关行的性质，对列也成立，反过来，对列成立的性质，对行也成立。以下凡是与行和列有关的性质，我们只对行进行讨论。

性质2 用数 k 乘以行列式的某一行(列)的所有元素，等于用数 k 去乘这个行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

或者说，行列式某行(列)的公因子可以提到行列式外面来。

如行列式

$$\begin{vmatrix} 10 & 30 & 20 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -40$$

特殊地，当 $k=0$ 时，可得到

推论 如果行列式中有一行(列)的元素全是零，那么这个行列式的值等于零。

性质3 如果行列式中某一行(列)的各个元素都是由两项之和组成，则这个行列式可以写成除这一行(列)以外，其余元素不变的两个行列式之和。此时，第一个行列式的某一行(列)取原行列式的第一项各元素，第二个行列式的某一行(列)取原行列式的第二项各元素，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

如行列式

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 30 & 11 & 19 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 30+0 & 10+1 & 20-1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 30 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 0+6=6 \end{aligned}$$

性质4 交换行列式的两行(列)，行列式的值改变符号。

如行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

交换 D 中的第1、3行得

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 6 = -D$$

推论1 行列式有两行(列)的对应元素相同，则行列式的值为零。

这是因为，把行列式相同的两行(列)互换，得到 $D=-D$。从而 $D=0$。

推论2 行列式有两行(列)的对应元素成比例，则行列式的值为零。

性质5 将行列式某一行(列)的各个元素的 k 倍加到另一行(列)的对应元素上，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

此性质可用性质3及性质4的推论2进行证明。

如行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

把第2行的 -2 倍加到第一行的对应元素上去，得

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

易验证 $D_1=D=-15$。

为了书写简便，在行列式的计算过程中，用下列记号来表示行列式中的三种变换：

(1) $r_i \longleftrightarrow r_j$ 表示将行列式的第 i 行与第 j 行对应元素互换。

(2) $r_i \times k$ 表示将行列式的第 i 行各元素都乘以常数 k，$r_i \div k$ 表示第 i 行提取公因子 k。

(3) $r_i + kr_j$ 表示将行列式的第 j 行各元素乘以常数 k 后，加到第 i 行对应元素上。

如果是列变换，则将上述记号中的 r 换成 c。

由行列式的以上性质，可以将某些行列式化简成三角形行列式的形式，从而

求出行列式的值。

【例 1-7】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\1&3&5&0\\0&1&5&6\\1&2&3&4\end{vmatrix}$。

解

$$D=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\1&3&5&0\\0&1&5&6\\1&2&3&4\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&5&-1\\0&1&5&6\\0&0&3&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&5&-1\\0&0&0&7\\0&0&3&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_3\longleftrightarrow r_4}-\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&5&-1\\0&0&3&3\\0&0&0&7\end{vmatrix}=-21$$

【例 1-8】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}5&0&4&2\\1&-1&2&1\\4&1&2&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}$。

解

$$D=\begin{vmatrix}5&0&4&2\\1&-1&2&1\\4&1&2&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\longleftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix}1&-1&2&1\\5&0&4&2\\4&1&2&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-4r_1\\r_4-r_1}]{r_2-5r_1}-\begin{vmatrix}1&-1&2&1\\0&5&-6&-3\\0&5&-6&-4\\0&2&-1&0\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\longleftrightarrow r_4}\begin{vmatrix}1&-1&2&1\\0&2&-1&0\\0&5&-6&-4\\0&5&-6&-3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2\longleftrightarrow c_3}-\begin{vmatrix}1&2&-1&0\\0&-1&2&0\\0&-6&5&-4\\0&-6&5&-3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-6r_2]{r_3-6r_2}-\begin{vmatrix}1&2&-1&1\\0&-1&2&0\\0&0&-7&-4\\0&0&-7&-3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3}-\begin{vmatrix}1&2&-1&1\\0&-1&2&0\\0&0&-7&-4\\0&0&0&1\end{vmatrix}=-7$$