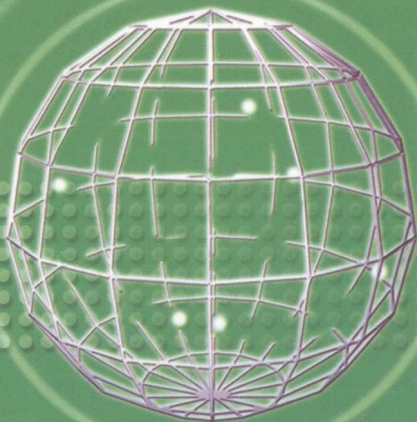


高等学校教材
工程数学

矢量分析与场论

(第3版)

谢树艺



 高等教育出版社

0183/1=3

2005

高等学校教材

工程数学

矢量分析与场论

(第3版)

谢树艺

高等教育出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

工程数学. 矢量分析与场论 / 谢树艺. —3 版.

北京: 高等教育出版社, 2005. 4(2008 重印)

ISBN 978-7-04-016324-7

I. 工... II. 谢... III. ①工程数学 - 高等学校 - 教材②矢量 - 分析 - 高等学校 - 教材③场论 - 高等学校 - 教材 IV. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 024994 号

策划编辑 徐 可 责任编辑 董达英 封面设计 于 涛
责任绘图 郝 林 版式设计 王 莹 责任校对 朱惠芳
责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限 公司		http://www.landaco.com.cn
印 刷	河北省财政厅票证文印中心	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	850×1168 1/32	版 次	1978年12月第1版 2005年4月第3版
印 张	4.625	印 次	2008年5月第8次印刷
字 数	110 000	定 价	7.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 16324-00

内容提要

本书是在《工程数学——矢量分析与场论》(第2版)的基础上修订而成的,此次修订参照了使用此书的教师和读者提出的意见,对本书第2版中一些不够清楚或不恰当之处作了修改,对书中的例题、习题作了适当的调整。本书各章包括:矢量分析,场论,哈密顿算子 ∇ ,梯度、散度、旋度与调和量在正交曲线坐标系中的表示式。此外,考虑到某些学科领域的需要,作为本书的附录,增讲了若干正交曲线坐标系。本书可作为一般工科院校本课程的教材使用。

第3版前言

工程数学《矢量分析与场论》第2版,被许多学校采用作为教材,迄今几近20年。其间,在1987年由国家教育委员会举办的全国优秀教材评选中获国家教委二等奖,后于1994年经高等教育出版社授权由我国台湾省凡异出版社又用繁体字出版。

这一版是在第2版的基础上修订的,其中参照了使用此书的教师和读者提出的一些宝贵意见。这次修订,对一些不够清楚或不够恰当之处作了修改,对书中的例题、习题及其答案进行了再次审核,并作了适量的调整,改正了个别的错误。此外,考虑到今后的发展和某些学科领域的需要,在已有的柱面坐标系和球面坐标系之外,作为此书的附录,再增讲了若干正交曲线坐标系。

这里,编者要向关心此书和提过宝贵意见的同志,表示衷心的感谢!

因编者水平所限,在第3版中,难免仍存在缺点和错误,诚望读者批评指正!

编者

2004年7月于重庆大学

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

传 真：(010) 82086060

E - mail: dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100011

购书请拨打电话：(010)58581118

目 录

第一章 矢量分析	1
第一节 矢性函数	1
1. 矢性函数的概念	1
2. 矢端曲线	2
3. 矢性函数的极限和连续性	3
第二节 矢性函数的导数与微分	5
1. 矢性函数的导数	5
2. 导矢的几何意义	7
3. 矢性函数的微分	8
4. 矢性函数的导数公式	11
第三节 矢性函数的积分	16
1. 矢性函数的不定积分	16
2. 矢性函数的定积分	18
习题 1	19
第二章 场论	21
第一节 场	21
1. 场的概念	21
2. 数量场的等值面	21
3. 矢量场的矢量线	23
4. 平行平面场	27
习题 2	29
第二节 数量场的方向导数和梯度	30
1. 方向导数	30
2. 梯度	35

习题 3	40
第三节 矢量场的通量及散度	41
1. 通量	42
2. 散度	47
*3. 平面矢量场的通量与散度	52
习题 4	55
第四节 矢量场的环量及旋度	56
1. 环量	56
2. 旋度	61
习题 5	65
第五节 几种重要的矢量场	66
1. 有势场	67
2. 管形场	74
3. 调和场	77
习题 6	82
第三章 哈密顿算子 ∇	84
习题 7	90
* 第四章 梯度、散度、旋度与调和量在正交曲线 坐标系中的表示式	92
第一节 曲线坐标的概念	92
第二节 正交曲线坐标系中的弧微分	94
1. 坐标曲线的弧微分	94
2. 一般曲线的弧微分	96
3. 在正交曲线坐标系中矢量 e_1, e_2, e_3 与矢量 i, j, k 之间的关系	97
第三节 在正交曲线坐标系中梯度、散度、旋度与调和量的 表示式	104
1. 梯度的表示式	104
2. 散度的表示式	106

3. 调和量的表示式	107
4. 旋度的表示式	107
5. 梯度、散度、旋度与调和量在柱面坐标系和球面坐标系 中的表示式	109
习题 8	110
附录 若干正交曲线坐标系	112
1. 椭圆柱面坐标系	112
2. 抛物柱面坐标系	113
3. 双极坐标系	114
4. 长球面坐标系	116
5. 扁球面坐标系	117
6. 旋转抛物面坐标系	118
7. 圆环面坐标系	119
8. 双球面坐标系	121
9. 椭球面坐标系	122
10. 锥面坐标系	123
11. 抛物面坐标系	124
习题 9	128
习题答案	130

* 第一章 矢量分析

这一章矢量分析,是矢量代数的继续,它是场论的基础知识;同时也是研究其他许多学科的有用工具.其主要内容是介绍矢性函数及其微分、积分等.

第一节 矢性函数

1. 矢性函数的概念

我们在矢量代数中,曾经学过模和方向都保持不变的矢量,这种矢量称为常矢(零矢量的方向为任意,可作为一个特殊的常矢量);然而,在许多科学、技术问题中,我们常常遇到模和方向或其中之一会改变的矢量,这种矢量称为变矢.例如当质点 M 沿曲线 l 运动时,其速度矢量 v ,在运动过程中,就是一个变矢,参看图 1-1. 此外,在矢量分析中还引进了矢性函数的概念,其定义如下.

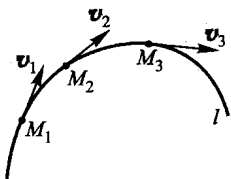


图 1-1

定义 设有数性变量 t 和变矢 A , 如果对于 t 在某个范围 G 内的每一个数值, A 都以一个确定的矢量和它对应, 则称 A 为数性变量 t 的矢性函数, 记作

$$A = A(t), \quad (1.1)$$

并称 G 为函数 A 的定义域.

矢性函数 $A(t)$ 在 $Oxyz$ 直角坐标系中的三个坐标(即它在三个坐标轴上的投影), 显然都是 t 的函数:

$$A_x(t), \quad A_y(t), \quad A_z(t),$$

所以,矢性函数 $A(t)$ 的坐标表示式为:

$$A = A_x(t)i + A_y(t)j + A_z(t)k, \quad (1.2)$$

其中 i, j, k 为沿 x, y, z 三个坐标轴正向的单位矢量. 可见,一个矢性函数和三个有序的数性函数(坐标)构成一一对应的关系.

2. 矢端曲线

本章所讲的矢量均指自由矢量,就是当二矢量的模和方向都相同时,就认为此二矢量是相等的. 据此,为了能用图形来直观地表示矢性函数 $A(t)$ 的变化状态,我们就可以把 $A(t)$ 的起点取在坐标原点. 这样,当 t 变化时,矢量 $A(t)$ 的终点 M 就描绘出一条曲线 l ,如图 1-2;这条曲线叫做矢性函数 $A(t)$ 的矢端曲线,亦叫做矢性函数 $A(t)$ 的图形. 同时称(1.1)式或(1.2)式为此曲线的矢量方程.

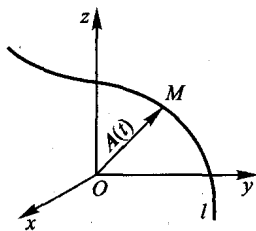


图 1-2

由矢量代数知道:起点在坐标原点 O , 终点为 $M(x, y, z)$ 的矢量 \overrightarrow{OM} 叫做点 M (对于 O 点)的矢径,常用 r 表示:

$$r = \overrightarrow{OM} = xi + yj + zk.$$

当我们把矢性函数 $A(t)$ 的起点取在坐标原点时, $A(t)$ 实际上就成为其终点 $M(x, y, z)$ 的矢径. 因此, $A(t)$ 的三个坐标 $A_x(t)$, $A_y(t)$, $A_z(t)$ 就对应地等于其终点 M 的三个坐标 x, y, z , 即有

$$x = A_x(t), \quad y = A_y(t), \quad z = A_z(t), \quad (1.3)$$

此式就是曲线 l 的以 t 为参数的参数方程.

容易看出,曲线 l 的矢量方程(1.2)和参数方程(1.3)之间,有着明显的一一对应关系,只要知道其中的一个,就可以立刻写出另一个来.

例如:已知圆柱螺旋线(图 1-3)的参数方程为

$$x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, z = b\theta,$$

则其矢量方程为

$$\mathbf{r} = a \cos \theta \mathbf{i} + a \sin \theta \mathbf{j} + b\theta \mathbf{k}.$$

又如：已知摆线(图 1-4)的参数方程为

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t),$$

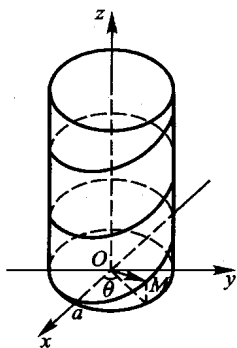


图 1-3

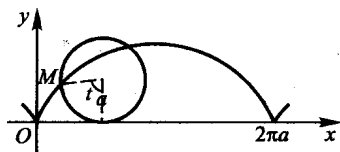


图 1-4

则其矢量方程为

$$\mathbf{r} = a(t - \sin t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}.$$

3. 矢性函数的极限和连续性

和数性函数一样,矢性函数的极限和连续性,是矢性函数的微分与积分的基础概念.兹分述于下:

(1) 矢性函数极限的定义 设矢性函数 $A(t)$ 在点 t_0 的某个邻域内有定义(但在 t_0 处可以没有定义), A_0 为一常矢.若对于任意给定的正数 ε ,都存在一个正数 δ ,使当 t 满足 $0 < |t - t_0| < \delta$ 时,就有

$$|A(t) - A_0| < \varepsilon$$

成立,则称 A_0 为矢性函数 $A(t)$ 当 $t \rightarrow t_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0. \quad (1.4)$$

这个定义与数性函数的极限定义完全类似. 因此, 矢性函数也就有类似于数性函数中的一些极限运算法则. 例如

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) \mathbf{A}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{A}(t), \quad (1.5)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{A}(t) \pm \mathbf{B}(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{A}(t) \pm \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{B}(t), \quad (1.6)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{A}(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{B}(t), \quad (1.7)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{A}(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{B}(t), \quad (1.8)$$

其中 $u(t)$ 为数性函数, $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ 为矢性函数; 且当 $t \rightarrow t_0$ 时, $u(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ 均有极限存在.

依此, 设

$$\mathbf{A}(t) = A_x(t)\mathbf{i} + A_y(t)\mathbf{j} + A_z(t)\mathbf{k},$$

则由(1.6)与(1.5)有

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{A}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} A_x(t)\mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow t_0} A_y(t)\mathbf{j} + \lim_{t \rightarrow t_0} A_z(t)\mathbf{k}, \quad (1.9)$$

此式把求矢性函数的极限, 归结为求三个数性函数的极限.

(2) 矢性函数连续性的定义 若矢性函数 $\mathbf{A}(t)$ 在点 t_0 的某个邻域内有定义, 而且有

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t_0), \quad (1.10)$$

则称 $\mathbf{A}(t)$ 在 $t = t_0$ 处连续.

容易看出: 矢性函数 $\mathbf{A}(t)$ 在点 t_0 处连续的充要条件是它的三个坐标函数 $A_x(t)$, $A_y(t)$, $A_z(t)$ 都在 t_0 处连续.

若矢性函数 $\mathbf{A}(t)$ 在某个区间内的每一点处都连续, 则称它在该区间内连续.

第二节 矢性函数的导数与微分

1. 矢性函数的导数

设有起点在 O 点的矢性函数 $A(t)$, 当数性变量 t 在其定义域内从 t 变到 $t + \Delta t$ ($\Delta t \neq 0$) 时, 对应的矢量分别为

$$A(t) = \overrightarrow{OM},$$

$$A(t + \Delta t) = \overrightarrow{ON},$$

如图 1-5, 则

$$A(t + \Delta t) - A(t) = \overrightarrow{MN}$$

叫做矢性函数 $A(t)$ 的增量, 记作 ΔA , 即

$$\Delta A = A(t + \Delta t) - A(t).$$

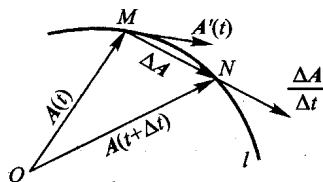


图 1-5

$$(2.1)$$

据此, 我们就可给出矢性函数的导数的定义.

定义 设矢性函数 $A(t)$ 在点 t 的某一邻域内有定义, 并设 $t + \Delta t$ 也在这邻域内. 若 $A(t)$ 对应于 Δt 的增量 ΔA 与 Δt 之比

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t}$$

在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 其极限存在, 则称此极限为矢性函数 $A(t)$ 在点 t 处的导数 (简称导矢), 记作 $\frac{dA}{dt}$ 或 $A'(t)$, 即

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t}. \quad (2.2)$$

若 $A(t)$ 由坐标式给出:

$$\mathbf{A}(t) = A_x(t)\mathbf{i} + A_y(t)\mathbf{j} + A_z(t)\mathbf{k},$$

且函数 $A_x(t), A_y(t), A_z(t)$ 在点 t 可导, 则有

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_x}{\Delta t} \mathbf{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_y}{\Delta t} \mathbf{j} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_z}{\Delta t} \mathbf{k}, \\ &= \frac{dA_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt} \mathbf{k}, \end{aligned}$$

即

$$\mathbf{A}'(t) = A'_x(t)\mathbf{i} + A'_y(t)\mathbf{j} + A'_z(t)\mathbf{k}. \quad (2.3)$$

此式把求矢性函数的导数归结为求三个数性函数的导数.

例 1 已知圆柱螺旋线的矢量方程为

$$\mathbf{r}(\theta) = a \cos \theta \mathbf{i} + a \sin \theta \mathbf{j} + b \theta \mathbf{k},$$

求导矢 $\mathbf{r}'(\theta)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \mathbf{r}'(\theta) &= (a \cos \theta)' \mathbf{i} + (a \sin \theta)' \mathbf{j} + (b \theta)' \mathbf{k} \\ &= -a \sin \theta \mathbf{i} + a \cos \theta \mathbf{j} + b \mathbf{k}. \end{aligned}$$

例 2 设 $\mathbf{e}(\varphi) = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}$,

$$\mathbf{e}_1(\varphi) = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}.$$

试证明:

$$\mathbf{e}'(\varphi) = \mathbf{e}_1(\varphi), \mathbf{e}'_1(\varphi) = -\mathbf{e}(\varphi),$$

及

$$\mathbf{e}(\varphi) \perp \mathbf{e}_1(\varphi).$$

证

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'(\varphi) &= (\cos \varphi)' \mathbf{i} + (\sin \varphi)' \mathbf{j} \\ &= -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} \\ &= \mathbf{e}_1(\varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_1'(\varphi) &= (-\sin \varphi)'i + (\cos \varphi)'j \\ &= -\cos \varphi i - \sin \varphi j \\ &= -e(\varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } e(\varphi) \cdot e_1(\varphi) &= \cos \varphi (-\sin \varphi) \\ &\quad + \sin \varphi \cos \varphi = 0, \end{aligned}$$

所以 $e(\varphi) \perp e_1(\varphi)$.

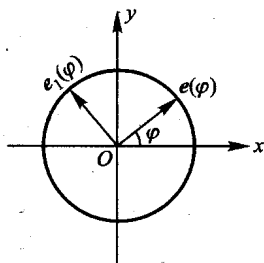


图 1-6

容易看出, $e(\varphi)$ 为一单位矢量, 故其矢端曲线为一单位圆, 因此 $e(\varphi)$ 又叫做圆函数; 与之相伴出现的 $e_1(\varphi)$, 亦为单位矢量, 其矢端曲线亦为单位圆, 如图 1-6.

引用圆函数, 圆柱螺旋线的方程就可简写为

$$r(\theta) = ae(\theta) + b\theta k,$$

其导矢 $r'(\theta) = ae_1(\theta) + bk$.

2. 导矢的几何意义

如图 1-5, l 为 $A(t)$ 的矢端曲线, $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ 是在 l 的割线 MN 上的一个矢量. 当 $\Delta t > 0$ 时, 其指向与 ΔA 一致, 系指向对应 t 值增大的一方; 当 $\Delta t < 0$ 时, 其指向与 ΔA 相反, 如图 1-7, 但此时 ΔA 指向对应 t 值减少的一方, 从而 $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ 仍指向对应 t 值增大的一方.

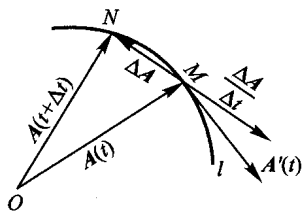


图 1-7

在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 由于割线 MN 绕点 M 转动, 且以点 M 处的切线为其极限位置. 此时, 在割线上的矢量 $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ 的极限位置, 自然也就在此切线上, 这就是说, 导矢

$$A'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t},$$

当其不为零时,是在点 M 处的切线上,且由上述可知,其方向恒指向对应 t 值增大的一方.故导矢在几何上为一矢端曲线的切向矢量,指向对应 t 值增大的一方.

3. 矢性函数的微分

(1) 微分的概念与几何意义

设有矢性函数 $A = A(t)$,我们把

$$dA = A'(t) dt \quad (dt = \Delta t) \quad (2.4)$$

称为矢性函数 $A(t)$ 在 t 处的微分.

由于微分 dA 是导矢 $A'(t)$ 与增量 Δt 的乘积,所以它是一个矢量,而且和导矢 $A'(t)$ 一样,也在点 M 处与 $A(t)$ 的矢端曲线 l 相切.但其指向:当 $dt > 0$ 时,与 $A'(t)$ 的方向一致;而当 $dt < 0$ 时,则与 $A'(t)$ 的方向相反,如图 1-8.

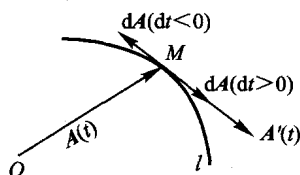


图 1-8

微分 dA 的坐标表示式,可由(2.3)式求得,即

$$\begin{aligned} dA &= A'(t) dt \\ &= A'_x(t) dt i + A'_y(t) dt j + A'_z(t) dt k \end{aligned}$$

或

$$dA = dA_x i + dA_y j + dA_z k. \quad (2.5)$$

例3 设 $r(\theta) = a \cos \theta i + b \sin \theta j$, 求 dr 及 $|dr|$.

解

$$\begin{aligned} dr &= d(a \cos \theta) i + d(b \sin \theta) j \\ &= -a \sin \theta d\theta i + b \cos \theta d\theta j \end{aligned}$$