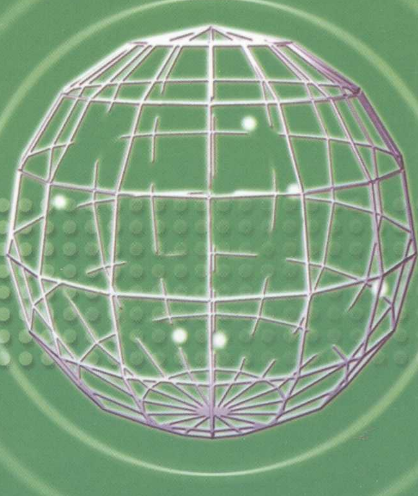
高等学校教材

工程数学

矢量分析与场论

(第3版)

谢树艺



高等教育出版社

高等学校教材

工程数学

矢量分析与场论

（第3版）

谢树艺

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

工程数学．矢量分析与场论／谢树艺．—3版．北京：高等教育出版社，2005.4(2008重印)

ISBN 978-7-04-016324-7

Ⅰ．工…　Ⅱ．谢…　Ⅲ．①工程数学-高等学校-教材②矢量-分析-高等学校-教材③场论-高等学校-教材　Ⅳ．TB11

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第024994号

策划编辑　徐　可　　责任编辑　董达英　　封面设计　于　涛
责任绘图　郝　林　　版式设计　王　莹　　责任校对　朱惠芳
责任印制　朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
印　　刷	河北省财政厅票证文印中心		
		版　　次	1978年12月第1版
开　　本	850×1168　1/32		2005年4月第3版
印　　张	4.625	印　　次	2008年5月第8次印刷
字　　数	110 000	定　　价	7.00元

物料号　16324-00

内容提要

本书是在《工程数学——矢量分析与场论》(第2版)的基础上修订而成的,此次修订参照了使用此书的教师和读者提出的意见,对本书第2版中一些不够清楚或不恰当之处作了修改,对书中的例题、习题作了适当的调整。本书各章包括:矢量分析,场论,哈密顿算子∇,梯度、散度、旋度与调和量在正交曲线坐标系中的表示式。此外,考虑到某些学科领域的需要,作为本书的附录,增讲了若干正交曲线坐标系。本书可作为一般工科院校本课程的教材使用。

第3版前言

工程数学《矢量分析与场论》第2版，被许多学校采用作为教材，迄今几近20年。其间，在1987年由国家教育委员会举办的全国优秀教材评选中获国家教委二等奖，后于1994年经高等教育出版社授权由我国台湾省凡异出版社又用繁体字出版。

这一版是在第2版的基础上修订的，其中参照了使用此书的教师和读者提出的一些宝贵意见。这次修订，对一些不够清楚或不够恰当之处作了修改，对书中的例题、习题及其答案进行了再次审核，并作了适量的调整，改正了个别的错误。此外，考虑到今后的发展和某些学科领域的需要，在已有的柱面坐标系和球面坐标系之外，作为此书的附录，再增讲了若干正交曲线坐标系。

这里，编者要向关心此书和提过宝贵意见的同志，表示衷心的感谢！

因编者水平所限，在第3版中，难免仍存在缺点和错误，诚望读者批评指正！

编　者

2004年7月于重庆大学

目　　录

*第一章　矢量分析

这一章矢量分析，是矢量代数的继续，它是场论的基础知识；同时也是研究其他许多学科的有用工具.其主要内容是介绍矢性函数及其微分、积分等.

第一节　矢性函数

1. 矢性函数的概念

我们在矢量代数中，曾经学过模和方向都保持不变的矢量，这种矢量称为**常矢**（零矢量的方向为任意，可作为一个特殊的常矢量）；然而，在许多科学、技术问题中，我们常常遇到模和方向或其中之一会改变的矢量，这种矢量称为**变矢**.例如当质点 M 沿曲线 l 运动时，其速度矢量 $\boldsymbol{v}$，在运动过程中，就是一个变矢，参看图 1－1.此外，在矢量分析中还引进了矢性函数的概念，其定义如下.

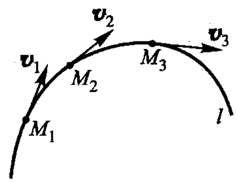


图 1－1

定义　设有数性变量 t 和变矢 $\boldsymbol{A}$，如果对于 t 在某个范围 G 内的每一个数值，$\boldsymbol{A}$ 都以一个确定的矢量和它对应，则称 $\boldsymbol{A}$ 为数性变量 t 的**矢性函数**，记作

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t), \tag{1.1}$$

并称 G 为函数 $\boldsymbol{A}$ 的**定义域**.

矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在 $Oxyz$ 直角坐标系中的三个坐标（即它在三个坐标轴上的投影），显然都是 t 的函数：

$$A_x(t),\qquad A_y(t),\qquad A_z(t),$$

所以，矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的坐标表示式为：

$$\boldsymbol{A}=A_x(t)\boldsymbol{i}+A_y(t)\boldsymbol{j}+A_z(t)\boldsymbol{k},\tag{1.2}$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为沿 x,y,z 三个坐标轴正向的单位矢量. 可见，一个矢性函数和三个有序的数性函数（坐标）构成一一对应的关系.

2. 矢端曲线

本章所讲的矢量均指**自由矢量**，就是当二矢量的模和方向都相同时，就认为此二矢量是相等的. 据此，为了能用图形来直观地表示矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的变化状态，我们就可以把 $\boldsymbol{A}(t)$ 的起点取在坐标原点. 这样，当 t 变化时，矢量 $\boldsymbol{A}(t)$ 的终点 M 就描绘出一条曲线 l，如图 1－2；这条曲线叫做矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的**矢端曲线**，亦叫做矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的**图形**. 同时称（1.1）式或（1.2）式为此曲线的**矢量方程**.

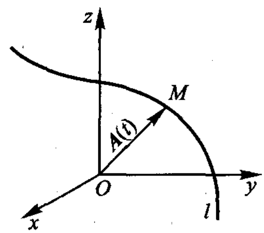


图 1－2

由矢量代数知道：起点在坐标原点 O，终点为 $M(x,y,z)$ 的矢量 $\overrightarrow{OM}$ 叫做点 M（对于 O 点）的**矢径**，常用 $\boldsymbol{r}$ 表示：

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

当我们把矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的起点取在坐标原点时，$\boldsymbol{A}(t)$ 实际上就成为其终点 $M(x,y,z)$ 的矢径. 因此，$\boldsymbol{A}(t)$ 的三个坐标 $A_x(t)$，$A_y(t)$，$A_z(t)$ 就对应地等于其终点 M 的三个坐标 x,y,z，即有

$$x=A_x(t),\qquad y=A_y(t),\qquad z=A_z(t),\tag{1.3}$$

此式就是曲线 l 的以 t 为参数的**参数方程**.

容易看出，曲线 l 的矢量方程（1.2）和参数方程（1.3）之间，有着明显的一一对应关系，只要知道其中的一个，就可以立刻写出另一个来.

例如：已知圆柱螺旋线（图 1－3）的参数方程为

$$x = a\cos\theta, y = a\sin\theta, z = b\theta,$$

则其矢量方程为

$$\boldsymbol{r} = a\cos\theta\boldsymbol{i} + a\sin\theta\boldsymbol{j} + b\theta\boldsymbol{k}.$$

又如：已知摆线（图 1－4）的参数方程为

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t),$$

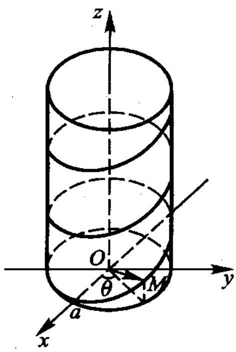


图 1－3

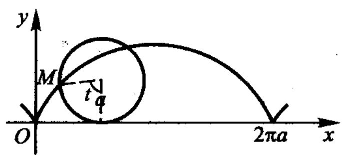


图 1－4

则其矢量方程为

$$\boldsymbol{r} = a(t - \sin t)\boldsymbol{i} + a(1 - \cos t)\boldsymbol{j}.$$

3. 矢性函数的极限和连续性

和数性函数一样，矢性函数的极限和连续性，是矢性函数的微分与积分的基础概念. 兹分述于下：

（1）矢性函数极限的定义　设矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在点 t_0 的某个邻域内有定义（但在 t_0 处可以没有定义），$\boldsymbol{A}_0$ 为一常矢. 若对于任意给定的正数 ε，都存在一个正数 δ，使当 t 满足 $0 < |t - t_0| < \delta$ 时，就有

$$|\boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{A}_0| < \varepsilon$$

成立，则称 $\boldsymbol{A}_0$ 为矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 当 $t \to t_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{A}_0. \tag{1.4}$$

这个定义与数性函数的极限定义完全类似. 因此,矢性函数也就有类似于数性函数中的一些极限运算法则. 例如

$$\lim_{t\to t_0}u(t)\boldsymbol{A}(t)=\lim_{t\to t_0}u(t)\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t), \tag{1.5}$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{A}(t)\pm\boldsymbol{B}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)\pm\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{B}(t), \tag{1.6}$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)\cdot\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{B}(t), \tag{1.7}$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{A}(t)\times\boldsymbol{B}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)\times\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{B}(t), \tag{1.8}$$

其中 $u(t)$ 为数性函数, $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{B}(t)$ 为矢性函数;且当 $t\to t_0$ 时, $u(t)$, $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{B}(t)$ 均有极限存在.

依此,设

$$\boldsymbol{A}(t)=A_x(t)\boldsymbol{i}+A_y(t)\boldsymbol{j}+A_z(t)\boldsymbol{k},$$

则由(1.6)与(1.5)有

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)=\lim_{t\to t_0}A_x(t)\boldsymbol{i}+\lim_{t\to t_0}A_y(t)\boldsymbol{j}+\lim_{t\to t_0}A_z(t)\boldsymbol{k}, \tag{1.9}$$

此式把求矢性函数的极限,归结为求三个数性函数的极限.

(2) 矢性函数连续性的定义　若矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在点 t_0 的某个邻域内有定义,而且有

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{A}(t_0), \tag{1.10}$$

则称 $\boldsymbol{A}(t)$ 在 $t=t_0$ 处**连续**.

容易看出:矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在点 t_0 处连续的充要条件是它的三个坐标函数 $A_x(t)$, $A_y(t)$, $A_z(t)$ 都在 t_0 处连续.

若矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在某个区间内的每一点处都连续,则称它**在该区间内连续**.

第二节　矢性函数的导数与微分

1. 矢性函数的导数

设有起点在 O 点的矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$，当数性变量 t 在其定义域内从 t 变到 $t+\Delta t(\Delta t\neq 0)$ 时，对应的矢量分别为

$$\boldsymbol{A}(t)=\overrightarrow{OM},$$

$$\boldsymbol{A}(t+\Delta t)=\overrightarrow{ON},$$

如图 1－5，则

$$\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)=\overrightarrow{MN}$$

叫做矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的**增量**，记作 $\Delta\boldsymbol{A}$，即

$$\Delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t). \tag{2.1}$$

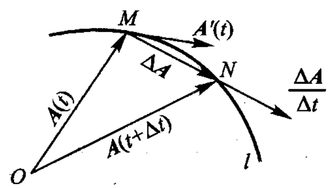


图 1－5

据此，我们就可给出矢性函数的导数的定义.

定义　设矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在点 t 的某一邻域内有定义，并设 $t+\Delta t$ 也在这邻域内. 若 $\boldsymbol{A}(t)$ 对应于 Δt 的增量 $\Delta\boldsymbol{A}$ 与 Δt 之比

$$\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}$$

在 $\Delta t\to 0$ 时，其极限存在，则称此极限为矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在点 t 处的**导数**（简称**导矢**），记作 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$ 或 $\boldsymbol{A}'(t)$，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}. \tag{2.2}$$

若 $\boldsymbol{A}(t)$ 由坐标式给出：

$$\boldsymbol{A}(t) = A_x(t)\boldsymbol{i} + A_y(t)\boldsymbol{j} + A_z(t)\boldsymbol{k},$$

且函数 $A_x(t), A_y(t), A_z(t)$ 在点 t 可导，则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{A}}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_y}{\Delta t}\boldsymbol{j} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_z}{\Delta t}\boldsymbol{k},\\ &= \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{A}'(t) = A'_x(t)\boldsymbol{i} + A'_y(t)\boldsymbol{j} + A'_z(t)\boldsymbol{k}. \tag{2.3}$$

此式把求矢性函数的导数归结为求三个数性函数的导数.

例 1 已知圆柱螺旋线的矢量方程为

$$\boldsymbol{r}(\theta) = a\cos\theta\boldsymbol{i} + a\sin\theta\boldsymbol{j} + b\theta\boldsymbol{k},$$

求导矢 $\boldsymbol{r}'(\theta)$.

解 $\boldsymbol{r}'(\theta) = (a\cos\theta)'\boldsymbol{i} + (a\sin\theta)'\boldsymbol{j} + (b\theta)'\boldsymbol{k}$

$= -a\sin\theta\boldsymbol{i} + a\cos\theta\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}.$

例 2 设 $\boldsymbol{e}(\varphi) = \cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j}$,

$$\boldsymbol{e}_1(\varphi) = -\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}.$$

试证明：

$$\boldsymbol{e}'(\varphi) = \boldsymbol{e}_1(\varphi), \boldsymbol{e}'_1(\varphi) = -\boldsymbol{e}(\varphi),$$

及

$$\boldsymbol{e}(\varphi) \perp \boldsymbol{e}_1(\varphi).$$

证

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}'(\varphi) &= (\cos\varphi)'\boldsymbol{i} + (\sin\varphi)'\boldsymbol{j}\\ &= -\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}\\ &= \boldsymbol{e}_1(\varphi),\end{aligned}$$

$$e_1'(\varphi) = (-\sin\varphi)'\boldsymbol{i} + (\cos\varphi)'\boldsymbol{j}$$

$$= -\cos\varphi\boldsymbol{i} - \sin\varphi\boldsymbol{j}$$

$$= -\boldsymbol{e}(\varphi),$$

又 $\boldsymbol{e}(\varphi)\cdot\boldsymbol{e}_1(\varphi) = \cos\varphi(-\sin\varphi) + \sin\varphi\cos\varphi = 0,$

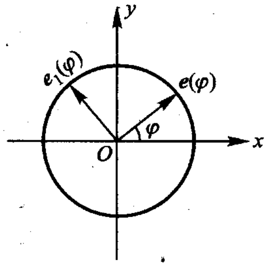


图 1－6

所以 $$\boldsymbol{e}(\varphi) \perp \boldsymbol{e}_1(\varphi).$$

容易看出，$\boldsymbol{e}(\varphi)$为一单位矢量，故其矢端曲线为一单位圆，因此 $\boldsymbol{e}(\varphi)$又叫做**圆函数**；与之相伴出现的 $\boldsymbol{e}_1(\varphi)$，亦为单位矢量，其矢端曲线亦为单位圆，如图 1－6.

引用圆函数，圆柱螺旋线的方程就可简写为

$$\boldsymbol{r}(\theta) = a\boldsymbol{e}(\theta) + b\theta\boldsymbol{k},$$

其导矢 $$\boldsymbol{r}'(\theta) = a\boldsymbol{e}_1(\theta) + b\boldsymbol{k}.$$

2. 导矢的几何意义

如图 1－5，l 为 $\boldsymbol{A}(t)$的矢端曲线，$\dfrac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}$是在 l 的割线 MN 上的一个矢量. 当 $\Delta t>0$ 时，其指向与 $\Delta\boldsymbol{A}$ 一致，系指向对应 t 值增大的一方；当 $\Delta t<0$ 时，其指向与 $\Delta\boldsymbol{A}$ 相反，如图 1－7，但此时 $\Delta\boldsymbol{A}$ 指向对应 t 值减少的一方，从而$\dfrac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}$仍指向对应 t 值增大的一方.

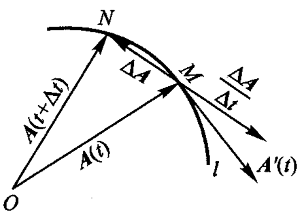


图 1－7

在 $\Delta t\to 0$ 时，由于割线 MN 绕点 M 转动，且以点 M 处的切线为其极限位置. 此时，在割线上的矢量$\dfrac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}$的极限位置，自然也就在此切线上，这就是说，导矢

$$A'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t},$$

当其不为零时,是在点 M 处的切线上,且由上述可知,其方向恒指向对应 t 值增大的一方. 故导矢在几何上为一矢端曲线的**切向矢量**,指向对应 t 值增大的一方.

3. 矢性函数的微分

(1) 微分的概念与几何意义

设有矢性函数 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t)$,我们把

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'(t)\mathrm{d}t \quad (\mathrm{d}t=\Delta t) \tag{2.4}$$

称为矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在 t 处的**微分**.

由于微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 是导矢 $\boldsymbol{A}'(t)$ 与增量 Δt 的乘积,所以它是一个矢量,而且和导矢 $\boldsymbol{A}'(t)$ 一样,也在点 M 处与 $\boldsymbol{A}(t)$ 的矢端曲线 l 相切. 但其指向:当 $\mathrm{d}t>0$ 时,与 $\boldsymbol{A}'(t)$ 的方向一致;而当 $\mathrm{d}t<0$ 时,则与 $\boldsymbol{A}'(t)$ 的方向相反,如图 1-8.

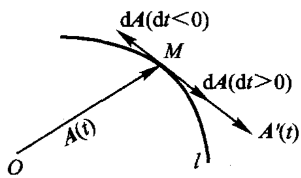


图 1-8

微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 的坐标表示式,可由(2.3)式求得,即

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{A}'(t)\mathrm{d}t\\&=A'_x(t)\mathrm{d}t\boldsymbol{i}+A'_y(t)\mathrm{d}t\boldsymbol{j}+A'_z(t)\mathrm{d}t\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

或

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\mathrm{d}A_x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}A_y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}A_z\boldsymbol{k}. \tag{2.5}$$

例 3 设 $\boldsymbol{r}(\theta)=a\cos\theta\boldsymbol{i}+b\sin\theta\boldsymbol{j}$,求 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 及 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$.

解
$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\mathrm{d}(a\cos\theta)\boldsymbol{i}+\mathrm{d}(b\sin\theta)\boldsymbol{j}\\&=-a\sin\theta\mathrm{d}\theta\boldsymbol{i}+b\cos\theta\mathrm{d}\theta\boldsymbol{j}\end{aligned}$$