

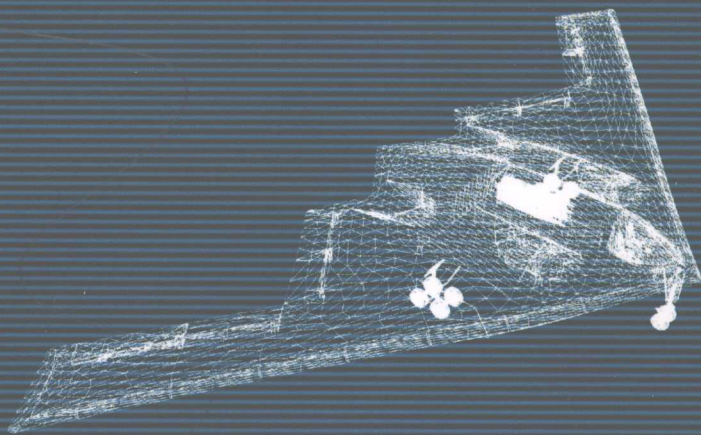
力学



国防
科工委
「十五」
规划
教材

复合材料 结构力学与结构设计

●赵美英 陶梅贞 编著



西北工业大学出版社

北京航空航天大学出版社

哈尔滨工业大学出版社

北京理工大学出版社

哈尔滨工程大学出版社

TB33/12

2007



国防科工委“十五”规划教材·力学

复合材料结构力学与结构设计

赵美英 陶梅贞 编著

西北工业大学出版社

北京航空航天大学出版社

北京理工大学出版社

哈尔滨工业大学出版社

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

全书内容包括复合材料结构力学与飞机复合材料结构设计两部分。复合材料结构力学部分从各向异性体弹性力学基本方程出发,论述了复合材料层合梁、层压板以及层合壳结构在各种不同铺层形式下的弯曲、屈曲问题的一般求解方法,内容由浅入深,注重基础理论。飞机复合材料结构设计部分详细介绍了复合材料结构设计原则和 design 方法,层压板与层压构件设计,连接设计,耐久性/损伤容限设计方法,以期达到指导复合材料飞机结构设计的目的。

全书在内容编排上循序渐进,力求深入浅出,主要作为高等院校本科生及研究生的教学用书,也可作为从事复合材料飞机结构设计与分析工程技术人员和研究人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

复合材料结构力学与结构设计/赵美英,陶梅贞编著. —西安:西北工业大学出版社,2007.12
国防科工委“十五”规划教材. 力学
ISBN 978-7-5612-2158-7

I. 复… II. ①赵…②陶… III. ①复合材料结构力学—高等学校—教材②复合材料—结构设计—高等学校—教材 IV. TB33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 013460 号

复合材料结构力学与结构设计

赵美英 陶梅贞 编著

责任编辑 季强

责任校对 季苏平

西北工业大学出版社出版发行

西安市友谊西路 127 号

市场部电话:029-88493844 88491757

<http://www.nwpu.com>

陕西向阳印务有限公司印制 各地书店经销

开本:787 mm×960 mm 1/16

印张:12 字数:245 千字

2007 年 12 月第 1 版 2007 年 12 月第 1 次印刷

印数:1~3 000 册

ISBN 978-7-5612-2158-7 定价:20.00 元

国防科工委“十五”规划教材编委会

(按姓氏笔画排序)

主任：张华祝

副主任：王泽山 陈懋章 屠森林

编委：王 祁 王文生 王泽山 田 蔚 史仪凯

乔少杰 仲顺安 张华祝 张近乐 张耀春

杨志宏 肖锦清 苏秀华 辛玖林 陈光祜

陈国平 陈懋章 庞思勤 武博祎 金鸿章

贺安之 夏人伟 徐德民 聂 宏 贾宝山

郭黎利 屠森林 崔锐捷 黄文良 葛小春



总 序

国防科技工业是国家战略性产业,是国防现代化的重要工业和技术基础,也是国民经济发展和科学技术现代化的重要推动力量。半个多世纪以来,在党中央、国务院的正确领导和亲切关怀下,国防科技工业广大干部职工在知识的传承、科技的攀登与时代的洗礼中,取得了举世瞩目的辉煌成就;研制、生产了大量武器装备,满足了我军由单一陆军,发展成为包括空军、海军、第二炮兵和其他技术兵种在内的合成军队的需要,特别是在尖端技术方面,成功地掌握了原子弹、氢弹、洲际导弹、人造卫星和核潜艇技术,使我军拥有了一批克敌制胜的高技术武器装备,使我国成为世界上少数几个独立掌握核技术和外层空间技术的国家之一。国防科技工业沿着独立自主、自力更生的发展道路,建立了专业门类基本齐全,科研、试验、生产手段基本配套的国防科技工业体系,奠定了进行国防现代化建设最重要的物质基础;掌握了大量新技术、新工艺,研制了许多新设备、新材料;以“两弹一星”、“神舟”号载人航天为代表的国防尖端技术,大大提高了国家的科技水平和竞争力,使中国在世界高科技领域占有了一席之地。党的十一届三中全会以来,伴随着改革开放的伟大实践,国防科技工业适时地实行战略转移,大量军工技术转向民用,为发展国民经济做出了重要贡献。

国防科技工业是知识密集型产业,国防科技工业发展中的一切问题归根到底都是人才问题。50多年来,国防科技工业培养和造就了一支以“两弹一星”元勋为代表的优秀的科技人才队伍,他们具有强烈的爱国主义思想和艰苦奋斗、无私奉献的精神,勇挑重担,敢于攻关,为攀登国防科技高峰进行了创造性劳动,成为推动我国科技进步的重要力量。面向新



世纪的机遇与挑战,高等院校在培养国防科技人才,产生和传播国防科技新知识、新思想,攻克国防基础科研和高技术研究难题当中,具有不可替代的作用。国防科工委高度重视,积极探索,锐意改革,大力推进国防科技教育特别是高等教育事业的发展。

高等院校国防特色专业教材及专著是国防科技人才培养当中重要的知识载体和教学工具,但受种种客观因素的影响,现有的教材与专著整体上已落后于当今国防科技的发展水平,不适应国防现代化的形势要求,对国防科技高层次人才的培养造成了相当不利的影晌。为尽快改变这种状况,建立起质量上乘、品种齐全、特点突出、适应当代国防科技发展的国防特色专业教材体系,国防科工委全额资助编写、出版 200 种国防特色专业重点教材和专著。为保证教材及专著的质量,在广泛动员全国相关专业领域的专家学者竞投编著工作的基础上,以陈懋章、王泽山、陈一坚院士为代表的 100 多位专家、学者,对经各单位精选的近 550 种教材和专著进行了严格的评审,评选出近 200 种教材和学术专著,覆盖航空宇航科学与技术、控制科学与工程、仪器科学与工程、信息与通信技术、电子科学与技术、力学、材料科学与工程、机械工程、电气工程、兵器科学与技术、船舶与海洋工程、动力机械及工程热物理、光学工程、化学工程与技术、核科学与技术等学科领域。一批长期从事国防特色学科教学和科研工作的两院院士、资深专家和一线教师成为编著者,他们分别来自清华大学、北京航空航天大学、北京理工大学、华北工学院、沈阳航空工业学院、哈尔滨工业大学、哈尔滨工程大学、上海交通大学、南京航空航天大学、南京理工大学、苏州大学、华东船舶工业学院、东华理工学院、电子科技大学、西南交通大学、西北工业大学、西安交通大学等,具有较为广泛的代表性。在全面振兴国防科技工业的伟大事业中,国防特色专业重点教材和专著的出版,将为国防科技创新人才的培养起到积极的促进作用。

党的十六大提出,进入 21 世纪,我国进入了全面建设小康社会、加快推进社会主义现代化的新的发展阶段。全面建设小康社会的宏伟目标,对国防科技工业发展提出了新的更高的要求。推动经济与社会发展,提



升国防实力,需要造就宏大的人才队伍,而教育是奠基的柱石。全面振兴国防科技工业必须始终把发展作为第一要务,落实科教兴国和人才强国战略,推动国防科技工业走新型工业化道路,加快国防科技工业科技创新步伐。国防科技工业为有志青年展示才华,实现志向,提供了缤纷的舞台,希望广大青年学子刻苦学习科学文化知识,树立正确的世界观、人生观、价值观,努力担当起振兴国防科技工业、振兴中华的历史重任,创造出无愧于祖国和人民的业绩。祖国的未来无限美好,国防科技工业的明天将再创辉煌。

张华祝



前 言

复合材料的力学分析和研究大致可分为材料力学和结构力学两大部分,习惯上把复合材料的材料力学部分称为复合材料力学,而把复合材料结构(如板、壳结构)的力学部分称为复合材料结构力学,这两部分在广义上也可称为复合材料力学。本书主要介绍复合材料结构力学与复合材料结构设计的相关内容。

复合材料结构力学,它从简单结构件的角度来分析复合材料结构的力学性能,把层压材料作为分析问题的起点。层压材料的力学性能可从宏观力学方法求出,或为了简便和可靠,可用实验方法直接求出。复合材料结构力学的研究对象为复合材料组成的各种形状的结构元件,如杆、梁、板、壳等元件及由这些元件组成的各式各样的工程结构件,考虑构件的边界条件,计算在已知外载荷作用下构件的应力分布与变形。其主要研究内容包括静力、稳定性分析以及结构优化设计等内容,其中有层压板、夹层结构和壳结构的弯曲、屈曲等问题。在复合材料结构力学中,层压板及壳是被当做具有平均性能的单元体,因此在实质上,它就是非各向同性材料的结构力学。其分析方法以各向异性弹性力学方法为主,同时采用有限元素法、有限差分法、能量变分法等方法,有关内容将分别在本书相应章节内加以介绍。

复合材料结构设计部分以飞机复合材料结构为对象,以大量国内外最新研究成果和资料为基础,以结构设计流程为主线,对结构设计要求、设计原则和设计方法做了全面、系统、完整的阐述,以期达到指导复合材料飞机结构设计的目的。由于复合材料的特点,当设计、分析具体实施时,在很多方面复合材料结构不同于金属结构。铺层设计(含纤维取向设计)和组合件、整体化设计概念,与结构形式相关的细节设计和连接设计,



以及采用低成本工艺技术是复合材料结构设计技术的突出特点。书中对国内外现已应用的复合材料结构设计要求、设计原则和设计方法,结构设计选材与许用值确定,层压板与层压壁板设计,连接设计与修理,开口设计等做了详细介绍;同时对结构验证,结构耐久性/损伤容限设计,疲劳特性分析,湿热、雷电、腐蚀环境的设计防护等也做了扼要介绍。

全书内容力求系统完整、科学严谨、深入浅出、反映技术最新进展。书中图文并茂,以利读者尽快掌握复合材料结构力学的基本理论和复合材料结构设计的基本技术。

本书由赵美英编写了第1至4章,陶梅贞编写了第5至8章。

承蒙中国飞机强度研究所沈真研究员,西北工业大学马祖康教授审阅了全稿,并提出了宝贵意见,在此表示衷心感谢。

对于书中的缺点和错误,敬请读者不吝指出,以便再版时修正。

本书由赵美英编写了第1至4章,陶梅贞编写了第5至8章。

本书由赵美英编写了第1至4章,陶梅贞编写了第5至8章。

本书由赵美英编写了第1至4章,陶梅贞编写了第5至8章。

本书由赵美英编写了第1至4章,陶梅贞编写了第5至8章。

本书由赵美英编写了第1至4章,陶梅贞编写了第5至8章。

本书由赵美英编写了第1至4章,陶梅贞编写了第5至8章。

本书由赵美英编写了第1至4章,陶梅贞编写了第5至8章。

本书由赵美英编写了第1至4章,陶梅贞编写了第5至8章。

本书由赵美英编写了第1至4章,陶梅贞编写了第5至8章。

本书由赵美英编写了第1至4章,陶梅贞编写了第5至8章。

本书由赵美英编写了第1至4章,陶梅贞编写了第5至8章。

本书由赵美英编写了第1至4章,陶梅贞编写了第5至8章。

本书由赵美英编写了第1至4章,陶梅贞编写了第5至8章。

本书由赵美英编写了第1至4章,陶梅贞编写了第5至8章。

本书由赵美英编写了第1至4章,陶梅贞编写了第5至8章。



目 录

101	2.2
301	章 6 第
301	1.6
601	2.6
151	2.6
081	4.6
第 1 章 复合材料结构分析	1
1.1	各向异性体弹性力学基本方程	1
1.2	具有弹性对称性的几种典型情况	5
1.3	弹性力学问题的一般解法	8
第 2 章 复合材料梁	11
2.1	复合材料层压梁	11
2.2	复合材料板梁	16
2.3	复合材料薄壁梁	19
第 3 章 层压薄板的弯曲、屈曲及弯曲有限元分析	25
3.1	层压板的弯曲基本方程	25
3.2	正交各向异性板的弯曲问题	30
3.3	一般层压板的弯曲	32
3.4	夹芯板的弯曲	36
3.5	层压板弯曲有限元分析	40
3.6	层压板的屈曲基本方程	48
3.7	正交各向异性矩形层压平板的屈曲分析	50
3.8	一般矩形层压平板的屈曲分析	58
第 4 章 复合材料层压壳及弯曲有限元分析	61
4.1	壳体内力与变形的关系	61
4.2	层压圆柱壳的基本方程	64
4.3	用工程壳体理论求解圆柱壳的弯曲	67
4.4	层压壳弯曲有限元分析	71
第 5 章 复合材料结构设计总论	78
5.1	概述	78
5.2	复合材料在飞机结构中的应用	79
5.3	复合材料结构设计要求与一般原则	91
5.4	复合材料结构设计、验证方法及特点	96



5.5	结构设计选材与设计许用值	101
第 6 章	层压板与层压构件设计	108
6.1	层压板与层压结构	108
6.2	层压板设计	109
6.3	层压壁板设计	121
6.4	层压件开口区设计	130
第 7 章	复合材料连接设计与修理	136
7.1	机械连接设计	137
7.2	机械连接的静力分析	142
7.3	胶接连接设计	147
7.4	结构的修理	151
第 8 章	复合材料结构耐久性/损伤容限设计	156
8.1	复合材料损伤、断裂、疲劳性能及耐久性/损伤容限设计特点	156
8.2	耐久性/损伤容限设计方法	162
8.3	提高结构耐久性/损伤容限的特殊设计技术	166
8.4	损伤容限分析和疲劳特性概述	169
8.5	湿热、雷电、腐蚀环境的设计考虑	173
参考文献	180



第 1 章 复合材料结构分析

1.1 各向异性体弹性力学基本方程

一、概述

在弹性理论中,各向同性材料的平衡方程、几何方程(即应变-位移关系)、协调方程和本构方程(即应力-应变关系)已为我们所熟知。连续纤维增强复合材料是各向异性的,对于各向异性材料,在应用这些方程分析复合材料的小变形、线弹性问题时只须考虑复合材料的各向异性,修改应力-应变关系即可,而其他各方程都与各向同性材料的相同。

二、各向异性弹性体的应力-应变关系

在各向异性弹性体内取一正六面体单元,尺寸为 dx, dy, dz , 坐标系如图 1.1 所示。

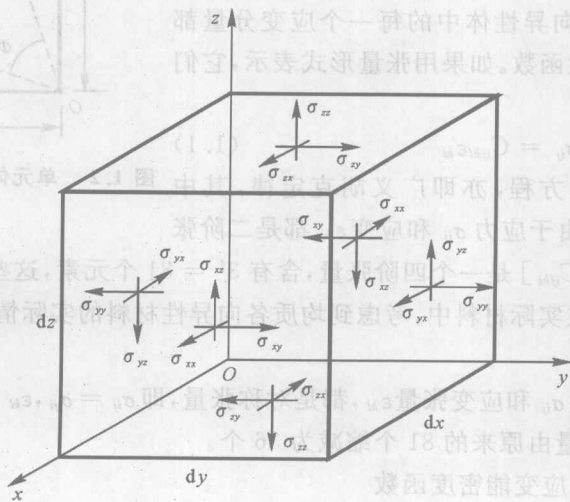


图 1.1 正六面体单元坐标系

在外界因素作用下,单元体的表面上同时存在正应力和剪应力。各应力分量可以统一用张量符号表示为 σ_{ij} ($i, j = x, y, z$ 或 $i, j = 1, 2, 3$)。任一应力分量的前下标表示该应力作用面



的外法线所平行的轴,后下标表示该应力分量所平行的轴。对于外法线沿正轴方向的面称为正面,反之称为负面;当应力分量沿正轴方向时,应力分量为正向,反之应力为负向。应力的正负号与下标的关系规定如下:正面正向或负面负向的应力均为正,否则为负。例如,当应力分量是在外法线沿负轴方向的面上时,沿负轴方向的应力分量为正(如图 1.1 所示应力均为正)。

任何物体在外力作用下处于平衡状态时,物体内部各点之间的距离将发生变化,这就形成了物体的变形。由于物体变形,所取单元体的棱边长度和夹角都将改变,发生相应的应变。应变分量统一用张量符号 ϵ_{ij} 表示。其中线应变 ϵ_{ii} ($i = x, y, z$) 是当正应力 σ_{ii} 作用在单元体上时,单元体中沿下标方向尺寸的变形的度量;剪应变 ϵ_{ij} ($i \neq j$) 正比于在 σ_{ij} 作用下单元体两棱边所夹直角的角度改变量。例如,在单元体的 xOy 平面内(见图 1.2),在剪应力 σ_{xy} 和 σ_{yx} 作用下发生剪应变 γ_{xy} ,即

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \Phi$$

而剪应变张量定义为

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}$$

类似的有

$$\epsilon_{xx} = \frac{\gamma_{xx}}{2}, \quad \epsilon_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2}$$

在一般情况下,各向异性体中的每一个应变分量都是全部应力分量的线性函数。如果用张量形式表示,它们的关系可写为

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1.1)$$

式(1.1)称为本构方程,亦即广义胡克定律,其中 $[C_{ijkl}]$ 称为刚度矩阵。由于应力 σ_{ij} 和应变 ϵ_{kl} 都是二阶张量,故在三维空间中, $[C_{ijkl}]$ 是一个四阶张量,含有 $3^4 = 81$ 个元素,这些元素分别表示一个相应的弹性常数。但是,在实际材料中,考虑到均质各向异性材料的实际情况,可以使 $[C_{ijkl}]$ 得到大大简化。

(1) 由于应力张量 σ_{ij} 和应变张量 ϵ_{kl} , 都是对称张量,即 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$, 所以 $C_{ijkl} = C_{jilk}$ 。于是, $[C_{ijkl}]$ 的独立分量由原来的 81 个缩减为 36 个。

(2) 由于存在弹性应变能密度函数

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$$

且 $\frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_{ij}} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} = \sigma_{ij}$ 故可证明 $C_{ijkl} = C_{klij}$ 。于是,对均质各向异性材料来说, $[C_{ijkl}]$ 的独立分量(即独立的弹性常数)

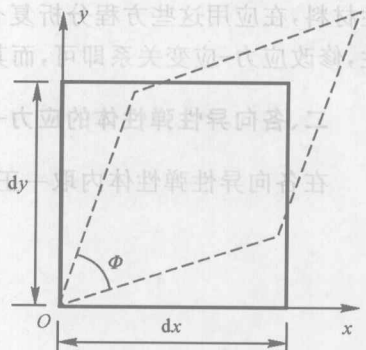


图 1.2 单元体的 xOy 平面内的剪应变



进一步缩减为 21 个。

工程中通常采用简化符号, $C_{ijkl} = C_{mn}$ ($m, n = 1, 2, \dots, 6$), 即下标 $11 = 1, 22 = 2, 33 = 3, 23 = 4, 31 = 5, 12 = 6$ 。于是应力和应变的张量符号同工程简化符号有如下对应关系:

$$\sigma_{11} = \sigma_1, \quad \sigma_{22} = \sigma_2, \quad \sigma_{33} = \sigma_3$$

$$\sigma_{23} = \sigma_4 = \tau_{23}, \quad \sigma_{31} = \sigma_5 = \tau_{31}, \quad \sigma_{12} = \sigma_6 = \tau_{12}$$

$$\epsilon_{11} = \epsilon_1, \quad \epsilon_{22} = \epsilon_2, \quad \epsilon_{33} = \epsilon_3$$

$$2\epsilon_{23} = \epsilon_4 = \gamma_{23}, \quad 2\epsilon_{31} = \epsilon_5 = \gamma_{31}, \quad 2\epsilon_{12} = \epsilon_6 = \gamma_{12}$$

根据弹性常数的对称关系, 可将式(1.1)展开, 并用工程简化符号写为

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & \text{对} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & \text{称} & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

或缩写为

$$[\sigma_i] = [C_{ij}][\epsilon_j] \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (1.2)'$$

这就是工程中常用的用应变表示应力的广义胡克定律表达式。如果将刚度矩阵 $[C_{ij}]$ 求逆, 可得用应力表示应变的另一种形式的广义胡克定律表达式, 即

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & \text{对} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & & & & \text{称} & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

或缩写为

$$[\epsilon_i] = [S_{ij}][\sigma_j] \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (1.3)'$$

式中, $[S_{ij}]$ 称为柔度矩阵, 显然 $[S_{ij}] = [C_{ij}]^{-1}$, 或 $[C_{ij}] = [S_{ij}]^{-1}$ 。

三、弹性应变能

在弹性体受力发生变形的过程中, 外力要做功。与此同时, 弹性体内部储存能量称为弹性应变能。在等温或绝热条件下, 弹性应变能在数值上等于外力功。弹性体中的弹性应变能用 U 表示。单位体积内的弹性应变能用 U_0 表示, 即弹性应变能密度。

根据弹性力学知识, 如果在应力 $(\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy})$ 作用下, 单元体的应变状态从 $(\epsilon_x, \epsilon_y, \dots,$



γ_{xy}) 变为 $(\epsilon_x + d\epsilon_x, \epsilon_y + d\epsilon_y, \dots, \gamma_{xy} + d\gamma_{xy})$, 则在此过程中单位体积内的应变能为

$$dU = \sigma_x d\epsilon_x + \sigma_y d\epsilon_y + \sigma_z d\epsilon_z + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{zx} d\gamma_{zx} + \tau_{xy} d\gamma_{xy} \quad (1.4)$$

在应变从零缓慢地增加到终值 $(\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \gamma_{xy})$ 的整个加载过程对式(1.4)进行积分, 便得到

$$U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \quad (1.5)$$

或写成矩阵形式

$$U_0 = \frac{1}{2} [\sigma_i]^T [\epsilon_i] \quad (1.5)'$$

对于均质各向异性弹性体来说, 材料的弹性性质与坐标位置无关。由于弹性应变能密度是应变分量 $(\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \gamma_{xy})$ 的函数, 且仅与应变的最终值有关。因此可以写成

$$dU_0 = \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_x} d\epsilon_x + \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_y} d\epsilon_y + \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_z} d\epsilon_z + \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{yz}} d\gamma_{yz} + \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{zx}} d\gamma_{zx} + \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xy}} d\gamma_{xy} \quad (1.6)$$

对比式(1.4)与式(1.6)可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_x} &= \sigma_x \\ \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_y} &= \sigma_y \\ \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_z} &= \sigma_z \\ \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{yz}} &= \tau_{yz} \\ \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{zx}} &= \tau_{zx} \\ \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xy}} &= \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

将上式代入广义胡克定律表达式(1.2), 有

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_x} \\ \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_y} \\ \vdots \\ \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xy}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{26} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{61} & C_{62} & \dots & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \vdots \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

如果将上式中的第一式和第二式分别对 ϵ_y 和 ϵ_x 求偏导, 可得

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_y} = C_{12}, \quad \frac{\partial^2 U_0}{\partial \epsilon_y \partial \epsilon_x} = C_{21}$$



由于导数值与微分顺序无关,所以

$$C_{12} = C_{21}$$

同理,可以证明在其余各刚度系数之间也存在类似关系,即

$C_{ij} = C_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6)$
 这表明刚度矩阵 $[C_{ij}]$ 是一个对称矩阵。由于柔度矩阵是刚度矩阵的逆矩阵,所以柔度矩阵 $[S_{ij}]$ 也必是一个对称矩阵。从而证明了本节二中提到的结论,即均质各向异性材料具有 21 个独立的弹性常数。

若将应力-应变关系式(1.2)代入式(1.5)可得

$$U_0 = \frac{1}{2} [\epsilon_i]^T [C_{ij}] [\epsilon_j] \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (1.9)$$

即

$$\begin{aligned} U_0 = & \frac{1}{2} C_{11} \epsilon_x^2 + C_{12} \epsilon_x \epsilon_y + C_{13} \epsilon_x \epsilon_z + C_{14} \epsilon_x \gamma_{yz} + C_{15} \epsilon_x \gamma_{zx} + C_{16} \epsilon_x \gamma_{xy} + \\ & \frac{1}{2} C_{22} \epsilon_y^2 + C_{23} \epsilon_y \epsilon_z + C_{24} \epsilon_y \gamma_{yz} + C_{25} \epsilon_y \gamma_{zx} + C_{26} \epsilon_y \gamma_{xy} + \\ & \frac{1}{2} C_{33} \epsilon_z^2 + C_{34} \epsilon_z \gamma_{yz} + C_{35} \epsilon_z \gamma_{zx} + C_{36} \epsilon_z \gamma_{xy} + \\ & \frac{1}{2} C_{44} \gamma_{yz}^2 + C_{45} \gamma_{yz} \gamma_{zx} + C_{46} \gamma_{yz} \gamma_{xy} + \\ & \frac{1}{2} C_{55} \gamma_{zx}^2 + C_{56} \gamma_{zx} \gamma_{xy} + \\ & \frac{1}{2} C_{66} \gamma_{xy}^2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

同理,若将应力-应变关系式(1.3)代入式(1.5),可得与式(1.9)相似的另一种表达形式,即

$$U_0 = \frac{1}{2} [\sigma_i]^T [S_{ij}] [\sigma_j] \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6)$$

1.2 具有弹性对称性的几种典型情况

在均质弹性体内,若过每一点沿不同的方向都具有不同的弹性特性,则称此弹性体为一般各向异性体,它的独立的弹性系数有 21 个;反之,在均质弹性体内,若过每一点沿不同的方向都具有相同的弹性特性,则此弹性体即为各向同性体,这时独立的弹性系数只有 2 个。事实上,复合材料有各种不同程度的对称性,即存在弹性对称面。所谓弹性对称面,就是指相对于该平面为对称的任意两个方向上的弹性性质都相同。通过利用这种对称性,将会使各向异性材料的独立的弹性系数进一步减少,从而使广义胡克定律的方程式和应变能密度函数的表达式得到简化。

下面分别对几种常用的弹性对称性材料进行讨论。



一、具有一个弹性对称面的情况

这种材料存在一个性能对称的正交平面,假设为 xOy 平面, z 轴与弹性对称面相垂直,如图 1.3(a) 所示。根据弹性对称性,当 z 轴变为相反方向时,如图 1.3(b) 所示。材料的应变能密度表达式应保持不变,但坐标 z 及位移分量 w 均变号,因此,

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

这两个剪应变将变号,而其余应变分量的符号保持不变。要使应变能密度表达式(1.10) 保持不变,显然该式中包括 γ_{yz}, γ_{zx} 的一次幂的各项应当为零,于是可得

$$C_{14} = C_{15} = C_{24} = C_{25} = C_{34} = C_{35} = C_{46} = C_{56} = 0 \quad (1.11)$$

这样,独立的弹性常数减为 13 个。因此,对于垂直于 z 轴的平面为弹性对称面的各向异性体来说,其刚度矩阵 C 简化为

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

柔度矩阵 S 的简化形式与此完全类似。

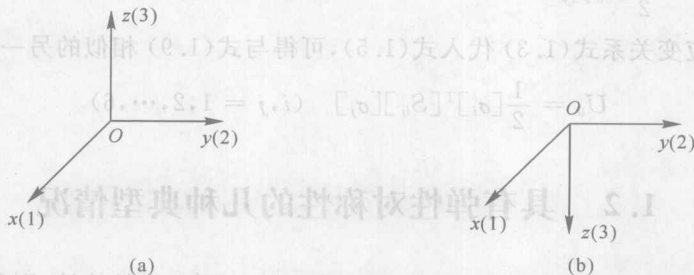


图 1.3 单对称材料的坐标系

二、具有三个相互正交的弹性对称面的情况

上面已证明了当材料存在一个弹性对称面时,它有 13 个独立的弹性系数。随着材料对称性程度的增加,独立的弹性系数的数量将继续减少。如果过均质弹性体的每一点有三个相互正