经济类专科生

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

经济应用数学

■ 主编 叶子祥 徐建华 李湘云

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

经济类专科生

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

经济应用数学

■ 主　编　叶子祥　徐建华　李湘云

■ 副主编　鲍春华　商七一　龙　艳

WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学/叶子祥,徐建华,李湘云主编. —武汉:武汉大学出版社,2008.4

21世纪高等学校数学系列教材

ISBN 978-7-307-06133-0

Ⅰ.经… Ⅱ.①叶… ②徐… ③李… Ⅲ.经济数学—高等学校—教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第015160号

责任编辑:李汉保　　责任校对:刘　欣　　版式设计:詹锦玲

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)

印刷:湖北新华印务股份有限公司

开本:787×1092　1/16　印张:18.625　字数:488千字　插页:1

版次:2008年4月第1版　2008年4月第1次印刷

ISBN 978-7-307-06133-0/F·1129　定价:28.00元

编 委 会

内容简介

本教材是根据国家教育部最新制定的《高职高专教育经济数学基础课程教学基本要求》编写的。全书系统地介绍了一元函数的极限与连续，导数与微分，中值定理及导数的应用，不定积分，定积分，概率论初步，矩阵，向量，线性方程组等。

本书遵循“以应用为目的，以必需够用为度”的原则，强化概念，注重应用，培养能力。在体系编排上按照突出数学课程循序渐进、由浅入深的特点，在内容选取上以面向财经类高等专科学校所设各专业为原则。本书既可以作为财经类高等专科学校各专业的教材，也可以作为财经类成人教育各专业的教材。

序

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学。长期以来，人们在认识世界和改造世界的过程中，数学作为一种精确的语言和一个有力的工具，在人类文明的进步和发展中，甚至在文化的层面上，一直发挥着重要的作用。作为各门科学的重要基础，作为人类文明的重要支柱，数学科学在很多重要的领域中已起到关键性、甚至决定性的作用。数学在当代科技、文化、社会、经济和国防等诸多领域中的特殊地位是不可忽视的。发展数学科学，是推进我国科学研究和技术发展，保障我国在各个重要领域中可持续发展的战略需要。高等学校作为人才培养的摇篮和基地，对大学生的数学教育，是所有的专业教育和文化教育中非常基础、非常重要的一个方面，而教材建设是课程建设的重要内容，是教学思想与教学内容的重要载体，因此显得尤为重要。

为了提高高等学校数学课程教材建设水平，由武汉大学数学与统计学院与武汉大学出版社联合倡议，策划，组建21世纪高等学校数学课程系列教材编委会，在一定范围内，联合多所高校合作编写数学课程系列教材，为高等学校从事数学教学和科研的教师，特别是长期从事教学且具有丰富教学经验的广大教师搭建一个交流和编写数学教材的平台。通过该平台，联合编写教材，交流教学经验，确保教材的编写质量，同时提高教材的编写与出版速度，有利于教材的不断更新，极力打造精品教材。

本着上述指导思想，我们组织编撰出版了这套21世纪高等学校数学课程系列教材。旨在提高高等学校数学课程的教育质量和教材建设水平。

参加21世纪高等学校数学课程系列教材编委会的高校有：武汉大学、华中科技大学、云南大学、云南民族大学、云南师范大学、昆明理工大学、武汉理工大学、湖南师范大学、重庆三峡学院、襄樊学院、华中农业大学、福州大学、长江大学、咸宁学院、中国地质大学、孝感学院、湖北第二师范学院、武汉工业学院、武汉科技学院、武汉科技大学、仰恩大学（福建泉州）、华中师范大学、湖北工业大学等20余所院校。

高等学校数学课程系列教材涵盖面很广，为了便于区分，我们约定在封首上以汉语拼音首写字母缩写注明教材类别，如：数学类本科生教材，注明：SB；理工类本科生教材，注明：LGB；文科与经济类教材，注明：WJ；理工类硕士生教材，注明：LGS，如此等等，以便于读者区分。

武汉大学出版社是中共中央宣传部与国家新闻出版署联合授予的全国优秀出版社之一。在国内有较高的知名度和社会影响力，武汉大学出版社愿尽其所能为国内高校的教学与科研服务。我们愿与各位朋友真诚合作，力争使该系列教材打造成为国内同类教材中的精品教材，为高等教育的发展贡献力量！

21世纪高等学校数学系列教材编委会

2007年7月

前　言

新世纪的到来对我国高等教育提出了新的要求，我国的高等教育也面临进一步发展的契机，高等职业教育是加速发展的高等教育的一个重要组成部分。为了适应高职高专教育发展的需要，急需编写适用的、具有特色的教材。为此，2007 年 7 月在武汉大学出版社召开了 21 世纪高等学校数学系列教材编写会，并审定了编写大纲，本教材正是按这一大纲编写的。本教材适用于三年制高职高专经济和管理类专业。教材内容包括一元函数微积分、线性代数及概率论初步。

在编写教材的过程中，我们参考了国内外流行的相关教材，力图吸收它们的优点，编写出既反映本学科特点又便于师生使用的高质量的 21 世纪规范教材。我们主要考虑了下述几个问题：

其一，本书作为一门数学基础课教材，应尽量保持数学学科的科学性和系统性，同时努力使“以应用为目的，以够用、管用、会用为度”的原则在教材中有所体现。因此，本教材不追求理论体系的完整性。许多概念、定理尽量采用学生容易理解的方式叙述，并选配适量的例题、习题，使学生能掌握基本理论和方法。本教材还配有配套的练习册，作为本教材的辅助材料。

其二，本课程是三年制高职高专经济和管理类专业的必修基础课，其内容多是经典的内容和方法。掌握这些内容是学习现代经济和管理理论的基础。因此，本教材凸显了数学与文化的联系，凸显了数学的应用性，介绍了一定数量的经济应用的内容，使读者了解并逐步学会运用数学方法解决实际问题。

其三，本教材除精选了经管学生必须掌握的经济数学的内容之外，还体现数学现代化教学手段的应用，从而开拓了经济应用数学教学的新概念和新举措。抽象的数学内容与现代化教学手段的结合将使大学一年级新生能够非孤立的、更直观的学好他们的大学第一课——经济应用数学。

本教材由叶子祥、徐建华、李湘云主编，鲍春华、商七一、龙艳副主编，由武汉科技学院东湖校区公共课部数学教研室的全体教师共同编写。

在本教材的编写过程中，武汉科技学院东湖校区教务处及公共课部的领导给予了热情的支持，华中师范大学的何穗教授及华中理工大学的蹇明教授对教材书稿进行了认真详尽的审阅，提出了许多宝贵意见。武汉大学出版社的李汉保编辑为本教材的出版付出了辛勤的劳动，在此表示衷心感谢！

因受经验和水平所限，本教材中不妥之处实属难免，敬请读者提出批评和建议，以期再版时修正。

作　者

2007 年 12 月

目　录

第 1 章　极限与连续

§1.1　函数的概念与性质

1.1.1　函数的概念

1. 函数的定义

定义 1.1　设有两个变量 x 和 y，如果 x 在其变化范围内每取一个确定的值，按照某种对应规律 f，都有惟一确定的 y 值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**. 记做 $y=f(x)$. 其中，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**或自变量的**函数**. x 的取值范围 D 叫做函数 $f(x)$ 的定义域，与 x 相对应的 y 值称为函数值，记做 $y\,|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$，函数值的集合

$$Y=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数 $f(x)$ 的值域.

例如　生产某种产品的固定成本为 3 200 元，每生产一件产品，成本增加 30 元，那么该种产品的总成本 y 与产量 x 之间的函数关系可以表述为

$$y=3\ 200+30x$$

该函数的定义域 $D=[0,+\infty)$；值域是$[3\ 200,+\infty)$；

当产量为 50 件时，总成本

$$y\,|_{x=50}=3\ 200+30\times 50=4\ 700(\text{元}).$$

例 1　已知 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$，求定义域 D，函数值 $f(0)$，$f(-2)$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$和 $f(x+1)$.

解　要使表达式$\dfrac{x+1}{x-1}$有意义，必须 $x-1\neq 0$，即 $x\neq 1$，所以，$f(x)$ 的定义域 $D=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$；

$$f(0)=\frac{0+1}{0-1}=-1;\ f(-2)=\frac{-2+1}{-2-1}=\frac{1}{3};$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{\dfrac{1}{a}+1}{\dfrac{1}{a}-1}=\frac{1+a}{1-a};\ f(x+1)=\frac{x+1+1}{x+1-1}=\frac{x+2}{x}.$$

2. 确定函数的两要素

函数的定义反映了自变量 x 与因变量 y 之间的依赖关系，这种依赖关系涉及定义域、对应规则和值域. 显然，只要定义域和对应规则确定，则值域也就确定了. 因此，函数的定义域和对应规则是确定函数的两个要素. 两个函数，只要它们的定义域和对应规则相同，就是相

同的函数，与用什么字母和符号表示自变量和因变量无关.

例如 $y=x^2$ 与 $y=t^2$ 就是相同的函数.

例 2 判断下列各对函数是否相同

(1) $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$;

(2) $y=x$ 与 $y'=\sqrt{x^2}$.

解 (1) $y=x$ 的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$;

$y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域是 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

它们的定义域不同，所以这两个函数不是相同的函数. 如图 1-1(a),(b) 所示.

(2) 这两个函数的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，但它们的对应规则不同，当 $x<0$ 时，$y=x$ 对应的函数值 $y<0$；而 $y=\sqrt{x^2}$ 对应的函数值 $y>0$，所以它们也不是相同的函数. 如图 1-1(a),(c) 所示.

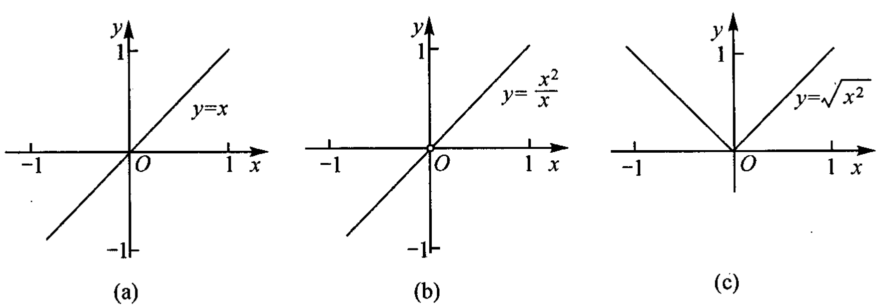

图 1-1

3. 函数的表示法

常见的函数的表示法有三种：解析法、表格法和图像法. 下面各分别举例.

例 3 $y=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{x}$.

这是用解析法表示的函数关系，该函数的定义域是

$$D=[-1,0)\cup(0,1]$$

例 4 某商店一年中各月份毛线的销售量(单位:10^2kg) 如表 1-1 所示.

表 1-1

月份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售量 y	81	84	45	45	9	5	6	15	94	161	144	123

这是用表格法表示的函数关系，该函数的定义域是

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

例 5 图 1-2 是某地区春季一昼夜的气温变化. 时间 t 与温度 T 之间的函数关系由图

1-2 中曲线表示出来.

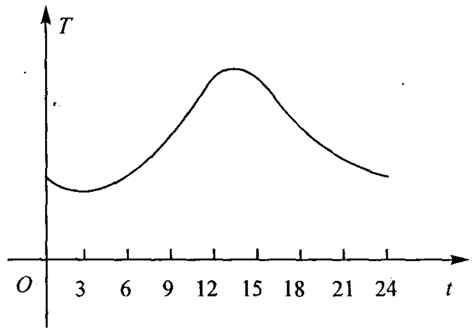

图 1-2

4. 分段函数

有些函数,对于定义域内的自变量 x 的不同的值,不能用一个统一的数学解析式表示出来,而要用两个或两个以上的解析式来表示.这种由两个或两个以上的解析式表示的函数,称为分段函数.

例 6　由北京去上海乘坐火车,按铁路部门的相关规定,成年人每人携带的行李重量在 20kg 内免费,若超重部分在 5kg 之内,收行李费 12 元,若超重部分在 5～50kg 时,收行李费 120 元. 以 q(单位:kg) 表示成年人一人携带的行李重量,R(单位:元) 表示所收行李运费,则有

$$R=\begin{cases}0, & 0\leqslant q<20\\ 12, & 20\leqslant q<25.\\ 120, & 25\leqslant q\leqslant 70\end{cases}$$

例 7　设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x-1, & x>0\end{cases}$. 求定义域和函数值 $f(0)$、$f(-1)$、$f(2)$,并作出图像.

解　函数 $f(x)$ 的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$

$$f(0)=0,\quad f(-1)=-1+1=0,\quad f(2)=2-1=1$$

其图像如图 1-3 所示.

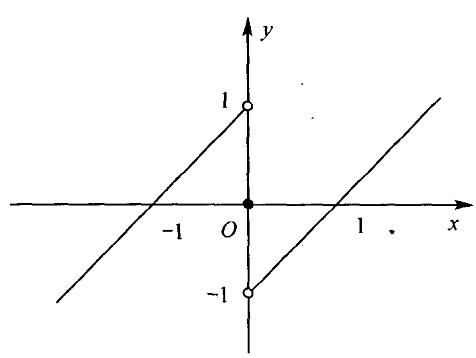

图 1-3

5. 隐函数

有些函数是由自变量的解析式表示出来的，这类函数称为显函数，常以 $y=f(x)$ 表示，如 $y=x^2+1$；$S=\pi r^2$ 等. 而有些函数关系由方程 $F(x,y)=0$ 确定，如 $x^2+y^2=a^2$；$xy=\sin(x+y)$ 等，在这类函数中，x 与 y 的对应关系隐含在方程中，通常称为隐函数.

1.1.2 函数的性质

1. 函数的奇偶性

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 在 $(-a,a)$ 内有定义，对任意的 $x\in(-a,a)$，如果有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数. 如果 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数，则称 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

偶函数的图像关于 Oy 轴对称；奇函数的图像关于原点 O 对称.

例 8 判断下列函数的奇偶性

(1) $f(x)=3x^2+4x^4$；(2) $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{x}$；(3) $f(x)=x^2-x$.

解 (1) 因为 $f(-x)=3(-x)^2+4(-x)^4=3x^2+4x^4=f(x)$，所以 $f(x)=3x^2+4x^4$ 为偶函数.

(2) 因为 $f(-x)=\sin(-x)+\left(\dfrac{1}{-x}\right)=-\sin x-\dfrac{1}{x}=-\left(\sin x+\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$，所以 $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{x}$ 为奇函数.

(3) 因为 $f(-x)=(-x)^2-(-x)=x^2+x$，所以 $f(x)=x^2-x$ 是非奇非偶函数.

2. 函数的单调性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，如果 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调增加的；如果 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调减少的.

单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数，相应地，区间 (a,b) 称为函数的单调区间.

单调增加的函数的图像是随着 x 的增加而上升的曲线；单调减少的函数的图像是随着 x 的增加而下降的曲线. 如图 1-4 所示.

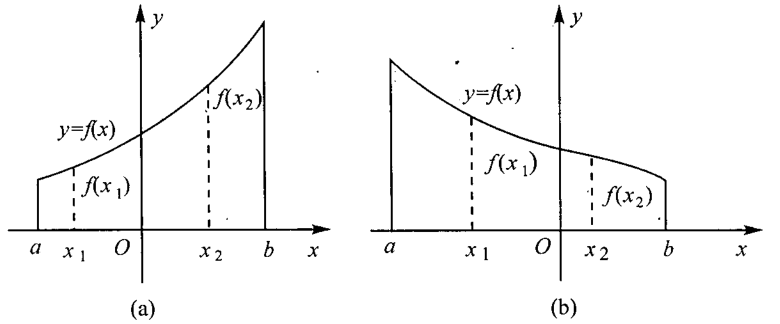

图 1-4

例 9　讨论函数 $y = 2x^2 + 1$ 的单调性.

解　$y = 2x^2 + 1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$；

对任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$，有

$f(x_1) - f(x_2) = (2x_1^2 + 1) - (2x_2^2 + 1) = 2(x_1^2 - x_2^2) = 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$

在 $(-\infty, 0)$ 内，如果 $x_1 < x_2$，则有 $f(x_1) - f(x_2) > 0$，即 $f(x_1) > f(x_2)$，因此 $y = 2x^2 + 1$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少.

在 $(0, +\infty)$ 内，如果 $x_1 < x_2$，则有 $f(x_1) - f(x_2) < 0$，即 $f(x_1) < f(x_2)$，因此 $y = 2x^2 + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

由以上讨论知，$y = 2x^2 + 1$ 在其定义域上不是单调函数，但在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 内分别是单调的.

3. 函数的周期性

定义 1.4　对于定义在数集 D 上的函数 $y = f(x)$，如果存在正数 T，使得对于 D 中的任一 x，$x + T \in D$，且有 $f(x + T) = f(x)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，且将最小正数 T 称为函数 $y = f(x)$ 的一个周期.

由定义 1.4 可知，对于以 T 为周期的函数，自变量每增加 T，函数值重复出现一次，因此，只需研究一个周期内函数的性态，便可以推知函数在整个定义域上的性态.

我们常见的三角函数 $y = \sin x$，$y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的函数；$y = \tan x$；$y = \cot x$ 都是以 π 为周期的函数.

4. 函数的有界性

定义 1.5　设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义，如果存在一个正数 M，使得对所有的 $x \in (a, b)$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内有界；如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内是无界的.

三点说明：

(1) 如图 1-5 所示，函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内有界是指函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内的一段图像被限制在 $y = -M$ 和 $y = M$ 两条直线之间.

(2) 当函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内有界时，正数 M 并不惟一. 如 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界，$|\sin x| \leqslant 1$，但也可以取 $M = 2$ 即 $|\sin x| < 2$，事实上，任何大于 1 的数都可以取做 M.

(3) 函数的有界性依赖于区间，如 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内有界，但在 $(0,1)$ 内却是无界的.

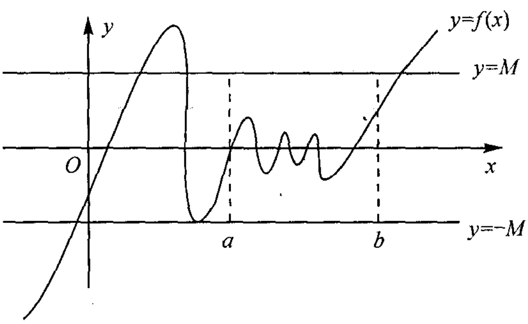

图 1-5

1.1.3 反函数，复合函数，初等函数

1. 反函数

定义 1.6 设 $y=f(x)$ 是 x 的函数，值域是 Y，如果对于 Y 中的每一个 y 值，存在惟一的且满足 $y=f(x)$ 的 x 值与之对应，则得到一个定义在 Y 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数 $x=\varphi(y)$，我们称其为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上，我们总是以 x 表示自变量，以 y 表示自变量的函数，所以通常把 $y=f(x)$ 的反函数改写为 $y=f^{-1}(x)$.

显然，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数.

可以证明，在同一个坐标系中，$y=f(x)$ 的图像与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-6 所示.

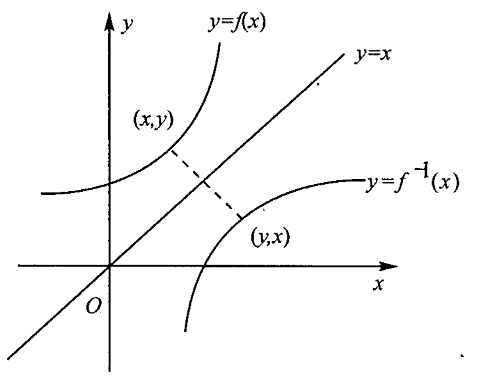

图 1-6

例 10 求 $y=2x-1$ 的反函数，并作出图像.

解 由 $y=2x-1$，得 $x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$，将 x 与 y 互换，得：$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，这就是 $y=2x-1$ 的反函数，如图 1-7 所示.

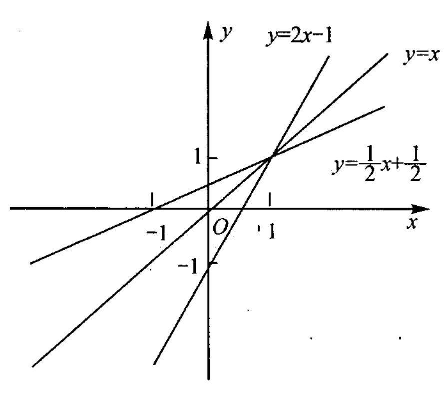

图 1-7