编委会主任　王玉文

高等院校教师教育数学系列教材

高等几何

主　编　李修昌

副主编　宋建华　崔仁浩

哈爾濱工業大學出版社

高等院校教师教育数学系列教材

高等几何

主　编　李修昌
副主编　宋建华　崔仁浩

哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

本书是按高等师范院校《高等几何》教学大纲的要求编写而成的。全书共分为8章，其主要内容有：仿射变换与仿射坐标，射影平面，射影坐标系和射影变换，二次曲线的射影性质，二次曲线的仿射性质，仿射几何与射影几何基础，欧氏几何与非欧几何概要，几何基础简介。

本书可作为高等师范院校数学专业的教材或教学参考书，也可作为教育学院的教材或自学使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等几何/李修昌主编．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2008.6

(高等院校教师教育数学系列教材)

ISBN 978-7-5603-2680-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．李…　Ⅲ．高等几何-师资培训-教材
Ⅳ．018

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第048532号

策划编辑　杜　燕
责任编辑　费佳明
封面设计　卞秉利
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张10.5　字数186千字
版　　次　2008年6月第1版　2008年6月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2680-1
印　　数　1~3 000册
定　　价　20.00元

序

普通高中课程改革是基础教育改革的重要组成部分。随着高中数学课程改革的推进,将有越来越多的一线数学教师、数学教研员和未来的数学教师面对新的数学课程。传统的高等师范院校的数学课程通常很少顾及到高中数学的内容与方法。但是2004年启动的普通高中课程改革的实验,是在《普通高中数学课程标准(实验)》的基础上进行的。无论是高中数学必修课程还是高中数学选修课程,都有现代数学的内容、思想、方法及数学史的渗透。为了适应高中数学课程改革的需要,作为培养高中未来数学教师的高等师范院校,或综合大学的师范学院的数学与应用数学专业(师范类),其数学课程必须适应这种改革。为此,黑龙江省高师数学会教育研究会继《高师院校数学系列教材》之后,在教学实践基础上,又组织编写了这套《高等院校教师教育教学系列教材》。

这套系列教材包括基础数学、应用数学、概率与统计、数学史、数学教育等专业的本科教材。其中有《近世代数》、《高等几何》、《数学分析选讲》、《简明数学史》、《高等代数选讲》、《解析几何》、《实变函数》、《简明数学逻辑》、《现代数学思想概论》、《简明概率与统计》、《数学建模》、《通信编码与信息安全》等。在这套系列教材中,力求将新的普通高中数学课程标准中规定的选修课中现代数学内容、方法纳入相应教材的正文或附录中。这套系列教材可以作为高等院校数学教师教育的本科数学教材,其中部分教材可供教育硕士选作教材和学科教学(数学)的参考书。

由于编著者的水平有限,加之面对高中数学新课程标准编写本科数学教材是一种新的尝试,丛书中会有不妥或疏漏之处,恳切地希望广大教师和读者提出建议和批评。让我们一起携手,为建立适应高中数学新课程标准的教师教育本科数学课程标准体系作出贡献!

王玉文

2007年6月

前　言

高等几何是研究图形在射影变换下不变性质的学科。它是高等师范院校数学专业的重要的基础课程之一，它与初等几何、解析几何、高等代数等课程有着紧密的联系，它对未来中学数学教师在几何基础的培养、观点和认识的提高、思维的灵活性、方法的多样性等方面都起着重要的作用，从而有助于中学数学教学质量的提高和科研能力的培养。本书可作为高等院校本科数学专业的高等几何教材，本书的宗旨是简要地介绍射影几何的基础知识、基本理论和基本方法，希望帮助读者发展几何空间概念，明确射影几何与仿射几何、欧氏几何的内在联系和根本区别，提高解决几何问题的能力，为进一步学好现代数学打好基础。

本书的取材力求精炼，主干突出，深入浅出，简明易懂。例题和习题丰富而又有代表性。在论述射影几何的基本理论时，综合法与代数法兼用，并以代数法为主。教程中内容尽量从几何的概念出发，运用生动的几何直观开发智力，运用代数这个有力工具，作为简化思维过程加以高度概括总结的武器，确认空间形式的本质。这样就做到了既注重培养和发展抽象思维的能力，同时也注意保持几何学直观的特点。

联系和指导中学数学教学，是本书的着重点之一。在前三章的最后都安排了“初等几何中的应用”专节，旨在培养学生以较高的起点理解中学几何教材和处理初等几何问题的能力。当然，这些内容多半是学生已接触过的知识，也可以作为学生自学阅读的材料。

全书共分为 8 章，前面 6 章内容是基础教学内容，最后 2 章一般可以不作要求，为选学内容。在前 6 章中，主要内容是仿射变换与仿射坐标，射影平面，射影坐标系和射影变换，二次曲线的射影性质和仿射性质及相关理论。交比是基本射影不变量，在射影几何学中有着重要的地位，因而本书作了较详细的介绍。读者在按章节理解各项内容以外，还要注重整体理论，这样才能够对高等几何有较深入的理解，而且有利于掌握和记忆。

本书在编写过程中多次得到我们的导师王玉文教授的指导和帮助，在此表

示衷心感谢！在书稿的打印和校对工作中，哈尔滨师范大学数学系学生王凤曲、齐春杰、赵越等同学给了我们很大的帮助，在此一并感谢！

由于编者水平和时间有限，书中定有不妥之处，敬请读者提出宝贵意见，以便改正。

作　者

2008 年 5 月

目　录

第 1 章　仿射变换与仿射坐标

本章内容主要是介绍仿射变换的概念，研究仿射变换的性质，并在仿射坐标系下用代数法研究仿射变换后的不变量和不变性质，最后，通过具体问题研究仿射变换在初等几何中的应用。

1.1　平行射影与仿射变换

定义 1.1　在一平面上设有两条直线 a 和 a'，l 为平面上与 a，a' 都不平行的另一条直线，通过直线 a 上各点 $A, B, C, \cdots$ 分别作直线 l 的平行线，交 a' 于点 $A', B', C', \cdots$，这样便得到了直线 a 上的点到 a' 上点的一个一一对应，称为平行射影或透视仿射对应（图 1.1）。记这个平行射影为 φ，则有 $A' = \varphi(A)$，$B' = \varphi(B)$，$\cdots$。

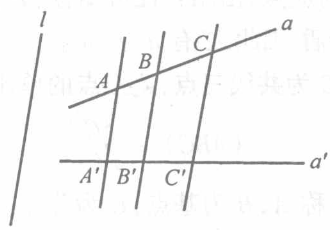

图 1.1

很明显，平行射影和直线 l 的方向有关，方向改变，就得出另外的平行射影。

如果直线 a 和 a' 相交，则交点是平行射影下的自对应点或称为不变点。

类似可得，空间两平面 π 和 π' 间的平行射影（图 1.2）。

如果平面 π 和 π' 相交于直线 n，则 n 上的每一个点都是平行射影下的自对应点，称 n 为自对应直线。

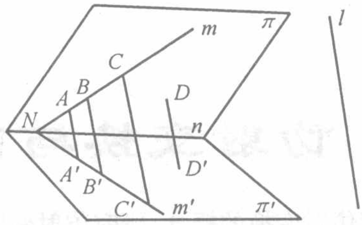

图 1.2

透视仿射对应的基本性质:

(1) 同素性。即透视仿射对应使点对应点,直线对应直线。

(2) 结合性。如图 1.2 所示,若 A,B,C 在直线 m 上,经过透视仿射对应后,其对应点 A',B',C' 在对应直线 m' 上,即透视仿射对应保持点和直线的结合关系。

(3) 平行性。即若有直线 a,b 在透视仿射对应下对应直线为 a',b',如果 $a\parallel b$,则有 $a'\parallel b'$。

同素性和结合性显然成立,下面只证平行性。

证明:设 a,b 为平面 π 内的两条直线,且 $a\parallel b$,a',b' 是平面 π' 内在某一平行射影 φ 下的对应直线。只需证 $a'\parallel b'$。假设 a' 与 b' 不平行而相交于一点 P',且设 P 为平面 π 中 P' 的对应点,由结合性可知,点 P 应既在直线 a 上又在直线 b 上,即 a,b 相交而不平行矛盾。因此,必有 $a'\parallel b'$。

定义 1.2　设 A,B,C 为共线三点,这三点的单比 (ABC) 定义为

$$(ABC)=\frac{AC}{BC}$$

其中 AC,BC 是有向线段,称 A,B 为基点,C 为分点。

显然有,① 当 C 在 A,B 之间时,$(ABC)<0$;② 当 C 在线段 AB 的外部时,$(ABC)>0$;③ 当 C 与 A 重合时,$(ABC)=0$;④ 当 C 与 B 重合时,(ABC) 不存在;⑤ 当 C 为线段 AB 的中点时,$(ABC)=-1$。

如果已知 A,B 两点,且 (ABC) 为定值时,则 C 在直线 AB 上的位置唯一确定。

定理 1.1　平行射影(透视仿射对应)保持共线三点的单比不变。

证明　如图 1.2 所示,平面 π 内的共线三点 A,B,C,经过平行射影后对应点分别为 π' 内的共线三点 A',B',C'。由于 AA',BB',CC' 都平行于直线 l,则有

$AA' \parallel BB' \parallel CC'$，所以

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'}$$

即

$$(ABC)=(A'B'C')$$

定义 1.3　设同一平面内有 n 条直线 $a_1,a_2,\cdots,a_n$（图 1.3），$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}$ 顺次表示 a_1 到 a_2，a_2 到 a_3，$\cdots$，a_{n-1} 到 a_n 的透视仿射对应。经过这一串透视仿射对应，使 a_1 上的点与 a_n 上的点建立了一一对应，这个对应称为 a_1 到 a_n 的仿射对应。若记为 φ，则有 $\varphi=\varphi_{n-1}\varphi_{n-2}\cdots\varphi_2\varphi_1$。

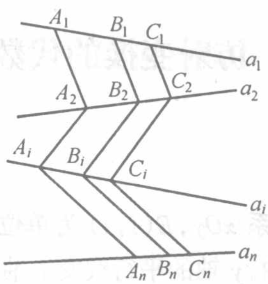

图 1.3

特别地，当 a_1 与 a_n 重合时，则 a_1 到 a_n 的仿射对应叫做直线 a_1 到自身的仿射变换。

类似可得两平面间的仿射对应（变换）（图 1.4）。

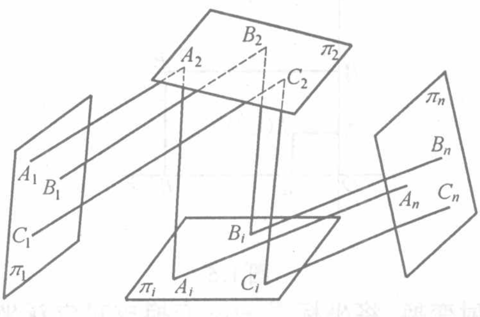

图 1.4

仿射对应是由有限次透视仿射对应组成的，所以仿射对应是透视仿射对应链，透视仿射对应是最简单的仿射对应。而一个仿射对应是否为透视仿射对应，

只需看两个对应点的连线是否都平行。

由于仿射对应变换可以理解为一个透视仿射对应链，所以不难证明仿射对应（变换）的下列性质：

(1) 保持同素性和结合性；

(2) 保持共线三点的单比不变；

(3) 保持直线的平行性。

定义 1.4　若两个平面间（平面到自身）的一个点对应（变换）保持同素性，结合性和共线三点的单比，则这个点对应（变换）称为仿射对应（变换）。

在这个定义下，可以证明仿射对应（变换）保持两直线的平行性。

1.2　仿射变换的代数表示

1.2.1　仿射坐标系

设平面内一笛卡儿坐标系 xOy，$E(1,1)$ 为单位点（图 1.5），及平面上任一点 $P(x,y)$。过 E，P 分别作 x 轴，y 轴的平行线交 y 轴和 x 轴于 E_y，E_x，P_y，P_x，则有

$$x = \frac{OP_x}{OE_x} = \frac{P_xO}{E_xO} = (P_xE_xO)$$

$$y = \frac{OP_y}{OE_y} = \frac{P_yO}{E_yO} = (P_yE_yO)$$

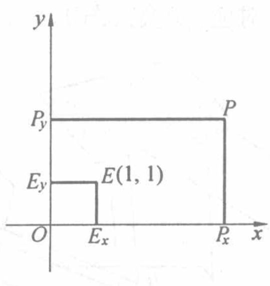

图 1.5

设 T 是一个仿射变换，将坐标系 xOy 变换成对应新坐标系 $x'O'y'$，E，E_x，E_y，P，P_x，P_y 的对应点顺次为 E'，$E'_{x'}$，$E'_{y'}$，P'，$P'_{x'}$，$P'_{y'}$。由于在仿射变换 T 下保持平行性不变，则四边形 $O'E'_{x'}E'E'_{y'}$ 和 $O'P'_{x'}P'P'_{y'}$ 均为平行四边形（图 1.6）。

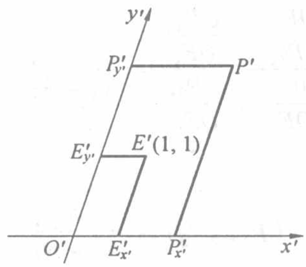

图 1.6

取 E' 为新坐标系下的单位点(1,1)。设 P' 在坐标系 $x'O'y'$ 下坐标为(x', y')。则同样有

$$x' = \frac{O'P'_{x'}}{O'E'_{x'}} = (P'_{x'}E'_{x'}O')$$

$$y' = \frac{O'P'_{y'}}{O'E'_{y'}} = (P'_{y'}E'_{y'}O')$$

因为仿射变换 T 保持单比不变,所以有 $x' = x, y' = y$。新坐标系 $x'O'y'$ 的特点是两个单位向量 $\overrightarrow{O'E'_{x'}}$ 与 $\overrightarrow{OE'_{y'}}$ 不一定垂直,但不共线,且它们的长度不一定相等。我们把笛卡儿坐标系 xOy 在仿射变换下所得的新的坐标系 $x'O'y'$ 称为仿射坐标系。P' 在新坐标系 $x'O'y'$ 下的坐标(x', y')称为 P' 的仿射坐标,记为 $P'(x', y')$。仿射坐标系是笛卡儿坐标系的推广,而笛卡儿坐标系是仿射坐标系的特殊情况。

用点的仿射坐标与笛卡儿坐标相似,可推得一些相关结论。如果平面内两点 P_1, P_2 仿射坐标分别为 (x_1, y_1), (x_2, y_2), 则线段 P_1P_2 的中点坐标必为 $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$,直线 P_1P_2 的方程可表示为 $Ax + By + C = 0$ 的形式。

定理 2.1　在仿射坐标系下,已知三点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ 则

$$(P_1P_2P_3) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2}$$

证明　如图 1.7 所示,分别经 P_i 作 P_iP_{ix} 与 y 轴平行,交 x 轴于 P_{ix}($i = 1, 2, 3$) 则有

$$(P_1P_2P_3) = (P_{1x}P_{2x}P_{3x}) = \frac{P_{1x}P_{3x}}{P_{2x}P_{3x}} = \frac{OP_{3x} - OP_{1x}}{OP_{3x} - OP_{2x}} =$$

$$\frac{\dfrac{OP_{3x}}{OE_x}-\dfrac{OP_{1x}}{OE_x}}{\dfrac{OP_{3x}}{OE_x}-\dfrac{OP_{2x}}{OE_x}}=\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}$$

同理可证

$$(P_1P_2P_3)=\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}$$

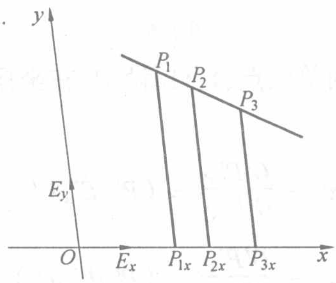

图 1.7

定理 2.2 在仿射坐标系下，已知不同两点 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2)$，则直线 P_1P_2 的方程为

$$\frac{x-x_1}{x-x_2}=\frac{y-y_1}{y-y_2}$$

证明 设 $P(x,y)$ 为直线 P_1P_2 上任意一点，则由定理 2.1 可得

$$\frac{x-x_1}{x-x_2}=\frac{y-y_1}{y-y_2}=(P_1P_2P)$$

整理后得 $Ax+By+C=0$，其中 A,B,C 是关于 $x_i,y_i(i=1,2)$ 的常数，且有 A，B 不全为零，否则 P_1 与 P_2 重合与已知矛盾。

反之易得，满足方程$\dfrac{x-x_1}{x-x_2}=\dfrac{y-y_1}{y-y_2}$的 x,y 所对应的点 $P(x,y)$ 也一定在直线 P_1P_2 上，所以，在仿射坐标系下，直线的方程为 $Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq 0)$。反之，方程 $Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq 0)$ 表示的是一条直线，称方程 $Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq 0)$ 为直线的一般方程。方程$\dfrac{x-x_1}{x-x_2}=\dfrac{y-y_1}{y-y_2}$称为直线的两点式方程。在平面内的仿射坐标系还可以有直线的向量式参数方程 $\vec{r}=\vec{r_0}+t$

$\vec{v}$;坐标式参数方程$\begin{cases} x = x_0 + tX \\ y = y_0 + tY \end{cases}$;标准方程$\dfrac{x - x_0}{X} = \dfrac{y - y_0}{Y}$等,在这里不加详细叙述。但因为二直线交角在仿射变换下一般要改变,因而在仿射坐标系中不能有与直线斜率有关的方程。

例 1　已知过 $P_1(-1, -2)$,$P_2(2,3)$ 两点的直线交直线 $x + 3y - 5 = 0$ 于点 P,求(P_1P_2P)的值。

解　〈方法一〉直线 P_1P_2 的方程为

$$\frac{x + 1}{x - 2} = \frac{y + 2}{y - 3}$$

即

$$5x - 3y - 1 = 0$$

由

$$\begin{cases} 5x - 3y - 1 = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

即点 P 坐标为$\left(1, \dfrac{4}{3}\right)$,则有

$$(P_1P_2P) = \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{1 + 1}{1 - 2} = -2$$

〈方法二〉设 P 的坐标为(x, y),$(P_1P_2P) = \lambda$ 则

$$\lambda = \frac{x + 1}{x - 2} = \frac{y + 2}{y - 3}$$

解得

$$x = \frac{-1 - 2\lambda}{1 - \lambda}$$

$$y = \frac{-2 - 3\lambda}{1 - \lambda}$$

将 $P\left(\dfrac{-1 - 2\lambda}{1 - \lambda}, \dfrac{-2 - 3\lambda}{1 - \lambda}\right)$代入方程 $x + 3y - 5 = 0$,得 $\lambda = -2$。
所以有$(P_1P_2P) = -2$。