全国高等农林院校“十一五”规划教材

线性代数

XIANXING DAISHU

陈亚波 主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

线性代数

陈亚波　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/陈亚波主编．—北京：中国农业出版社，2007.8

全国高等农林院校“十一五”规划教材

ISBN 978-7-109-11825-6

Ⅰ．线…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．线性代数-高等学校-教材　Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 107182 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）

（邮政编码 100026）

责任编辑　朱　雷

北京智力达印刷有限公司印刷　　新华书店北京发行所发行

2007 年 8 月第 1 版　　2007 年 8 月北京第 1 次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　　印张：10

字数：172 千字

定价：15.50 元

内容简介

本教材是全国高等农林院校“十一五”规划教材，是综合多所院校教学经验总结的成果.

本教材共有六章，基本内容包括矩阵、方阵的行列式及可逆性、向量、线性方程组、矩阵的对角化及二次型和线性规划问题等，每章配有习题供复习提高. 并在附录中配有相关的数学试验和习题参考答案.

本教材突出线性代数的基本思想和方法，注重整体结构的完善，注重各部分知识之间的联系. 重实际应用，轻理论推导.

本书可供高等农林院校本科教学作为教材使用，也可作为非数学专业学生考研基础复习用书.

编 写 人 员 名 单

主　编　陈亚波

副主编　邹锐标　温芝元　周铁军　刘勉声

参　编　李小平　刘月华　周玉元　周建军

审　稿　彭振赟

前　　言

进入21世纪以来，我国的高等教育有了突飞猛进的发展，教材建设也取得了长足的进步。特别是随着计算机科学与技术的发展以及数学软件的普及，对大学数学教材提出了更新更严格的要求，正是在这样一种形势下，我们根据“高等农林教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”于2005年申报了“全国高等农林院校‘十一五’规划教材”——《线性代数》，并获得通过。

这本教材是我们在总结多年本科数学教学经验、探索本科数学教学发展动向、分析国内外同类教材发展趋势的基础上进行编写的，并在湖南农业大学05级和06级学生中进行了教学试验，在试用两轮的基础上，又征求多方意见，反复修改仔细推敲，于2007年4月底定稿。

本教材包含了线性代数的基本内容，又增加了线性规划的基本原理，同时将数学实验纳入了教学内容，具有以下特色：

1. 突出线性代数的基本思想和基本方法。突出基本思想和基本方法的目的在于让学生在学习过程中较好地了解各部分的内在联系，在总体上把握线性代数的思想方法；在教学理念上不过分强调严密论证、研究过程，而更多地注重数学意识，注重数学方法的应用以及能力的培养。

2. 本教材力求将数学、应用、计算机相结合，增加了基于Matlab的数学实验课内容。

3. 贴近实际应用。本教材对基本概念的叙述，力求从实际问题出发，自然地引出；对于抽象的理论，总是从具体问题入手，再把它推广到一般情形，而略去了很多繁琐冗长的理论推导，这对于非数学专业学生是很合适的。

本教材由湖南农业大学陈亚波任主编，湖南农业大学邹锐标、温芝元、周铁军，中南林业科技大学刘勉声任副主编。具体分工：

邹锐标负责编写第1章和第2章，温芝元负责编写第3章和第4章，刘勉声负责编写第5章第1至3节，周铁军负责编写第5章第4节、第5节和数学实验。陈亚波负责编写第6章。参与编写的人员还有李小平、刘月华、周玉元、周建军等。本教材由湖南科技大学彭振赟教授审稿。

在本教材出版的时候，我们要感谢中南林业科技大学、湖南科技大学及湖南农业大学教务处等所给予的支持和帮助。最后，对中国农业出版社为本教材的顺利出版所付出的辛勤劳动和大力支持，我们表示衷心的感谢。

由于水平有限，书中难免有不足甚至错误之处，恳请读者和使用本教材的教师批评指正。

编 者

2007年4月

目　　录

1 矩阵

矩阵是线性代数的研究对象和重要工具，矩阵概念的引入，不仅推动了线性代数及其他数学分支理论的发展，而且在经济学、管理学、计算机科学和工程技术领域等方面都有广泛的应用.

本章主要介绍矩阵的概念、矩阵的运算和矩阵的初等变换等内容.

1.1 矩阵的概念

1.1.1 矩阵的概念

人们在从事科学试验、经济管理和生产实践时，会获得大量的数据资料.

例 1 某企业生产四种产品，各种产品第一季度各月的产量（单位：件）如表 1－1 所示.

表 1－1 某企业四种产品第一季度各月产量 （单位：件）

产品 / 产量 / 月份	A	B	C	D
1	85	72	90	81
2	92	73	85	86
3	84	71	82	90

为了方便起见，该企业各种产品第一季度的产量情况可用矩形数表

$$\begin{pmatrix} 85 & 72 & 90 & 81 \\ 92 & 73 & 85 & 86 \\ 84 & 71 & 82 & 90 \end{pmatrix}$$

表示．这样的矩形数表就称为矩阵．

定义 1 **由** $m \times n$ **个数** a_{ij} （$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$）**排成的** m **行** n **列的矩形数表**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵，a_{ij} 称为这个矩阵的第 i 行第 j 列的元素，简称为该矩阵的（i，j）元．矩阵通常用大写黑体字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，…等表示，也可记作（a_{ij}）、$\boldsymbol{A}_{m\times n}$或（$a_{ij}$）$_{m\times n}$.

元素是实数的矩阵称为**实矩阵**，元素为复数的矩阵称为**复矩阵**．本教材中的矩阵除特别说明外，都指实矩阵．

行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n **阶矩阵**或 n **阶方阵**，n 阶方阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

记作 $\boldsymbol{A}_n$. $\boldsymbol{A}_n$ 的左上角到右下角元素的连线称为**主对角线**，左下角到右上角元素的连线称为**副对角线**．

1.1.2　几种特殊的矩阵

1. 零矩阵

元素全为零的矩阵称为**零矩阵**，记为 $\boldsymbol{O}$.

2. 负矩阵

矩阵$(-a_{ij})_{m\times n}$称为矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$的负矩阵，记作$-\boldsymbol{A}$.

3. 行矩阵

只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A} = (a_1 a_2 \cdots a_n)$$

称为**行矩阵**，又称为**行向量**．行矩阵也可记作 $\boldsymbol{A}=$（a_1，a_2，…，a_n）．

4. 列矩阵

只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**，又称为**列向量**.

行向量和列向量统称为向量，向量通常用黑体小写字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，…或黑体希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$，…等表示.

5. 上（下）三角形矩阵

主对角线下（上）方元素全部为零的方阵称为**上（下）三角形矩阵**.

6. 对角矩阵

主对角线以外的元素全为零的 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

称为**对角矩阵**，简称**对角阵**，记作

$$\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

7. 单位矩阵

主对角线上的元素都是 1 的 n 阶对角矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

称为 n 阶**单位矩阵**，记作 $\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{I}_n$，也可记作 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{E}_n$，本教材用 $\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵.

1.1.3 矩阵的相等

定义 2 如果两个矩阵的行数相等，列数也相等，就称它们是同型矩阵. 如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是同型矩阵，并且它们的对应元素完全相同，即

$$a_{ij}=b_{ij} \quad (i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n),$$

那么就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例 2 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a+b & a+c \\ 2b-d & a-b \end{pmatrix}$，已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，求 a，b，c，d 的值.

解 由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ 有

$$\begin{pmatrix} a+b & a+c \\ 2b-d & a-b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

根据矩阵相等的定义，有

$$a+b=1,\ a+c=0,\ 2b-d=0,\ a-b=1,$$

所以

$$a=1,\ b=0,\ c=-1,\ d=0.$$

1.2 矩阵的运算

1.2.1 矩阵的加法

定义 1 **设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 都是 $m\times n$ 矩阵，则称 $m\times n$ 矩阵**

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

进一步规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的差为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

注意，只有同型矩阵才能进行加法运算与减法运算.

例 1 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

解

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1+2 & 2+(-1) & 3+3 \\ 4+2 & 5+3 & 6+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 6 & 8 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1-2 & 2-(-1) & 3-3 \\ 4-2 & 5-3 & 6-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

由矩阵加法的定义，可以验证矩阵的加法满足下列运算规律（设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 为同型矩阵）：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$；

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

1.2.2 数与矩阵相乘

定义 2 **设 λ 是一个数，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，则称 $m\times n$ 矩阵**

$$\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

为数 λ 与矩阵 A 的乘积，记作 $\lambda\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}\lambda$.

例 2 在上节例 1 中，如果该企业各种产品第二季度各月的产量均比第一季度各月的产量提高 10%，则该企业各种产品第二季度各月的产量为

$$(1+10\%)\begin{pmatrix} 85 & 72 & 90 & 81 \\ 92 & 73 & 85 & 86 \\ 84 & 71 & 82 & 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 93.5 & 79.2 & 99 & 89.1 \\ 101.2 & 80.3 & 93.5 & 94.6 \\ 92.4 & 78.1 & 90.2 & 99 \end{pmatrix}$$

根据定义，数乘矩阵满足下列运算规律（设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，λ，μ 为数）：

（1）$(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$；

（2）$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$；

（3）$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$；

（4）$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

矩阵的加法与数乘矩阵统称为矩阵的**线性运算**.

例 3 已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

且 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$.

解 $$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -6 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1.2.3 矩阵的乘法

定义 3 **设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积**（记作 $\boldsymbol{AB}$）**是一个 $m\times n$ 矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中**

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).$$

由定义 3 可知：

（1）只有当左矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与右矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等时，$\boldsymbol{AB}$ 才有意义；

（2）$\boldsymbol{AB}$ 有意义时，矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的行数等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数，矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的列数；

（3）$\boldsymbol{AB}$ 有意义时，矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的 $(i,\ j)$ 元 c_{ij} 第于 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行的元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的对应元素乘积之和，即

$$c_{ij}=(a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{is})\begin{pmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{sj}\end{pmatrix}.$$

例 4 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 2×3 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 3×3 矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的列数与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等，所以 $\boldsymbol{AB}$ 有意义，且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3&a_1y_1+b_1y_2+c_1y_3&a_1z_1+b_1z_2+c_1z_3\\a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3&a_2y_1+b_2y_2+c_2y_3&a_2z_1+b_2z_2+c_2z_3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 的列数不等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数，所以 $\boldsymbol{BA}$ 无意义.

例 5 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n),\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 为 $1\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times1$ 矩阵，所以 $\boldsymbol{AB}$ 是 1×1 矩阵，$\boldsymbol{BA}$ 是 $n\times n$ 矩阵，按矩阵乘法公式：

$$\boldsymbol{AB}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n,$$

$$BA=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{pmatrix}b_1a_1&b_1a_2&\cdots&b_1a_n\\b_2a_1&b_2a_2&\cdots&b_2a_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_na_1&b_na_2&\cdots&b_na_n\end{pmatrix}.$$

例 4 和例 5 表明，当 $\boldsymbol{AB}$ 有意义时，$\boldsymbol{BA}$ 不一定有意义．即使 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义，$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 也不一定相等．总之，矩阵的乘法不满足交换律．因此，我们也称 $\boldsymbol{AB}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$ 的积或 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$ 的积．

若两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是**可交换的**．

例 6 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-2&6\\1&-3\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{AC}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&6\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

例 6 表明，当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 时，不一定能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，即矩阵乘法不满足零因子律．当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时，不一定能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，即矩阵乘法不满足消去律．

矩阵的乘法运算与数的乘法运算虽有些不同之处，但也有许多类似的运算规律（假设运算是可行的）：

（1）$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$，$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$；

（3）$(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})=\lambda(\boldsymbol{AB})$（$\lambda$ 是一个数）；

（4）$\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{A}$；

（5）$\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{O}$.

根据矩阵乘法的定义，在线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

中，令