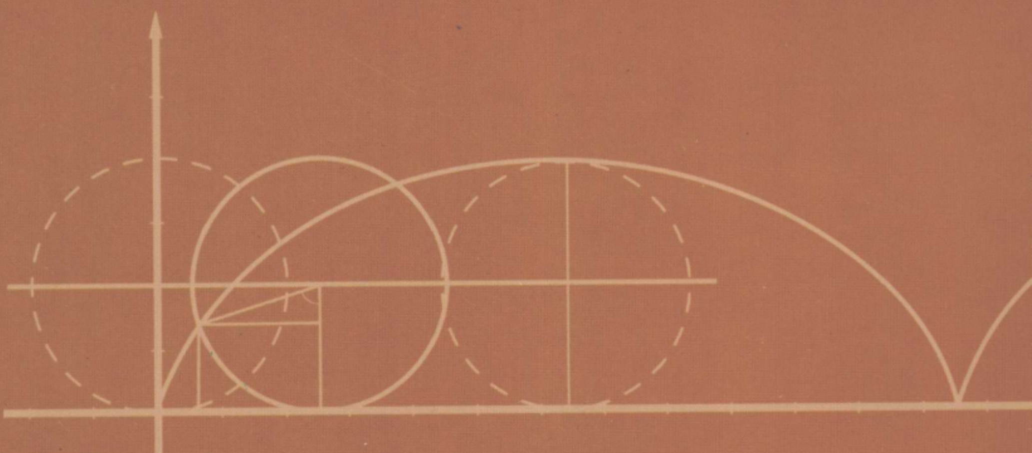
经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

数学

普通高中课程标准实验教科书

选修 4-4

坐标系与参数方程



凤凰出版传媒集团
江蘇教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE
凤凰国标教材

ISBN 978-7-5343-6797-7

9 787534 367977 >

定价：2.55元

审批号：苏费核（08秋）第32号　　举报电话：12358

经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

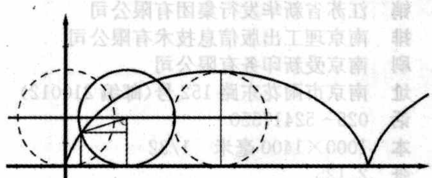
数学

坐标系与参数方程

zuobiaoxi yu canshufangcheng

选修 4-4

主　编：单　墫
副主编：李善良　陈永高　王巧林



凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

书　　名	普通高中课程标准实验教科书·数学 坐标系与参数方程(选修 4－4)
责任编辑	蔡　立
出版发行	凤凰出版传媒集团 江苏教育出版社(南京市马家街 31 号　邮编 210009)
网　　址	http://www.1088.com.cn
集团网址	凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn
经　　销	江苏省新华发行集团有限公司
照　　排	南京理工出版信息技术有限公司
印　　刷	南京爱新印务有限公司
厂　　址	南京市雨花东路 152 号(邮编 210012)
电　　话	025－52417550
开　　本	1000×1400 毫米　1/32
印　　张	2.125
版　　次	2008 年 6 月第 2 版 2008 年 6 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN　978－7－5343－6797－7
定　　价	2.55 元
批发电话	025－83260760　83260768
邮购电话	025－85400774　8008289797
短信咨询	10602585420909
E-mail	jsep@vip.163.com
盗版举报	025－83204538

苏教版图书若有印装错误可向承印厂调换
提供盗版线索者给予重奖

主　　编　单　墫

副主编　李善良　陈永高　王巧林

编写人员　仇炳生

参与设计　李善良　陈光立

责任编辑　蔡　立

几何学主要是研究空间图形的形状、大小和位置关系.解析几何运用坐标方法，把“形”和“数”有机的结合起来，使几何学的研究变得更加精确、深刻，开创了几何学研究的新篇章.我们曾经运用坐标方法成功地研究了椭圆、双曲线及抛物线等二次曲线的性质，然而，客观世界中丰富多彩的曲线仍然令我们目不暇接.

2004年雅典奥运会闭幕式上由麦穗组成的螺线，展示了人与自然的和谐以及人们获得丰收的喜悦，螺线的运动更是充满了生命的活力.

神舟五号飞船遨游太空时，它的飞行轨道是一个椭圆.当飞船完成预定任务离开轨道返回地球时，它又在太空中留下一条人类征服自然的痕迹.

凸轮、齿轮等机械零件，由于它们的轮廓线采用了不同类型的曲线，在传动自动化方面具有不同的功能.

美丽的四叶玫瑰线、摆线……又把我们带进一个美妙的曲线世界.

怎样拓展坐标系，运用多种代数形式刻画客观世界中丰富多彩的几何图形呢?

说　　明

江苏教育出版社出版的《普通高中课程标准实验教科书·数学》是根据2003年教育部制订的《普通高中数学课程标准(实验)》编写的.

该套教科书充分体现数学课程标准的基本理念,使学生通过高中阶段的学习,能获得适应现代生活和未来发展所必需的数学素养,满足他们个人发展与社会进步的需要.

教科书力图使学生在丰富的、现实的、与他们经验紧密联系的背景中感受数学、建立数学、运用数学,做到"入口浅,寓意深".通过创设恰当的问题情境,引导学生进行操作、观察、探究和运用等活动,感悟并获得数学知识与思想方法.在知识的发生、发展与运用过程中,培养学生的思维能力、创新意识和应用意识.

教科书按知识发展、背景问题、思想方法三条主线,通过问题将全书贯通.每个模块围绕中心教育目标展开,每章围绕核心概念或原理展开.教科书充分关注数学与自然、生活、科技、文化、各门学科的联系,让学生感受到数学与外部世界是息息相通、紧密相连的.

教科书充分考虑学生的不同需求,为所有学生的发展提供帮助,为学生的不同发展提供较大的选择空间.整个教科书设计为:一个核心(基本教学要求),多个层次,多种选择.学好核心内容后,根据需要,学生有多种选择,每一个人都能获得必备的数学素养与最佳发展.

众多的数学家、心理学家、学科教育专家、特级教师参加了本套教科书的编写工作,在此向他们深表感谢!

感谢您使用本书,您在使用本书时有建议或疑问,请及时与我们联系.我们的联系方式:b3425961@jlonline.com, lishanliang@x263.net, jshncs@hotmail.com.

本书编写组

2008年5月

目　录

4.1 坐标系

为了确保宇宙飞船能在预定轨道上运行，并按计划完成科学考察任务后，安全、准确的返回地球，从火箭升空的时刻开始，需要随时测定飞船在空中的位置.

运动会的开幕式上常常有大型团体操的表演，其中不断变化的图案是由排列整齐的演员不断改变自己在队伍中的位置形成的. 要出现正确的图案，需要确定每一个演员所在的位置.

某地区原计划经过 B 地沿着东北方向修建一条高速公路. 但在 A 村北偏西 $30°$ 方向距 A 村 500 m处，发现一古代文物遗址 W. 经过初步勘察，文物管理部门将遗址 W 周围 200 m 范围划为禁区. 已知 B 地位于 A 村的正西方向 1 km 处，试问：修建高速公路的计划需要修改吗(如图 4-1-1)?

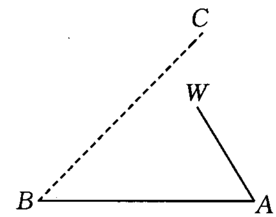


图 4-1-1

上述几个问题都涉及到如何刻画一个几何图形的位置. 为此，需要设定一个参照系，即以参照系为标准确定它的相对位置. 参照系不同，表示几何图形位置的方式也不同.

坐标系就是一个参照系，它是实现几何图形与代数形式互相转化的基础. 那么，

如何创建坐标系呢?

4.1.1 直角坐标系

我们知道，在直线上，取一个点为原点，并确定一个长度单位和直线的方向，就建立了直线上的坐标系，这就是数轴. 它使直线上任意一点 P 都可以由惟一的实数 x 确定(如图 4-1-2(1))，x 称为点 P 的坐标.

在平面上，取两条互相垂直的直线的交点为原点，并确定一个长度单位和这两条直线的方向，就建立了平面直角坐标系. 它使平面上任意一点 P 都可以由惟一的有序实数对(x, y)确定(如图 4-1-2(2))，(x, y)称为点 P 的坐标.

在空间中，选择两两垂直且交于一点的三条直线，取这三条直线的交点为原点，并确定一个长度单位和这三条直线的方向，就建立了空间直角坐标系. 它使空间任意一点 P 都可以由惟一的三元有序实数组(x, y, z)确定(如图 4-1-2(3))，(x, y, z)称为点 P 的坐标.

建立坐标系是为了确定点的位置. 因此，在所创建的坐标系中，应满足：**任意一点都存在一个坐标与它对应；反之，依据一个点的坐标就能确定这个点的位置.**

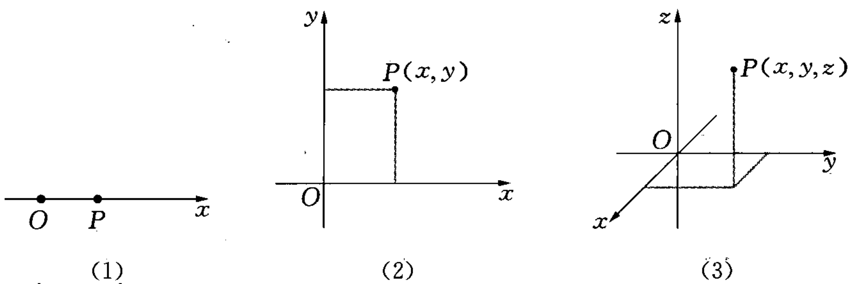


图 4-1-2

在数轴上，直线上所有点的集合与全体实数的集合建立一一对应；在平面直角坐标系中，平面上所有点的集合与全体有序实数对(x, y)的集合建立一一对应；在空间直角坐标系中，空间所有点的集合与全体三元有序实数组(x, y, z)的集合建立一一对应.

确定点的位置就是求出这个点在设定的坐标系中的坐标.

例 1 选择适当的平面直角坐标系，表示边长为 1 的正六边形的顶点.

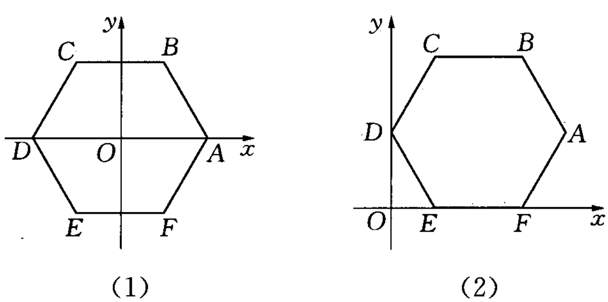


图 4-1-3

解 建立如图 4-1-3(1)所示的平面直角坐标系，则正六边形的顶点坐标分别为

$A(1, 0)$, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $D(-1, 0)$, $E\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $F\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

也可建立如图 4-1-3(2)所示的平面直角坐标系,则正六边形的顶点坐标分别为

$A\left(2, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$, $C\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$, $D\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $E\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

在本节开始提出的关于修建高速公路的问题中,为了确定高速公路和古代文物遗址的相对位置,可以采用以下方式建立平面直角坐标系.

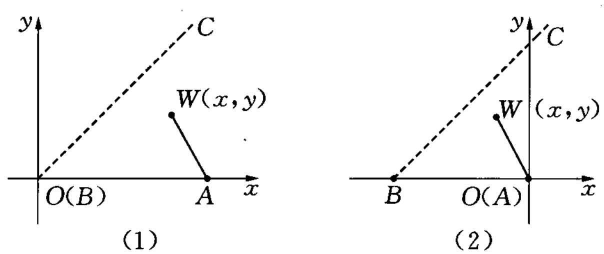


图 4-1-4

建立如图 4-1-4(1)所示的平面直角坐标系,则 $B(0, 0)$, $A(1\,000, 0)$.

由 W 位于 A 村北偏西 30°方向,可得$\angle OAW = 60°$. 又 $AW = 500$,则

$$x_W = 1\,000 - 500\cos 60° = 750,$$

$$y_W = 500\sin 60° = 250\sqrt{3},$$

即 $W(750, 250\sqrt{3})$.

因为高速公路所在直线过点 B 且倾斜角为 45°,所以该直线的方程为

$$x - y = 0.$$

于是,点 W 到高速公路所在直线的距离为

$$\frac{|750-250\sqrt{3}|}{\sqrt{2}}\approx 224.14>200.$$

我们也可以建立如图4-1-4(2)所示的平面直角坐标系，则$A(0,\ 0)$，$B(-1\ 000,\ 0)$. 容易得到，点W的坐标为$(-250,\ 250\sqrt{3})$，高速公路所在直线的方程为$x-y+1\ 000=0$.

于是，点W到高速公路所在直线的距离为

$$\frac{|-250-250\sqrt{3}+1\ 000|}{\sqrt{2}}\approx 224.14>200.$$

所以，修建高速公路的计划可以不修改.

由此可见，坐标系对于每一个问题仅具有相对意义. 只要能够简捷地表示点的位置，并且有利于进一步研究，我们可以建立不同的坐标系.

例2 求证：三角形的外心、重心和垂心在同一条直线上.

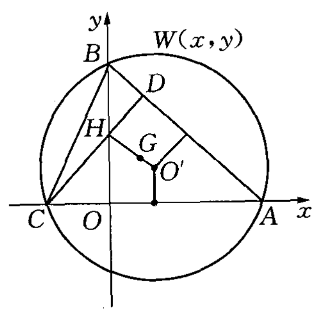


图4-1-5

分析 运用解析法分析点的位置关系，首先应建立坐标系确定这些点的坐标，进而根据它们坐标之间的数量关系判断这些点之间的位置关系. 因此，建立适当的坐标系是关键. 本题中，若建立的坐标系使得三角形的三个顶点分别在坐标轴上，则证明较简单.

解 建立如图4-1-5所示的平面直角坐标系，设$A(a,\ 0)$，$B(0,\ b)$，$C(c,\ 0)$，三角形ABC的外心、重心和垂心分别为O'，G和H. 则有

$$x_G=\frac{a+0+c}{3}=\frac{a+c}{3},\ y_G=\frac{0+b+0}{3}=\frac{b}{3},$$

即重心坐标为$G\left(\frac{a+c}{3}, \frac{b}{3}\right)$.

AB边上的高CD所在直线的方程为$y=\frac{a}{b}(x-c)$，AC边上的高BO所在直线的方程为$x=0$. 解方程组$\begin{cases} y=\frac{a}{b}(x-c), \\ x=0, \end{cases}$得垂心坐标为$H\left(0, -\frac{ac}{b}\right)$.

线段AB的垂直平分线所在直线的方程为$y-\frac{b}{2}=\frac{a}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right)$，线段$AC$的垂直平分线所在直线的方程为$x=\frac{a+c}{2}$. 解方程组

$\begin{cases} y-\frac{b}{2}=\frac{a}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right), \\ x=\frac{a+c}{2}, \end{cases}$得外心坐标为$O'\left(\frac{a+c}{2}, \frac{ac+b^2}{2b}\right)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'G}&=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OO'}=\left(\frac{a+c}{3}, \frac{b}{3}\right)-\left(\frac{a+c}{2}, \frac{ac+b^2}{2b}\right)\\&=\left(-\frac{a+c}{6}, -\frac{3ac+b^2}{6b}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'H}&=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OO'}=\left(0, -\frac{ac}{b}\right)-\left(\frac{a+c}{2}, \frac{ac+b^2}{2b}\right)\\&=\left(-\frac{a+c}{2}, -\frac{3ac+b^2}{2b}\right).\end{aligned}$$

因为$\overrightarrow{O'H}=3\overrightarrow{O'G}$，所以三角形的外心、重心和垂心在同一条直线上，且重心是连接外心和垂心的线段的一个三等分点.

例3 已知点$Q(a, b)$，分别按下列条件求出点P的坐标：

(1) P是点Q关于点$M(m, n)$的对称点；

(2) P是点Q关于直线l：$x-y+4=0$的对称点(Q不在直线l上).

解 设点P的坐标为(x, y).

(1) 由题意，M是线段PQ的中点，

因此 $\begin{cases} x+a=2m, \\ y+b=2n, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=2m-a, \\ y=2n-b. \end{cases}$

所以点 P 的坐标为 $(2m-a,\ 2n-b)$.

(2) 由题意，直线 l 是线段 PQ 的垂直平分线，所以线段 PQ 的中点在 l 上，且 $PQ\perp l$，从而有

$$\begin{cases} \dfrac{x+a}{2}-\dfrac{y+b}{2}+4=0, \\ \dfrac{y-b}{x-a}\cdot 1=-1. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=b-4, \\ y=a+4. \end{cases}$

所以点 P 的坐标为 $(b-4,\ a+4)$.

4.1.2 极坐标系

在自动化生产中，常常利用凸轮控制机器的传动，凸轮的轮廓线上的点 M 的位置，由点 M 到凸轮孔心 O 的距离 OM 以及凸轮转过的角 $\angle AOM$ 确定（如图 4-1-6）.

军舰巡逻在海面上，发现前方有一群水雷，如何确定它们的位置以便将它们引爆？

凸轮轴

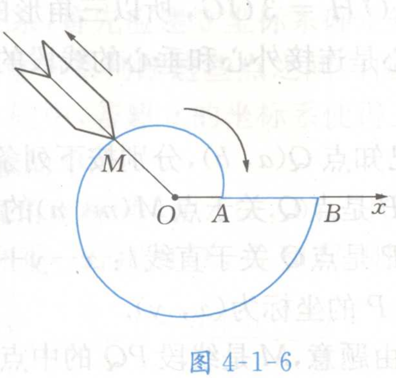
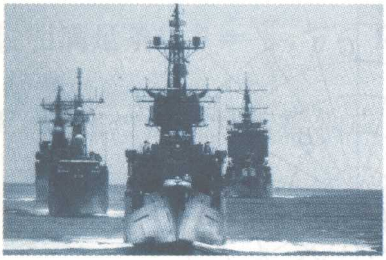


图 4-1-6



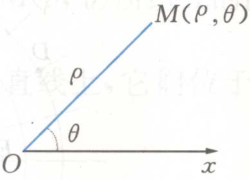


图 4-1-7

为了简便地表示上述问题中点的位置，应建立怎样的坐标系呢？

1. 极坐标系

在凸轮问题中，设

$$OM=\rho,\ \angle AOM=\theta.$$

取射线 OA 为角的始边，采用距离 ρ 和角 θ 为坐标建立坐标系，则点 M 的位置可以表示为$(\rho,\ \theta)$. 类似地，如图 4-1-7，我们可以取军舰所在位置为定点 O，军舰的航向 Ox 为角的始边，采用距离 ρ 和角 θ 为坐标建立坐标系，则水雷的位置也可以表示为$(\rho,\ \theta)$.

一般地，在平面上取一个定点 O，自点 O 引一条射线 Ox，同时确定一个长度单位和计算角度的正方向（通常取逆时针方向为正方向），这样就建立了一个**极坐标系**(polar coordinates system). 其中，点 O 称为**极点**(pole)，射线 Ox 称为**极轴**(polar axis)（如图 4-1-7).

设 M 是平面上任一点，ρ 表示 OM 的长度，θ 表示以射线 Ox 为始边，射线 OM 为终边所成的角. 那么，每一个有序实数对$(\rho,\ \theta)$确定一个点的位置. 其中，ρ 称为点 M 的**极径**(radius vector)，θ 称为点 M 的**极角**(polar angle). 有序数对$(\rho,\ \theta)$称为点 M 的**极坐标**(polar coordinates).

由极径的意义可知 $\rho\geqslant 0$. 当极角 θ 的取值范围是$[0,\ 2\pi)$时，平面上的点（除去极点）就与极坐标$(\rho,\ \theta)$ $(\rho\neq 0)$ 建立一一对应的关系.

我们约定，极点的极坐标中，极径 $\rho=0$，极角 θ 可取任意角.

例 1 写出图 4-1-8 中各点的极坐标.

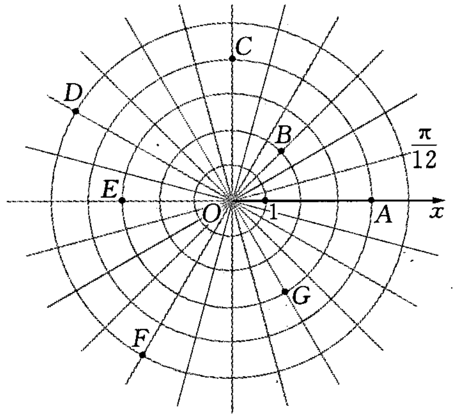


图 4-1-8

解 图中各点的极坐标分别为

$A(4, 0)$，$B\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$，$C\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$，$D\left(5, \frac{5\pi}{6}\right)$，$E(3, \pi)$，$F\left(5, \frac{4\pi}{3}\right)$，$G\left(3, \frac{5\pi}{3}\right)$.

为了研究方便，在极坐标系中，有时极径 ρ 允许取负值，极角 θ 也可以取任意的正角或负角. 当 $\rho<0$ 时，点 $M(\rho, \theta)$ 位于极角终边的反向延长线上，且 $OM=|\rho|$. 例如，在例 1 中，点 B 的极坐标也可以表示为

$$\left(2, \frac{\pi}{4}+2k\pi\right) \text{或} \left(-2, \frac{5\pi}{4}+2k\pi\right) \ (k \in \mathbf{Z}).$$

一般地，如果 (ρ, θ) 是点 M 的极坐标，那么

$$(\rho, \theta+2k\pi) \text{ 或 } (-\rho, \theta+(2k+1)\pi) \ (k \in \mathbf{Z})$$

都可以作为点 M 的极坐标. 但这样建立的极坐标系，平面上的点与它的极坐标之间就不是一一对应关系.

例2 在极坐标系中，

(1) 已知两点 $P\left(5, \frac{5\pi}{4}\right)$，$Q\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$，求线段 PQ 的长度；