教育部推荐教材

大学数学立体化教材

线性代数

（经管类）

（简明版）

第二版

吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

大学数学立体化教材

线性代数

（经管类）

（简明版）

第二版

吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数（经管类·简明版）/吴赣昌主编. 2版
北京：中国人民大学出版社，2008
教育部推荐教材. 大学数学立体化教材
ISBN 978-7-300-08919-5

Ⅰ. 线…
Ⅱ. 吴…
Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材
Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 006356 号

教育部推荐教材
大学数学立体化教材
线性代数（经管类·简明版）
第二版
吴赣昌　主编

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京宏伟双华印刷有限公司	**版　　次**	2006 年 10 月第 1 版
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本		2008 年 2 月第 2 版
印　　张	10 插页 1	**印　　次**	2008 年 2 月第 1 次印刷
字　　数	180 000	**定　　价**	22.00 元（含光盘）

内容简介

本书根据高等学校经济类专业线性代数课程的教学大纲编写而成，内容设计简明，但结构体系上又不失完整，其中涵盖了行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值、二次型等知识；同时，为了便于阐释和理解这些线性代数的基本知识，本书以适当的难度梯度循序渐进地选编了一些教学例题和练习题. 此外，本书还结合现代教学的新要求和现代科技的新发展，配备了一套内容丰富、功能强大的教学课件——《线性代数多媒体学习系统》(光盘)，其中包括多媒体教案、习题详解、综合训练等功能模块，这些功能模块的设计方便学生们自学和自我提升：它有利于学生们了解一些数学历史和数学文化，也有助于学生们的课程学习和考研备战. 在学习过程中，书与盘配合使用，形成了教与学的有机结合.

本书被评为教育部推荐教材，可作为普通高等院校(少课时)、独立学院、成教学院、民办院校等本科院校以及具有较高要求的高职高专院校相应专业的数学基础课程教材.

总　　序

教育信息化是21世纪教育改革和发展的大方向，借助信息技术提高教与学的效率和效果、培养学生的实践能力和创新能力是教育追求的目标．然而，与其他学科相比，大学数学教育信息化的研究进展比较缓慢．随着我国高等教育“大众化”阶段的到来，过去所谓“经典”的教材已渐渐不能适应教育改革和发展的需要，因此，如何将当今快速发展的信息技术与教育技术相结合，建设一系列“新型教材”就显得非常紧迫．在我们的设想中，这种“新型教材”至少要包含以下两个方面：一是教学资源的多元化、教学方式的现代化、教学知识的立体化；二是教学考多层次、全方位的建设．此类“新型教材”的使用应在提高教学效率、增强教学效果、加大教学信息量，利于学生的课后学习和优秀学生的提高训练，全方位提升学生的综合素质和创新能力等方面起到积极的作用．

2000年初，在吴赣昌教授的组织与策划下，我们成立了一个由教授、副教授、专任教师、专职动画设计人员和软件设计人员组成的研发团队，对上述研究目标进行了重点攻关，迄今，先后推出了一系列全新的“教学资源库式”的大学数学立体化教材，并配套建设了大学数学多媒体系列教学软件、大学数学试题库系统和教学考研网站和课程建设网站．上述教学成果先后被全国200多所高等院校采用，一方面得到了国内同行的积极反馈和鼓励，另一方面也使上述研究工作的可持续发展得到了有力的支持．

此次经由中国人民大学出版社出版的大学数学立体化简明系列教材，包括了适合理工类各专业选用的高等数学教材、适合经管类各专业选用的微积分教材以及适合理工类与经管类等专业选用的线性代数教材和概率论与数理统计教材．下面我们简单介绍一下该立体化教材的形式与内涵．

立体化教材的形式

1.《＊＊＊＊》(书)

2.《＊＊＊＊多媒体学习系统》(学生专用)(光盘)

其中，《＊＊＊＊》(书)的编写具有下列特点：

◆ 书中融入了数学历史与数学文化的教育．

◆ 在重要概念引入之前，深刻、简明地阐述其产生的背景及应用的总体思想．

◆ 以评注方式对定理、概念、公式的理解和应用做了进一步的总结．

◆ 依循序渐进的原则，以适当的难度梯度选编教学例题．

《＊＊＊＊多媒体学习系统》是一套大型的集成性、交互式和教学资源多元化

的学习软件，其中设计了多媒体教案、习题详解、实验教学、综合训练等功能模块，以充分满足读者们在教材内容学习、课后辅导答疑、数学实践以及综合提高训练等方面的需要．其主要特点有：

◆ 多媒体教案：按动态仿真教学方式设计了大量的教学动画，直击数学思想本质，利于突破学习中的重点、难点．

◆ 习题详解：逐题剖析解题思路，并以多媒体动画的形式给出了习题的求解过程和相关方法，利于学生课后学习．

◆ 数学试验：以交互、集成方式，设计了数学实验教学演示系统和实验案例库．

◆ 综合训练：总结每章教学知识点，通过精选的总习题和历届考研真题进一步揭示解题的一般规律和技巧，利于学生综合提高．

◆ 知识点交互：利用多媒体开发软件的网页特性，为系统中的每个文件提供了丰富的知识点交互链接，利于学生高效率的学习．

立体化教材的配套建设服务

1.《＊＊＊＊多媒体教学系统》(教师专用)(光盘)

2.《大学数学试题库系统》

3. 数学教研网(www. math123. cn)

其中，《＊＊＊＊多媒体教学系统》(光盘)，除了包含《＊＊＊＊多媒体学习系统》的主要功能模块以外，还具有以下特点：

◆ 多媒体教案：教学过程设计更适合教师进行课堂教学，补充了类型丰富的教学例题供教师选用，增加了课堂练习环节．

◆ 现代教学优势与传统教学优势的融合：教学系统内设置了系统导航、文件缩放与手写笔等功能，使教师在课堂教学过程中既可很好地利用现代教学的优势，又可很好地保持传统教学的优势．

◆ 教学系统的扩展：教学系统内设置了丰富的扩展端口，教师在课堂教学过程中，可以多种方式(Word、Powerpoint、Flash 等)链接和补充教学建设内容．

◆ 教学备课系统：搜集并整理了大量的教学资源和备课元素，可供教师修改选用，充分展现各位教师的个性化授课特点．

◆ 数学实验案例库与数学实验演示系统结合，可供教师现场与 Mathematica 系统交互进行实验教学．

《大学数学试题库系统》包含高等数学、线性代数、概率论与数理统计三大模块，试题量 25 000 余道，具有以下特点：

◆ 试题类型丰富：含选择题、填空题、计算题、证明题、综合应用题等．

◆ 组卷功能强大：教师只需根据考试要求直接选择考点和题型，通过智能组卷按钮，几秒钟内即可生成试卷和相应的答卷，通过预览，对不满意的试题，通过人工

调整按钮，可以很方便地对该试卷中的试题进行增删与替换.

◆ 直接实现试卷的Word排版，并能在成卷后实现对试题的编辑修改.

◆ 大容量试卷库：试卷库可存放3 300余套各类试卷，库内存有数百套各类全真试卷，供用户参考；用户可将自组试卷或交流试卷存入该试卷库内. 试卷库管理功能使用户能方便地实现对库内的试卷进行调用、修改及增删.

◆ 二次开发功能：使用单位可对系统进行包括试题的增删与替换，试卷库的存储管理，试题的分类标识加注以及试题难度的重新区分等.

数学教研网(www.math123.cn)是为全国广大师生，尤其是采用大学数学立体化教材的师生提供信息资讯、教学资源与配套服务的网站. 网站设计了动态信息、教材建设、教学文件、教学系统、题库系统、课程网站、考研资讯、数学实验、数学建模、交流访谈、数学史话、数学欣赏、征订信息等主要栏目，其中有丰富的教学软件资源供广大师生免费下载. 网站力图建设成为国内大学数学教与学的门户型通用平台.

立体化教材的建设是一项崭新的事业. 令我们欣慰的是，与当初启动这个项目时相比，现在大面积采用立体化教材和多媒体教学的软硬件环境(从教育部的文件精神到大学的多媒体教室建设)和软硬件技术(从软件开发平台到计算机相关硬件技术)都已经非常成熟了. 当初许多专家认为多媒体教学无法发挥教师教学个性化的问题也随着计算机软硬件技术的进步迎刃而解了.

2000年以来，尤其是2002年9月第一个《高等数学多媒体教学系统》(理工类)出版以来，我们的工作得到了国内许多同行的长期支持和鼓励，在此特别表示感谢.

编　者

2008年1月18日

目　录

习题答案

第 1 章 行 列 式

历史上，行列式的概念是在研究线性方程组的解的过程中产生的. 如今，它在数学的许多分支中都有着非常广泛的应用，是常用的一种计算工具. 特别是在本门课程中，它是研究后面线性方程组、矩阵及向量组的线性相关性的一种重要工具.

§1.1 二阶与三阶行列式

一、二阶行列式

定义 1 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为**二阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

其中数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 叫做行列式的**元素**，横排叫做**行**，竖排叫做**列**. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 叫做**行标**，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 叫做**列标**，表明该元素位于第 j 列. 由上述定义可知，二阶行列式是由 4 个数按一定的规律运算所得的代数和. 这个规律性表现在行列式的记号中就是“**对角线法则**”. 如图 1-1-1，把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，把 a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**副对角线**，于是，二阶行列式便等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积.

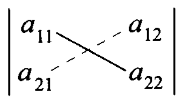

图 1-1-1

二、二元线性方程组

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1.1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (1.2) \end{cases}$$

式 $(1.1)\times a_{22}$ − 式 $(1.2)\times a_{12}$ 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22}-b_2a_{12} \tag{1.3}$$

式 $(1.2)\times a_{11}$ − 式 $(1.1)\times a_{21}$ 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11}-b_1a_{21} \tag{1.4}$$

利用二阶行列式的定义，记

$$D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则由式 (1.3)、式 (1.4) 可改写为

$$\begin{cases} Dx_1=D_1 \\ Dx_2=D_2 \end{cases}.$$

于是，在行列式 $D\neq 0$ 的条件下，式 (1.1)、式 (1.2) 有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

注：从形式上看，这里分母 D 是由方程组 (1.1)、(1.2) 的系数所确定的二阶行列式（称为**系数行列式**），x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}, a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}, a_{22} 所得的二阶行列式. 本节后面讨论的三元线性方程组亦有类似的规律性. 请读者学习时注意比较.

例1 解方程组 $\begin{cases} 2x_1+3x_2=8 \\ x_1-2x_2=-3 \end{cases}$.

解

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2\times(-2)-3\times 1=-7,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=8\times(-2)-3\times(-3)=-7, \quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=2\times(-3)-8\times 1=-14,$$

因 $D\neq 0$，故题设方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-7}{-7}=1, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-14}{-7}=2.$$

三、三阶行列式

定义2 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33},$$

称为**三阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

由上述定义可见，三阶行列式有 6 项，每一项均为不同行不同列的三个元素之

积再冠以正负号，其运算的规律性可用“对角线法则”(见图1−1−2) 或“沙路法则”(见图1−1−3) 来表述.

(1) 对角线法则.

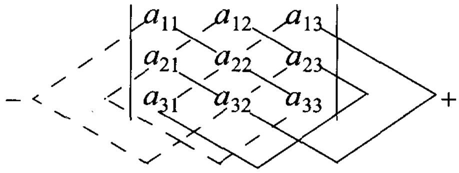

图 1−1−2

(2) 沙路法则.

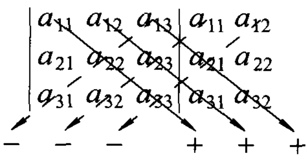

图 1−1−3

例 2 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1\times0\times6+2\times5\times(-1)+3\times4\times0 \\ -3\times0\times(-1)-1\times5\times0-2\times4\times6 \\ =-10-48=-58.$$

例 3 求解方程 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0$.

解 方程左端

$$D=3x^2+4x+18-12-9x-2x^2=x^2-5x+6,$$

由 $x^2-5x+6=0$，解得 $x=2$ 或 $x=3$.

四、三元线性方程组

类似于二元线性方程组的讨论，对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases},$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

若系数行列式 $D\neq 0$，则该方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例4 解三元线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+\ \ x_3=-2 \\ 2x_1+\ \ x_2-3x_3=1 \\ -x_1+\ \ x_2-\ \ x_3=0 \end{cases}$.

解 系数行列式

$$\begin{aligned} D=&\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ =&1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times2\times1 \\ &-1\times1\times(-1)-1\times(-3)\times1-(-2)\times2\times(-1) \\ =&-5\neq 0, \end{aligned}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5,\ D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-10,\ D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-5,$$

故所求方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\qquad x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$

习题 1-1

1. 计算下列二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$; (5) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;　　(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;　　(6) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

3. 当 x 取何值时，$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$.

§1.2 n阶行列式

一、排列与逆序

定义 1 由自然数 1, 2, …, n 组成的不重复的每一种有确定次序的排列，称为一个 ***n* 级排列**（简称为**排列**）.

例如，1234 和 4312 都是 4 级排列，而 24315 是一个 5 级排列 .

定义 2 在一个 n 级排列 $(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n)$ 中，若数 $i_t > i_s$，则称数 i_t 与 i_s 构成一个**逆序**. 一个 n 级排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

根据上述定义，可按如下方法计算排列的逆序数：

设在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，比 $i_k (k=1,2,\cdots,n)$ 大的且排在 i_k 前面的数共有 t_k 个，则 i_k 的逆序的个数为 t_k，而该排列中所有自然数的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数. 即

$$N(i_1 i_2 \cdots i_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{k=1}^{n} t_k .$$

例 1 计算排列 32514 的逆序数.

解 因为 3 排在首位，故其逆序数为 0；

在 2 前面且比 2 大的数有 1 个，故其逆序的个数为 1；

在 5 前面且比 5 大的数有 0 个，故其逆序的个数为 0；

在 1 前面且比 1 大的数有 3 个，故其逆序的个数为 3；

在 4 前面且比 4 大的数有 1 个，故其逆序的个数为 1 .

将上述结果排成如下形式：

$$\begin{array}{cccccc} \text{排列} & 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_k & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}$$

易见所求排列的逆序数为

$$N(32514) = 0+1+0+3+1 = 5.$$

定义 3 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**；逆序数为偶数的排列称为**偶排列** .

例 2 求排列 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数，并讨论其奇偶性.

解 类似例 1 的讨论，可排出下表：

$$\begin{array}{cccccccc} \text{排列} & n & (n-1) & (n-2) & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_k & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{array}$$

则所求逆序数为：

$$N(n(n-1)\cdots 321)=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

易见：当 $n=4k, 4k+1$ 时，该排列是偶排列；当 $n=4k+2, 4k+3$ 时，该排列是奇排列．

二、n 阶行列式的定义

观察三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

易见：

(1) 三阶行列式共有 $6=3!$ 项；

(2) 每项都是取自不同行不同列的三个元素的乘积；

(3) 每项的符号是：当该项元素的行标按自然数顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号．

故三阶行列式可定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 为对所有三级排列 $j_1j_2j_3$ 求和．

定义 4　由 n^2 个元素 $a_{ij}\ (i, j=1, 2, \cdots, n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 ***n* 阶行列式**，其中横排称为**行**，竖排称为**列**，它表示所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，各项的符号是：当该项各元素的行标按自然数顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号；是奇排列则取负号．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和．行列式有时也简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$，这里数 a_{ij} 称为行列式的**元素**，称

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

为行列式的**一般项**．

注：(1) n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和，且冠以正号的项和冠以负号的项（不包括元素本身所带的符号）各占一半，因此，行列式实质上是一种特殊定义的数；

(2) $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的符号为 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}$（不包括元素本身所带的符号）；

(3) 一阶行列式 $|a|=a$，不要与绝对值记号相混淆．

例 3 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&3&0&0\\4&0&0&0\end{vmatrix}$.

解 一般项为 $(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$，现考察不为零的项．$a_{1j_1}$ 取自第一行，但只有 $a_{14}\neq 0$，故只可能 $j_1=4$；同理可得 $j_2=3$，$j_3=2$，$j_4=1$．即行列式中不为零的项只有 $(-1)^{N(4321)}1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$，所以

$$D=24.$$

注：一般地，可得到下列结果：

$$\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\0&\cdots&a_{2\,n-1}&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&\cdots&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{N(n(n-1)\cdots 1)}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}\,a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.$$

例 3 的行列式中，其非副对角线上的元素全为 0，此类行列式可以直接求出结果．特别地，非主对角线上元素全为 0 的行列式称为**对角行列式**，而对角线以下（上）的元素全为 0 的行列式称为**上（下）三角（形）行列式**．

例 4 计算上三角形行列式 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$ $(a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\neq 0)$.

解 一般项为 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，现考察不为零的项．$a_{nj_n}$ 取自第 n 行，但只有 $a_{nn}\neq 0$，故只可能取 $j_n=n$；$a_{n-1\,j_{n-1}}$ 取自第 $n-1$ 行，只有 $a_{n-1\,n-1}$ 及 $a_{n-1\,n}$ 不为零，因 a_{nn} 取自第 n 列，故 $a_{n-1\,j_{n-1}}$ 不能取自第 n 列，从而 $j_{n-1}=n-1$；同理可得，$j_{n-2}=n-2$，$\cdots$，$j_1=1$．所以不为零的项只有

$$(-1)^{N(1,2,\cdots,n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

故
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

注：类似可得下三角形行列式
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

对角行列式
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

三、对换

为进一步研究 n 阶行列式的性质，先要讨论对换的概念及其与排列奇偶性的关系.

定义5　在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的手续称为**对换**. 将两个相邻元素对换，称为**相邻对换**.

例如，对换排列 21354 中元素 1 和 4 的位置后，得到排列 24351.

定理1　任意一个排列经过一个对换后，其奇偶性改变.

证明　略.

推论1　奇排列变成自然数顺序排列的对换次数为奇数，偶排列变成自然数顺序排列的对换次数为偶数.

证明　由定理1知，对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而自然数顺序排列是偶排列(逆序数为0)，因此结论成立.

定理2　n 个自然数 $(n>1)$ 共有 $n!$ 个 n 级排列，其中奇偶排列各占一半.

证明　n 级排列的总数为 $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$.

设其中奇排列为 p 个，偶排列为 q 个. 若对每个奇排列都做同一对换，则由定理1，p 个奇排列均变为偶排列，故 $p \le q$；同理对每个偶排列都作同一对换，则 q 个偶排列均变为奇排列，故 $q \le p$，所以 $p = q$. 从而 $p = q = \dfrac{n!}{2}$.

定理3　n 阶行列式也定义为
$$D = \sum (-1)^{S} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n},$$
其中 S 为行标与列标排列的逆序数之和，即
$$S = N(i_1 i_2 \cdots i_n) + N(j_1 j_2 \cdots j_n).$$

证明　略.