高职高专数学立体化教材

线性代数

（理工类）

吴赣昌 主编

中国人民大学出版社

高职高专数学立体化教材

线性代数

（理工类）

吴赣昌 主编

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数．理工类/吴赣昌主编．
北京：中国人民大学出版社，2007
高职高专数学立体化教材
ISBN 978-7-300-07971-4

Ⅰ．线…
Ⅱ．吴…
Ⅲ．线性代数-高等学校：技术学校-教材
Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 037639 号

高职高专数学立体化教材
线性代数（理工类）
吴赣昌　主编

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京东君印刷有限公司		
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本	**版　　次**	2007 年 3 月第 1 版
印　　张	7.25 插页 1	**印　　次**	2007 年 3 月第 1 次印刷
字　　数	131 000	**定　　价**	18.00 元（含光盘）

内容简介

本书根据高职高专院校理工类专业线性代数课程的教学大纲编写而成，其中涵盖了行列式、矩阵、线性方程组、矩阵、二次型等内容。书中融入了数学历史和数学文化方面的知识，并以适当的难度梯度循序渐进地选编了教学例题和习题，同时还特别提供了相应的数学实验（见附录）。

此外，我们还结合现代教学的新要求和信息技术的新发展，开发了一套内容丰富、功能强大的学习软件——《线性代数多媒体学习系统》（光盘，附书后），其中包括多媒体教案、习题详解、实验教学、综合训练等功能模块，这些模块的设计将对学生们的课后复习、疑难解答、自学提高，以及创新能力的培养起到积极的作用。在学习过程中，书与盘配合使用，形成了教与学的有机结合。

本书可作为高职高专院校理工类专业的数学基础课程教材。

总　　序

教育信息化是21世纪教育改革和发展的大方向，借助信息技术提高教与学的效率和效果、培养学生的实践能力和创新能力是教育追求的目标．然而，与其他学科相比，大学数学教育信息化的研究进展比较缓慢．随着我国高等教育“大众化”阶段的到来，过去所谓“经典”的教材已渐渐不能适应教育改革和发展的需要，因此，如何将当今快速发展的信息技术与教育技术相结合，建设一系列“新型教材”就显得非常紧迫．在我们的设想中，这种“新型教材”至少要包含以下两个方面：一是教学资源的多元化、教学方式的现代化、教学知识的立体化；二是教学考多层次、全方位的建设．此类“新型教材”的使用应在提高教学效率、增强教学效果、加大教学信息量，利于学生的课后学习和优秀学生的提高训练，全方位提升学生的综合素质和创新能力等方面起到积极的作用．

2000年初，在吴赣昌教授的组织与策划下，我们成立一个由教授、副教授、专任教师、专职动画设计人员和软件设计人员组成的研发团队，对上述研究目标进行了重点攻关，在迄今为止的七年多时间内，先后推出了一系列全新的“教学资源库式”的大学数学立体化教材，并配套建设了大学数学多媒体系列教学软件、大学数学试题库系统和大学数学立体化教材服务网站和课程建设网站．上述教学成果先后被全国200多所高等院校采用，一方面得到了国内同行的积极反馈和鼓励，另一方面也使上述研究工作的可持续发展得到了有力的支持．

此次经由中国人民大学出版社出版的高职高专数学立体化系列教材，共包含两大类五门课程，分别有**理工类**：高等数学，线性代数及概率论与数理统计三门课程；**经管类**：微积分，线性代数与概率统计两门课程．下面我们简单介绍一下该立体化教材的形式与内涵．

立体化教材的形式

1.《＊＊＊＊》(书)

2.《＊＊＊＊多媒体学习系统》(学生专用)(光盘)

其中，《＊＊＊＊》(书)的编写具有下列特点：

◆ 书中融入了数学历史与数学文化的教育．

◆ 在重要概念引入之前，深刻、简明地阐述其产生的背景及应用的总体思想．

◆ 以评注方式对定理、概念、公式的理解和应用做了进一步的总结．

◆ 依循序渐进的原则，以适当的难度梯度选编教学例题．

◆ 与教材同步配套，简明实用地编写了“大学数学实验指导”．

《＊＊＊＊多媒体学习系统》是一套大型的集成性、交互式和教学资源立体化

的学习软件，其中设计了多媒体教案、习题详解、实验教学、综合训练等功能模块，以充分满足读者们在教材内容学习、课后辅导答疑、数学实践以及综合提高训练等方面的需要．其主要特点有：

◆ 多媒体教案：按动态仿真教学方式设计了大量的教学动画，直击数学思想本质，利于突破学习中的重点、难点．

◆ 习题详解：逐题剖析解题思路，并以多媒体动画的形式给出了习题的求解过程和相关方法，利于学生课后学习．

◆ 数学试验：以交互、集成方式，设计了数学实验教学演示系统和实验案例库．

◆ 综合训练：总结每章教学知识点，通过精选的总习题进一步揭示解题的一般规律和技巧，利于学生综合提高．

◆ 知识点交互：利用多媒体开发软件的网页特性，为系统中的每个文件提供了丰富的知识点交互链接，利于学生高效率的学习．

立体化教材的配套建设服务

1.《＊＊＊＊多媒体教学系统》(教师专用)(光盘)

2.《大学数学试题库系统》

3. 大学数学立体化教材服务网站 (www.math123.cn)

其中，《＊＊＊＊多媒体教学系统》(光盘)，除了包含《＊＊＊＊多媒体学习系统》的主要功能模块以外，还具有以下特点：

◆ 多媒体教案：教学过程设计更适合教师进行课堂教学，补充了类型丰富的教学例题供教师选用，增加了课堂练习环节．

◆ 教学备课系统：搜集并整理了大量的教学资源和备课元素，可供教师修改选用，充分展现各位老师的个性化授课特点．

◆ 鼠标笔、文件放大以及知识点层叠交互功能，使教师在采用多媒体教学的同时，可以很好地保持传统教学的优势．

◆ 数学实验案例库与数学实验演示系统结合，可供教师现场与 Mathematica 系统交互进行实验教学．

《大学数学试题库系统》包含高等数学、线性代数、概率论与数理统计三大模块，试题量 25 000 余道，具有以下特点：

◆ 试题类型丰富：含选择题、填空题、计算题、证明题、综合应用题等．

◆ 组卷功能强大：教师只需根据考试要求直接选择考点和题型，通过智能组卷按钮，几秒钟内即可生成试卷和相应的答卷，通过预览，对不满意的试题，通过人工调整按钮，可以很方便地对该试卷中的试题进行增删与替换．

◆ 直接实现试卷的 Word 排版，并能在成卷后实现对试题的编辑修改．

◆ 大容量试卷库：试卷库可存放 3 300 余套各类试卷，库内存有数百套各类全

真试卷，供用户参考；用户可将自组试卷或交流试卷存入该试卷库内. 试卷库管理功能使用户能方便地实现对库内的试卷进行调用、修改及增删.

◆ 二次开发功能：使用单位可对系统进行包括试题的增删与替换，试卷库的存储管理，试题的分类标识加注以及试题难度的重新区分等.

大学数学立体化教材服务网 (www.math123.cn) 是专门为采用我们立体化教材的师生提供配套教学服务的网站. 网站设计了教材简介、教学系统、题库系统、下载园地、教学论坛、数学实验、背景资源、考研资讯、征订信息等主要栏目，并有丰富的教学资源供广大师生下载. 网站力图建设成为国内大学数学教与学的通用平台，在教学论坛栏目中，搜集、整理和转载了当前国内有关大学教育、专业教学等方面共同关心的议题和新闻，广大师生可在其中发表自己的意见和建议.

立体化教材的建设是一项崭新的事业. 令我们欣慰的是，与当初启动这个项目时相比，现在大面积采用立体化教材和多媒体教学的软硬件环境（从教育部的文件精神到大学的多媒体教室建设）和软硬件技术（从软件开发平台到计算机相关硬件技术）都已经非常成熟了. 当初许多专家认为多媒体教学无法发挥教师教学个性化的问题也因鼠标笔和手写屏系统的问世而迎刃而解了.

七年以来，尤其是 2002 年 9 月第一个《高等数学多媒体教学系统》(理工类) 出版以来，我们的工作得到了国内许多同行的长期支持和鼓励，在此特别表示感谢.

编　者

2007 年 3 月 20 日

目　录

第1章 行 列 式

历史上，行列式的概念是在研究线性方程组的解的过程中产生的．如今，它在数学的许多分支中都有着非常广泛的应用，是常用的一种计算工具．特别是在本门课程中，它是研究后面线性方程组、矩阵及向量组的线性相关性的一种重要工具．

§1.1 行列式的定义

一、二阶行列式的定义

记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为**二阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

其中数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 叫做行列式的**元素**，横排叫做**行**，竖排叫做**列**．元素 a_{ij} 的第一个下标 i 叫做**行标**，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 叫做**列标**，表明该元素位于第 j 列．由上述定义可知，二阶行列式是由 4 个数按一定的规律运算所得的代数和．这个规律性表现在行列式的记号中就是**"对角线法则"**．如图 1-1-1，把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，把 a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**副对角线**，于是，二阶行列式便等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 1-1-1

下面，我们利用二阶行列式的概念来讨论二元线性方程组的解．

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & (1.1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & (1.2) \end{cases}$$

$(1.1)\times a_{22}-(1.2)\times a_{12}$ 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12} \tag{1.3}$$

$(1.2)\times a_{11}-(1.1)\times a_{21}$ 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21} \tag{1.4}$$

利用二阶行列式的定义，记

$$D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则由式 (1.3)、式 (1.4) 可改写为

$$Dx_1=D_1, \quad Dx_2=D_2.$$

于是，在系数行列式 $D\neq 0$ 的条件下，式 (1.1)、式 (1.2) 有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

例1 解方程组 $\begin{cases} 2x_1+3x_2=8 \\ x_1-2x_2=-3 \end{cases}$.

解
$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2\times(-2)-3\times 1=-7,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=8\times(-2)-3\times(-3)=-7, \quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=2\times(-3)-8\times 1=-14,$$

因 $D\neq 0$，故题设方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-7}{-7}=1, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-14}{-7}=2.$$

二、三阶行列式的定义

类似地，我们定义三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

将上式右端按第一行的元素提取公因子，可得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}&=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (1.5)\end{aligned}$$

表示式 (1.5) 具有两个特点：

(1) 三阶行列式可表示为第一行元素分别与一个二阶行列式乘积的代数和；

(2) 元素 a_{11}, a_{12}, a_{13} 后面的二阶行列式是从原三阶行列式中分别划去元素 a_{11}, a_{12}, a_{13} 所在的行与列后剩下的元素按原来顺序所组成的，分别称其为元素 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的**余子式**，记为 M_{11}, M_{12}, M_{13}，即

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称其为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

于是，表示式 (1.5) 也可以表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}A_{1j}. \tag{1.6}$$

表示式 (1.6) 称为三阶行列式**按第一行展开的展开式**.

注：根据上述推导过程，读者也可以得到三阶行列式按其它行或列展开的展开式，例如，三阶行列式第二列展开的展开式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}=\sum_{i=1}^{3}a_{i2}A_{i2}. \tag{1.7}$$

此外，关于三阶行列式的上述概念也可以推广到更高阶的行列式中去.

例 2 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

解 按第一行展开，得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}=1\times A_{11}+2\times A_{12}+3\times A_{13}$$

$$=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}+3\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=1\times 0+2\times(-29)+3\times 0=-58.$$

注：读者可尝试将行列式按第二列展开进行计算.

类似于二元线性方程组的讨论，对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

若系数行列式 $D \neq 0$，则该方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 3　解三元线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+\ x_3=-2 \\ 2x_1+\ x_2-3x_3=1 \\ -x_1+\ x_2-\ x_3=0 \end{cases}$.

解　注意到系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}-2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=1\times2-2\times5+1\times3=-5\neq0,$$

同理，可得

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-10,\quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-5,$$

故所求方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\qquad x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$

三、n 阶行列式的定义

在前面，我们首先定义了二阶行列式，并指出了三阶行列式可通过按行或列展开的方法转化为二阶行列式来计算．一般地，可给出 n 阶行列式的一种归纳定义．

定义　由 n^2 个元素 $a_{ij}\,(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 组成的记号

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**，其中横排称为行，竖排称为列．它表示一个由确定的递推运算关系所得到的数：当 $n=1$ 时，规定 $D_1=|a_{11}|=a_{11}$；当 $n=2$ 时，

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21};$$

当 $n>2$ 时，

$$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}. \tag{1.8}$$

其中 A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**，且

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

这里 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的**余子式**，它为由 D_n 划去元素 a_{ij} 所在的行与列后余下的元素按原来顺序构成的 $n-1$ 阶行列式．

例如，在四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中，元素 a_{32} 的余子式和代数余子式为

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},\quad A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}.$$

例 4 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -5 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 7 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

解 由行列式的定义，有

$$\begin{aligned} D_4 &= 3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix}+(-5)\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 7 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 3\left[1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}\right] \\ &\qquad +5\left[(-4)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}\right] \\ &= 3[-7+2(-10-28)]+5[(-4)\cdot(-10-28)-(-12+21)]=466 \end{aligned}$$

例 5 计算行列式 $D_1=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$.

解 由行列式的定义，有

$$\begin{aligned} D_1 &= a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 \\ 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \\ &= -a_{12}\cdot a_{24}(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} a_{31} & 0 \\ 0 & a_{43} \end{vmatrix}=-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}. \end{aligned}$$

表示式 (1.8) 称为 n 阶行列式**按第一行展开的展开式**．事实上，我们可以证明 n

阶行列式可按其任意一行或列展开，例如，将定义中的 n 阶行列式按第 i 行或第 j 列展开，可得展开式

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{1.9}$$

或

$$D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \quad (j=1,2,\cdots,n). \tag{1.10}$$

例 6 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 8 \\ 4 & -9 & 2 & 10 \\ -1 & 6 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

解 因为第三列中有三个零元素，可按第三列展开，得

$$D = 2 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -1 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix},$$

对于上面的三阶行列式，按第三行展开，得

$$D = -2 \cdot 5 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -200.$$

注：由此可见，计算行列式时，选择先按零元素多的行或列展开可大大简化行列式的计算，这是计算行列式的常用技巧之一.

四、几个常用的特殊行列式

形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad 与 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行列式分别称为**上三角形行列式**与**下三角形行列式**，其特点是主对角线以下(上)的元素全为零.

我们先来计算下三角形行列式的值. 根据 n 阶行列式的定义，每次均通过按第一行展开的方法来降低行列式的阶数，而每次第一行都仅有第一项不为零，故有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

对上三角形行列式，我们可每次通过按最后一行展开的方法来降低行列式的阶数，而每次最后一行都仅有最后一项不为零，同样可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，非主对角线上元素全为零的行列式称为**对角行列式**，易知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

综上所述可知，上、下三角形行列式和对角行列式的值都等于其主对角线上元素的乘积.

习题 1-1

1. 计算下列二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

3. 求行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中元素 2 和 -2 的代数余子式.

4. 写出行列式 $D=\begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 中元素 $a_{23}=-1$，$a_{33}=4$ 的代数余子式.

5. 已知四阶行列式 D 中第 3 列元素依次为 $-1, 2, 0, 1$，它们的余子式依次为 $5, 3, -7, 4$，求 D.

6. 证明：$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$.

7. 按第 3 列展开下列行列式，并计算其值：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c & -1 \\ -1 & 1 & d & 0 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

§ 1.2 行列式的性质

一、行列式的性质

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T} 或 D'，即若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

注：由性质 1 知道，行列式中的行与列具有相同的地位，行列式的行具有的性质，它的列也同样具有.

性质 2 交换行列式的两行 (列)，行列式变号.

注：交换 i, j 两行 (列) 记为 $r_i \leftrightarrow r_j\ (c_i \leftrightarrow c_j)$.

推论 1 若行列式中有两行 (列) 的对应元素相同，则此行列式为零.

证明 互换 D 中相同的两行(列)，有 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 3 用数 k 乘行列式的某一行 (列)，等于用数 k 乘此行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD.$$

注：第 i 行 (列) 乘以 k，记为 $r_i \times k$ (或 $c_i \times k$).

推论 2 行列式的某一行(列) 中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 3 行列式中若有两行(列) 元素成比例，则此行列式为零.

例如，有行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix}$，因为第一列与第二列对应元素成比例，根据性质 3 的推论 3，可直接得到

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

例 1 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$，求 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -3a_{11} & a_{12} & 5a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

$$= -2\times(-3)\times 5\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2\times(-3)\times 5\times 1 = 30.$$

性质 4 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_1 + D_2.$$

性质 5 将行列式的某一行(列)的所有元素都乘以数 k 后加到另一行(列)对应位置的元素上，行列式的值不变.

例如，以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上，则有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_1\ (i\neq j).$$

证明 $D_1 \xlongequal{\text{性质4}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{性质3推论3}} D+0=D.$$

注：以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上，记作 r_i+kr_j；以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上，记作 c_i+kc_j.

二、行列式的计算

计算行列式时，常用行列式的性质，把它化为三角形行列式来计算. 例如，化为上三角形行列式的步骤是：

如果第一列第一个元素为 0，先将第一行与其它行交换使得第一列第一个元素不为 0，然后把第一行分别乘以适当的数加到其它各行，使得第一列除第一个元素外