高等院校**精品课**系列教材

高 等 院 校 经 济 数 学 系 列 教 材

高等数学

（第二版）

上海财经大学应用数学系　编

GAODENG
SHUXUE

上海财经大学出版社

●高等院校精品课系列教材●
高等院校经济数学系列教材

高等数学

（第二版）

上海财经大学应用数学系　编

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/上海财经大学应用数学系编．—2版．—上海：上海财经大学出版社，2008.3

高等院校精品课系列教材

高等院校经济数学系列教材

ISBN 978-7-81049-974-3/O.18

Ⅰ．高…　Ⅱ．上…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 185569 号

□ 责任编辑　刘光本

□ 封面设计　周卫民

GAODENG SHUXUE

高　等　数　学

（第二版）

上海财经大学应用数学系　编

上海财经大学出版社出版发行

（上海市武东路 321 号乙　邮编 200434）

网　　址：http://www.sufep.com

电子邮箱：webmaster @ sufep.com

全国新华书店经销

同济大学印刷厂印刷

宝山葑村书刊装订厂装订

2008 年 3 月第 2 版　2008 年 3 月第 1 次印刷

787mm×960mm　1/16　32.25 印张　617 千字

印数：15 001—20 000　　定价：36.00 元

前　言

随着经济金融及管理等学科研究和应用的不断深入，对数学的要求在不同层次上也都在不断地提高。不仅在数学的知识面上需要扩大，而且在理论的深度上需要加大。因此，我们这些从事经济金融及管理类本科生的《高等数学》和《微积分》教学多年的工作者义不容辞地要做好这个方面的工作。

起初，经管类本科生的数学用教材大都称为《微积分》，现在有的仍然用之。后来，相应的《高等数学》作为经管类本科生的数学用教材也相继出现。为促进相关的数学教学起到了不少作用。从书名看，《微积分》和《高等数学》好像有很大的区别，其实主要的内容是一致的。只是，《高等数学》在理论上和知识面上都高于《微积分》。不过这样小小的区分，对不同专业的不同要求的教学提供方便的教材，是非常有益的。

国内外的《微积分》(Calculus)和《高等数学》(Higher Mathematics)教材的版本可以说数以千计。对不同的国家、不同层次的学生都起着相应的作用，都各自培养出相应的人才。我们上海财经大学近五年来，上到校领导，下到有关的师生，都非常重视数学的教学和研究，学校将《高等数学》作为精品课程来认真建设。编写了《高等数学》教材，反映不错，一版再版。我们这些年的使用也有很大的效用，2006 年我校学生考研的高数成绩有了很大的提高。

但是，在教学过程中我们发现确实也有一些方面需要改进，如所有经管类学生都用同一教材有失实事求是之作风。因此，我们将在我系原有的《高等数学》基础上，进一步完善提高，融入我们近年来的教学体会，编写这里的两本针对经济金融及管理等学科使用的《高等数学》和《微积分》，这将对培养相应的管理和研究人才起到一定的

作用。

编写时，以教育部的教学大纲为准绳，以研究生考试大纲为核心，以专业要求为目标。侧重于数学的必要的理论、全面的知识及经济中的应用，培养学生具有良好的数学素养、严谨的思维方式、严格的推理习惯以及应用数学于相应专业的能力，以达到培养高级的经济类人才的目的。叙述深入浅出，经管应用突出，可读性强，便于教与学。通过这门课程的学习，学生可以掌握观察事物、分析事物的思路以及严密的推理观念。使学生不仅学到了知识，更是开启了智慧，从而对学生之后的进一步学习和工作都有极其有益。

为了做好这一工作，上海财经大学应用数学系非常重视，成立了以系主任梁治安教授、系副主任何其祥先生为核心的编写小组。

参加编撰的老师是：戴滨林，卢慧芳，罗万钧，叶玉全，杨爱珍，殷承元，魏枫。

本册《高等数学》由叶玉全、殷承元负主责统编。其他分工为：1～3 章由叶玉全同志编写，4～6 章由杨爱珍同志编写，7～9 章由戴滨林同志编写，10～12 章由殷承元同志编写。

上海财经大学出版社的刘光本博士为本书的出版付出了艰苦的劳动。他的认真编辑为本书增色不少，在此表示我们衷心的谢意。

尽管我们认真编撰、仔细审查，但毕竟我们的水平有限，错误难免，我们真诚希望广大读者多多指教。

上海财经大学应用数学系

2008 年 2 月

目　录

第一章　函数与极限

函数的微积分及其应用是高等数学研究的内容，而极限是研究函数的微积分的工具. 正确地理解极限理论，掌握好求极限的基本方法，对学好高等数学是十分重要的. 本章将介绍函数、极限以及函数连续性等基本内容.

第一节　函　数

一、函数概念及其表示法

定义 1.1　设 X 和 Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按照法则 f 在 Y 中有惟一确定的元素与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作

$$f: X \to Y,$$

其中 y 称为元素 x（在映射 f 下）的像，并且记作 $f(x)$，即

$$y=f(x),$$

而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下）的原像；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f=X$；集合 X 中所有元素的像所组成的集合称为映射的 f 值域，记作 R_f 或 $f(X)$，即

$$R_f=f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}.$$

函数作为一种特殊的映射，定义如下：

定义 1.2　设数集 $D\subset\mathfrak{R}$（$\mathfrak{R}$ 为实数集），则称映射 $f: D\to\mathfrak{R}$ 为定义在 D 上的函

数，通常简记为

$$y=f(x),x\in D,$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 为定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$.

在上面的函数定义中，对每个 $x\in D$，按对应法则 f，总有惟一确定的值 y 与之对应，这个值称为函数 f 在 x 处的函数值，记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系称为函数关系. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

从函数的定义中不难看出，定义域与对应法则是构成函数的两个基本要素. 如果两个函数的定义域与对应法则都分别相同，则称这两个函数相同.

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\lg(4-x^2)+\arcsin(2x-1)$； (2) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{|x|-x}$.

解 (1) 由 $\begin{cases}4-x^2>0\\|2x-1|\leqslant 1\end{cases}$ 可得 $0\leqslant x\leqslant 1$，于是，所求的函数定义域为 $[0,1]$.

(2) 由 $\begin{cases}x+2\geqslant 0\\|x|-x\neq 0\end{cases}$ 可得 $-2\leqslant x<0$，所求的函数定义域为 $[-2,0)$.

例 2 某工厂生产某型号车床，年产量为 a 台，分若干批进行生产，每批生产准备费为 b 元，设产品均匀投入市场，且上一批用完后立即生产下一批，即平均库存量为批量的一半. 设每台每年库存费为 c 元. 显然，生产批量大则库存费高，生产批量少则批数增多，因而生产准备费高. 为了选择最优批量，试求出一年中库存费与生产准备费的和同批量的函数关系，并求得到的函数的定义域.

解 设批量为 x，库存费与生产准备费的和为 $f(x)$，那么每年生产的批数为 $\dfrac{a}{x}$（设其为整数）. 于是，生产准备费为 $b\cdot\dfrac{a}{x}$，因库存费为 $c\cdot\dfrac{x}{2}$. 因此可得

$$f(x)=b\cdot\frac{a}{x}+c\cdot\frac{x}{2}=\frac{ab}{x}+\frac{cx}{2}.$$

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,a]$，但注意到本题中的 x 为车床的台数，批数 $\dfrac{a}{x}$ 为整数，所以 x 只能取 $(0,a]$ 中的正整数.

函数的表示法主要有三种：解析法、表格法和图示法. 用图形法表示函数是基于函数图形的概念，坐标平面上的点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x),x\in D$ 的图形.

在函数的定义中,并不要求当自变量变化时函数的值一定要改变,因此即使所有的 x 值都对应于一个 y 值也是允许的,即常数函数 $y=c$.

在实际问题中,经常会遇到用几个式子表示一个函数的情形,这种在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同式子表示的函数,通常称为分段函数.它仍然是一个函数,而不是几个函数.

例 3　函数

$$y=|x|=\begin{cases}x,x\geqslant 0\\ -x,x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$,它的图形如图 1—1 所示.该函数称为绝对值函数.

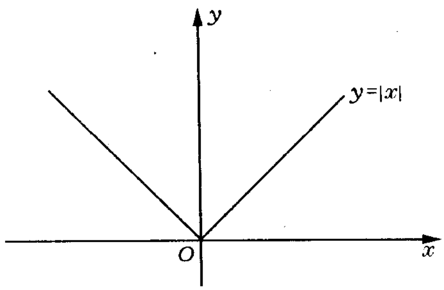

图 1—1

例 4　取整函数 $y=[x]$表示不超过 x 的最大整数,即 $y=[x]=n,n\leqslant x<n+1$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$是一个分段函数,它的定义域为$(-\infty,+\infty)$,图形如图 1—2 所示.

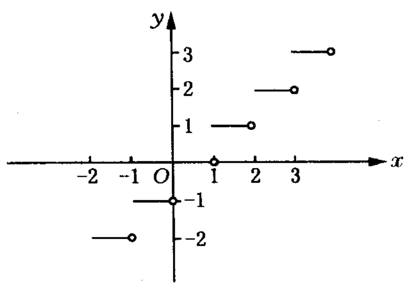

图 1—2

例 5 函数 $g(x)=\begin{cases}x+3, & 2<|x|\leqslant 4\\ 2x^2+1, & |x|\leqslant 2\end{cases}$是一个分段函数,定义域为 $D_g=[-4,-2)\cup(2,4]\cup[-2,2]=[-4,4]$,图形如图 1—3 所示.

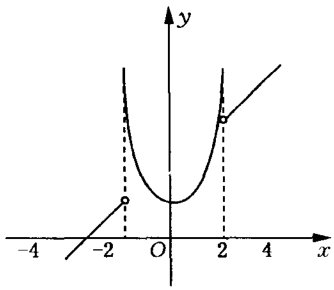

图 1—3

例 6 函数 $y=D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时}\end{cases}$是一个分段函数,把它称为狄利克雷函数,它的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$.

二、函数的几种特性

有些函数具有某些特殊性质,掌握这些性质对研究函数很有帮助.

1. 函数的有界性

定义 1.3 设函数 $f(x)$的定义域为 D,数集 $X\subset D$,若 $\exists K_1$,使得 $\forall x\in X$ 恒有 $f(x)\leqslant K_1$ 成立,则称函数 $f(x)$在 X 上有上界 K_1;若 $\exists K_2$,使得 $\forall x\in X$ 恒有 $f(x)\geqslant K_2$ 成立,则称函数 $f(x)$在 X 上有下界 K_2;若 $\exists M>0$,使得 $\forall x\in X$ 恒有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,则称函数 $f(x)$在 X 上有界. 否则,称函数 $f(x)$在 X 上无界.

这里记号"$\forall$"表示任给的(或任意的),"$\exists$"表示存在.

显然,在某区间上有界函数 $f(x)$的图形一定在该区间上介于两条平行直线 $y=\pm M$ 之间. 有界函数必有上界和下界.

例如,$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界,是因为$|\sin x|\leqslant 1$,$|\cos x|\leqslant 1$;函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 在定义域$[-1,1]$上有界,是因为 $0\leqslant y\leqslant 1$. 而函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$内是无界函数,是因为它只有下界而无上界.

注意,函数的有界性与所选的数集有关. 例如,函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$内无界,但在$(1,2)$内有界.

例 7　证明函数 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的.

证明　因为 $(1-x)^2\geqslant 0$，所以 $|1+x^2|\geqslant 2|x|$，所以

$$|f(x)|=\left|\frac{x}{x^2+1}\right|=\frac{2|x|}{2|1+x^2|}\leqslant\frac{1}{2}$$

对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都成立. 于是可得函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的.

2. 函数的奇偶性

定义 1.4　如果函数 $f(x)$ 在一个关于原点对称的实数集 D 内有定义，若 $\forall x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；若 $\forall x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

例如，$y=x^3$、$y=\sin x$ 是奇函数，而 $y=x^2$，$y=\cos x$ 是偶函数. 显然，奇函数的图形关于原点对称，而偶函数的图形关于 y 轴对称.

例 8　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 0$；(2) $f(x)=\begin{cases}-x^3+1, & x<0\\ x^3+1, & x\geqslant 0\end{cases}$.

解 (1) 由于

$$\begin{aligned}f(-x)&=\frac{1}{a^{-x}+1}-\frac{1}{2}=\frac{a^x}{1+a^x}-\frac{1}{2}=\frac{a^x+1-1}{1+a^x}-\frac{1}{2}\\&=1-\frac{1}{1+a^x}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{1+a^x}+\frac{1}{2}\\&=-f(x),\end{aligned}$$

因此，$f(x)$ 是奇函数.

(2) 由于

$$\begin{aligned}f(-x)&=\begin{cases}-(-x)^3+1, & -x<0\\ (-x)^3+1, & -x\geqslant 0\end{cases}\\&=\begin{cases}x^3+1, & x>0\\ -x^3+1, & x\leqslant 0\end{cases}\\&=\begin{cases}x^3+1, & x\geqslant 0\\ -x^3+1, & x<0\end{cases}\\&=f(x),\end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 是偶函数.

3. 函数的单调性

定义 1.5　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 若对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，

(1) 恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)<f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在该区间上是单调

(或严格单调)增加函数；

(2) 恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称函数 $f(x)$ 在该区间上是单调(或严格单调)减少函数.

(严格)单调增加与(单调)减少函数统称为单调函数. 例如，$y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 内单调减少，在 $[0,+\infty)$ 内单调增加，但在整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内它不是单调函数.

例 9 判断函数 $y=x^3$ 的单调性.

解 由于
$$x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=(x_1-x_2)\left[\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2\right],$$
当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $x_1^3<x_2^3$. 因此，函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加.

4. 函数的周期性

定义 1.6 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个非零常数 T，使得 $\forall x\in D$，有 $(x\pm T)\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为周期函数. T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常所说的周期函数的周期是指其最小正周期.

例如，$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 都是周期为 2π 的周期函数，而 $y=\tan x$ 与 $y=\cot x$ 都是周期为 π 的周期函数.

例 10 设函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，试求函数 $f(ax+b)$ 的周期，其中 a,b 为常数，且 $a>0$.

解 因为
$$f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right]=f(ax+T+b)=f[(ax+b)+T]=f(ax+b),$$
所以根据周期函数的定义，$f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{a}$.

例 11 求函数 $y=\sin^4x+\cos^4x$ 的周期.

解 因为
$$\begin{aligned}y&=\sin^4x+\cos^4x\\&=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cdot\cos^2x\\&=1-\frac{\sin^2 2x}{2}=1-\frac{1-\cos4x}{4}\\&=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos4x,\end{aligned}$$
所以，y 的周期为 $T=\frac{\pi}{2}$.

三、反函数

定义 1.7　设函数 $y=f(x)$，若将 y 作为自变量，x 作为因变量，则由关系式 $y=f(x)$ 惟一确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数. 相对于反函数 $x=\varphi(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

习惯上，自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，因此 $x=\varphi(y)$ 可写为 $y=\varphi(x)$ 或用 $y=f^{-1}(x)$ 表示. 显然，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数. 把直接函数 $y=f(x)$ 和反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形画在同一坐标平面上，这两函数的图形关于直线 $y=x$ 是对称的. 本质上，定义 1.7 中直接函数 y 是关于 x 的函数，反函数 x 是关于 y 的函数，因此，直接函数和反函数的图像是重合的.

需要指出，并非所有的函数都存在反函数. 例如，函数 $y=x^2$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内就没有反函数. 只有一一对应函数，才存在反函数. 严格单调增(或减)的函数，显然是一一对应函数，所以必存在反函数.

例如，由 $y=-\sqrt{x-1}$ 可确定出 $x=y^2+1(y\leqslant 0)$，因此函数 $y=-\sqrt{x-1}$ 的反函数为 $y=x^2+1,x\leqslant 0$.

四、初等函数

1. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为基本初等函数. 现分别简单介绍如下：

(1) 幂函数. $y=x^\mu$，μ 为任意常数，其定义域随 μ 的不同而不同. 例如，当 $\mu=3$ 时，$y=x^3$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$；当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时，$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ 的定义域是 $[0,+\infty)$；当 $\mu=-\frac{1}{2}$ 时，$y=x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域是 $(0,+\infty)$. 但无论 μ 取什么值，幂函数在 $(0,+\infty)$ 内总有定义.

(2) 指数函数. $y=a^x$，$a>0$ 且 $a\neq 1$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 为单调减函数；当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 为单调增函数，如图 1－4 所示.

在实际中，常出现以 e 为底的指数函数 $y=e^x$，其中 $e\approx 2.718\,28\cdots$ 是一个无理数.

(3) 对数函数是指数函数的反函数，记作 $y=\log_a x$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$，其定义域为 $(0,+\infty)$. 图 1－5 展示了 a 取不同值时对应的对数函数的图形.

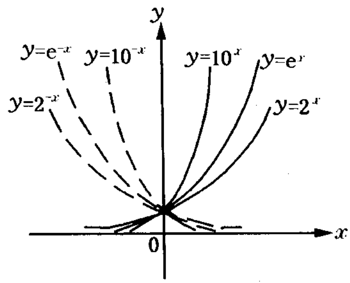

图 1—4

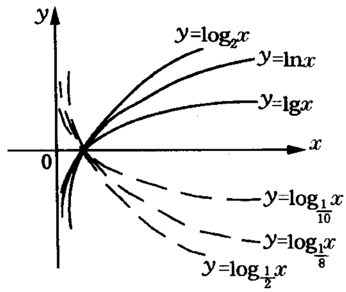

图 1—5

以 10 为底的对数函数 $\log_{10}x$ 称为常用对数函数，简记为 $y=\lg x$；而以 e 为底的对数函数称为自然对数函数，简记为 $y=\ln x$.

根据对数的定义，可以推出两个常用等式：

$a^{\log_a N}=N(a>0,a\neq1)$称为对数恒等式，$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$称为换底公式.

(4) 常用的三角函数有：正弦函数 $y=\sin x$；余弦函数 $y=\cos x$；正切函数 $y=\tan x$；余切函数 $y=\cot x$；正割函数 $y=\sec x$；余割函数 $y=\csc x$.（注：其中自变量 x 以弧度作单位来表示）

正弦函数与余弦函数的定义域都为$(-\infty,+\infty)$. 正切函数与正割函数的定义域为$\left\{x\mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\right\}$. 余切函数与余割函数的定义域为$\{x\mid x\neq k\pi,k\in Z\}$.

上面给出的几个三角函数都是周期函数：$\sin x$，$\cos x$，$\sec x$，$\csc x$ 的最小正周期为 2π；$\tan x$ 与 $\cot x$ 的最小正周期为 π. 它们的图形如图 1—6、图 1—7 所示.