课标本

教材完全解读

王后雄学案

总策划：熊 辉

高中数学 必修4

配北师大版

丛书主编：王后雄
本册主编：王兴旺

X导航 丛书系列

接力出版社 Jieli Publishing House
全国优秀出版社 SPLENDID PUBLISHING HOUSE IN CHINA

课标本

教材完全解读

王后雄学案

高中数学 必修4

配北师大版

丛书主编：王后雄

本册主编：王兴旺

编　　委：郑远忠　张　丹　史开锋　柳幼云　帅国英　徐瑞金　王早春　张文才　范培云　牛小军　牛冀平　张水应　吴秋寿　叶春生　余启贵　王新得　王宏伟　余启章

导航 丛书系列

接力出版社 Jieli Publishing House

全国优秀出版社

丛书策划：熊　辉
责任编辑：杨爱兵
责任校对：姜　荣
封面设计：木头羊

JIAOCAI WANQUAN JIE DU
GAOZHONG SHUXUE
教材完全解读
高中数学　必修4　配北师大版
丛书主编：王后雄　本册主编：王兴旺
*
出版人：黄　俭
接力出版社出版发行
广西南宁市园湖南路9号　邮编：530022
E-mail: jielipub@public.nn.gx.cn
嘉鱼县金帆印务有限公司印刷　全国新华书店经销
*
开本：889毫米×1194毫米　1/16　印张：11.25　字数：299千
2007年10月第2版　2007年10月第2次印刷
ISBN 978-7-80679-755-6/G·439
定价：17.70元

教材完全解读

本书特点

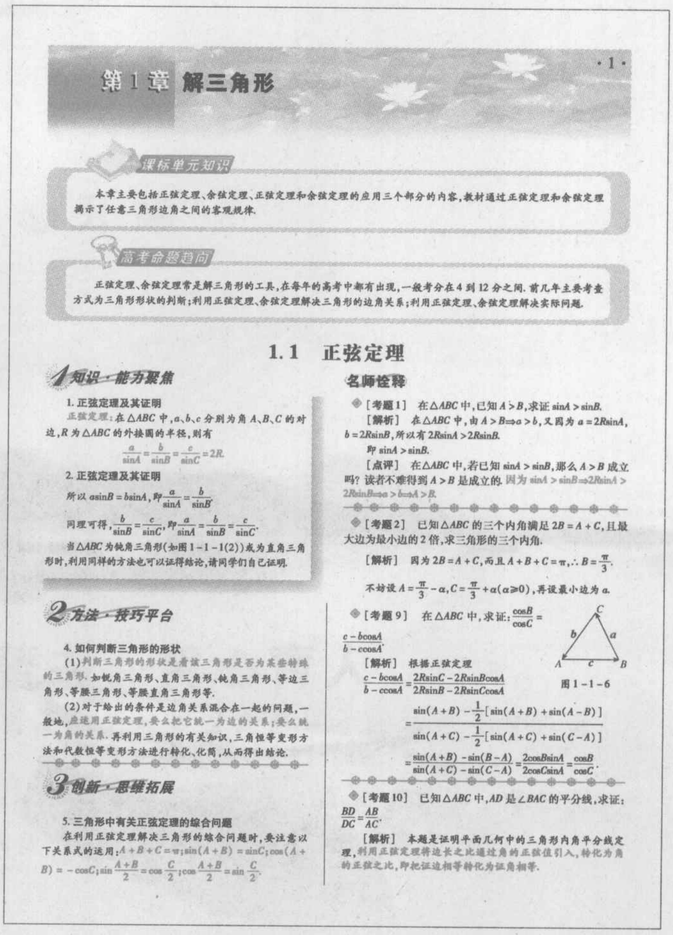
基础教育新课标改革已如火如荼地展开，新课程教材助学助考的开发问题已成为人们关注的焦点。应广大读者的要求，我们特邀来自国家新课程改革试验区和国家级培训班的专家编写课标版《教材完全解读》丛书。该系列丛书能帮助学生掌握新的课程标准，让学生能够按照课程理念和教材学习目标要求科学、高效地学习。该书以“透析全解、双栏对照、服务学生”为宗旨，助您走向成功。

这套丛书在整体设计上有两个突出的特点：一是双栏对照，对教材全解全析，在学科层次上力求讲深、讲透、讲出特色；另一个就是注重典型案例学习，突出鲜活、典型和示范的特点。

为了让您更充分地理解本书的特点，挑战学习的极限，请您在选购和使用本书时，先阅读本书的使用方法图示。

3层完全解读

从知识、方法、思维三个方面诠释教材知识点和方法点，帮您形成答题要点、解题思维，理清解题思路、揭示考点实质和内涵。



·1·

第1章 解三角形

课标单元知识

本章主要包括正弦定理、余弦定理、正弦定理和余弦定理的应用三个部分的内容，教材通过正弦定理和余弦定理揭示了任意三角形边角之间的客观规律.

高考命题趋向

正弦定理、余弦定理常是解三角形的工具，在每年的高考中都有出现，一般考分在4到12分之间. 前几年主要考查方式为三角形形状的判断；利用正弦定理、余弦定理解决三角形的边角关系；利用正弦定理、余弦定理解决实际问题.

1.1 正弦定理

1 知识·能力聚焦

1. 正弦定理及其证明

正弦定理：在$\triangle ABC$中，a、b、c分别为角A、B、C的对边，R为$\triangle ABC$的外接圆的半径，则有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

2. 正弦定理及其证明

所以$a\sin B=b\sin A$，即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

同理可得，$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

当$\triangle ABC$为钝角三角形(如图1-1-1(2))或为直角三角形时，利用同样的方法也可以证得结论，请同学们自己证明.

2 方法·技巧平台

4. 如何判断三角形的形状

(1)判断三角形的形状是看该三角形是否为某些特殊的三角形. 如锐角三角形、直角三角形、钝角三角形、等边三角形、等腰三角形、等腰直角三角形等.

(2)对于给出的条件是边角关系混合在一起的问题，一般地，应运用正弦定理，要么把它统一为边的关系；要么统一为角的关系. 再利用三角形的有关知识，三角恒等变形方法和代数恒等变形方法进行转化、化简，从而得出结论.

3 创新·思维拓展

5. 三角形中有关正弦定理的综合问题

在利用正弦定理解决三角形的综合问题时，要注意以下关系式的运用：$A+B+C=\pi$；$\sin(A+B)=\sin C$；$\cos(A+B)=-\cos C$；$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$；$\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$.

名师诠释

[考题1] 在$\triangle ABC$中，已知$A>B$，求证$\sin A>\sin B$.

[解析] 在$\triangle ABC$中，由$A>B\Rightarrow a>b$，又因为$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，所以有$2R\sin A>2R\sin B$.

即$\sin A>\sin B$.

[点评] 在$\triangle ABC$中，若已知$\sin A>\sin B$，那么$A>B$成立吗？读者不难得到$A>B$是成立的. 因为$\sin A>\sin B\Rightarrow 2R\sin A>2R\sin B\Rightarrow a>b\Rightarrow A>B$.

[考题2] 已知$\triangle ABC$的三个内角满足$2B=A+C$，且最大边为最小边的2倍，求三角形的三个内角.

[解析] 因为$2B=A+C$，而且$A+B+C=\pi$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$.

不妨设$A=\frac{\pi}{3}-\alpha$，$C=\frac{\pi}{3}+\alpha(\alpha\geqslant 0)$，再设最小边为$a$.

[考题9] 在$\triangle ABC$中，求证：$\frac{\cos B}{\cos C}=\frac{c-b\cos A}{b-c\cos A}$.

[解析] 根据正弦定理

$$\frac{c-b\cos A}{b-c\cos A}=\frac{2R\sin C-2R\sin B\cos A}{2R\sin B-2R\sin C\cos A}$$

$$=\frac{\sin(A+B)-\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]}{\sin(A+C)-\frac{1}{2}[\sin(A+C)+\sin(C-A)]}$$

$$=\frac{\sin(A+B)-\sin(B-A)}{\sin(A+C)-\sin(C-A)}=\frac{2\cos B\sin A}{2\cos C\sin A}=\frac{\cos B}{\cos C}.$$

图1-1-6

[考题10] 已知$\triangle ABC$中，AD是$\angle BAC$的平分线，求证：$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

[解析] 本题是证明平面几何中的三角形内角平分线定理，利用正弦定理将边长之比通过角的正弦值引入，转化为角的正弦之比，即把证边相等转化为证角相等.

教辅大师王后雄教授、特级教师科学超前的体例设置，帮您赢得了学习起点，成就您人生的夙愿。

——题记

整体训练方法

针对本节重点、难点、考点及考试能力达标所设计的题目。对每道题目标明能力层级，用A、B、C表示试题的难度系数，它们依次代表基础题、中难题、难题。

解题错因导引

“点击考点”栏目导引每一道试题的“测试要点”。当您解题出错时，建议您通过“测试要点”的指向，弄清致错原因，形成正确答案。

·2· 教材完全解读·苏教高中数学（必修5）

能力·题型设计

[1A]在$\triangle ABC$中，已知$a=8, B=60°, C=75°$，则$b=$(　　).

A. $4\sqrt{2}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. $4\sqrt{6}$　　D. $\frac{32}{3}$

[2A]在$\triangle ABC$中，一定成立的等式是(　　).

A. $a\sin A=b\sin B$　　B. $a\cos A=b\cos B$

C. $a\sin B=b\sin A$　　D. $a\cos B=b\cos A$

点击考点

测试要点1

测试要点1
2004年天津期末统考试题

教材课后习题解答

课本第9页练习

1. B
2. (1)$a=3+\sqrt{3}, b=2\sqrt{3}$　(2)$a=c=4\sqrt{3}$
3. (1)$B=57.7°, A=97.3°, a=46.9$
(2)$A=90°, C=60°, c=22.52$

课本第10页练习

1. 54.95
2. (1)直角三角形　(2)等腰或直角三角形
3. A

最新5年高考名题诠解

1. (2006年山东,4)在$\triangle ABC$中，角A、B、C的对边分别为a、b、c，已知$A=\frac{\pi}{3}, a=\sqrt{3}, b=1$，则$c=$(　　).

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{3}-1$　　D. $\sqrt{3}$

[解析]　由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$得$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{1}{2}$，而$A=\frac{\pi}{3}, a>b$，则$A>B$，$\therefore B=\frac{\pi}{6}$，从而$C=\frac{\pi}{2}, c^2=a^2+b^2$，故$c=2$.

[答案]　B

单元知识梳理与能力整合

归纳·总结·专题

一、知识结构

二、能力整合

1. 解三角形常见类型及解法

在三角形的6个元素中要知三个(除三角外)才能求解，常见类型及其解法见下表：

第1章　知识与能力同步测控题

(测试满分:150分　测试时间:90分钟)

一、选择题(12×5分=60分)

1. 在$\triangle ABC$中，若$\sin A:\sin B=2:3$，则边$b:a$等于(　　).

A. 3∶2或9∶4　　B. 2∶3　　C. 9∶4　　D. 3∶2

2. 在$\triangle ABC$中，$\sin^2A-\sin^2C+\sin^2B=\sin A\cdot\sin B$，则角C为(　　).

A. 60°　　B. 45°　　C. 120°　　D. 30°

答案与提示

第1章　解三角形

1.1　正弦定理

1. C　由$B=60°, C=75°$可知$A=45°$，$\therefore \frac{8}{\sin45°}=\frac{b}{\sin60°}$，$\therefore b=4\sqrt{6}$.

2. C　选项A可变为：$a^2=b^2$；选项B可变为：$\sin2A=\sin2B$；选项C可变为：$ab=ba$；选项D可变为：$\sin A\cos B=\sin B\cos A$，即：$\sin(A-B)=0$，故只有选项C一定成立.

3. D　由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，$\therefore \frac{5\sqrt{2}}{\sin30°}=\frac{10}{\sin C}\Rightarrow \sin C=$

教材课后习题解答

帮助您弥补课堂上听课的疏漏。答案准确，讲解繁简适度、到位、透彻。

最新5年高考名题诠解

汇集高考名题，讲解细致入微，教纲、考纲，双向例释；练习、考试，讲解透彻；多学、精练，效果显著。

单元知识整合

单元知识与方法网络化，帮助您将本单元所学教材内容系统化，形成对考点知识二次提炼与升华，全面提高学习效率。

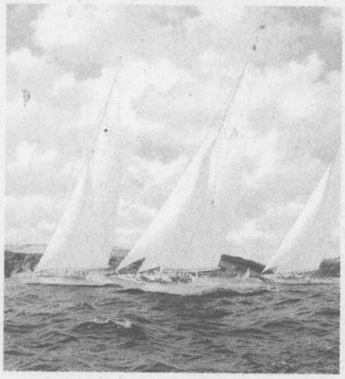
考试高分保障

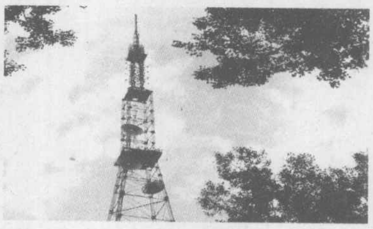
精心选编涵盖本章节或阶段性知识和能力要求的检测试题，梯度合理、层次分明，与同步考试接轨，利于您同步自我测评，查缺补漏。

点拨解题思路

试题皆提供详细的解题步骤和思路点拨，鼓励一题多解。不但知其然，且知其所以然，帮使您养成良好规范的答题习惯。

目 录





知识与方法

阅读索引

第一章 三角函数

第二章 平面向量

学法指津

——怎样学好高中数学

每一个正在高中学习数学的学生,他们有着同样的教材,有大体相同的上课时间,用的是大致一样的参考资料,可以说所处的环境是基本相同的,但是学习效果可能有很大差异.这让许多很用功但是成绩还不是很理想的学生及其家长和老师很担忧.有些学生甚至对自己产生了怀疑,感觉到数学真是太难学了,充满迷惑甚至不知所措.其实我们身边不乏数学成绩优异的高手,也经常见到由落后到领先的成功范例.别人能做到的事情我们为什么不能做到呢?并且应该完全有信心做得更好,这就需要我们在学法上有所改进、创新并提高.

怎样才能学好高中数学,在学习中保持一个平稳的上升势头,进入学习的良性循环呢?纵观那些数学成绩优异的佼佼者们,他们成功的经验与方法无外乎做好以下几个方面:

(一)激发兴趣,树立信心

"兴趣是最好的老师",浓厚的兴趣可以培养求知欲,激发强大的学习动力.数学是思维的体操,它是一门非常奇妙而有趣、充满美感的科学,只要你有一双善于发现、敢于发现的眼睛,你就能找到数学的魅力所在,会对它产生兴趣.诚然,数学也是较难学的,但是其最大的魅力也就在于此.要学好它首要的一点就是自己对自己要有信心,否则,走不出心理的束缚,不能充分发挥自己的主观能动性,那么就很难有所成就.信心来自于哪里?它应该来自于自己坚定的信念、踏实的作风、坚强的毅力和勤奋拼搏的精神.只有不断地挑战自我,超越自我,才能日趋增强对自己能力的信心.

(二)合理安排,勤思精练

俗话说:"冰冻三尺,非一日之寒".在数学这门学科的学习中也是如此.我们应该怎样合理地安排、实施自己的学习计划呢?平时的学习应注意做到以下几点:

1.循序渐进

数学是环环相扣的一门学科,哪一个环节脱节都会影响整个学习的过程.很多同学都是由于前面某个章节未学好而对自己产生动摇,导致后来状态越来越差.所以,平时学习不应贪快,要一章一章,一节一节过关,不要轻易留下自己不明白或者理解不深刻的问题.

2.加强理解

概念、定理、公式要在理解的基础上记忆.特别是有些定理、公式的推导方法,就是很多试题考查的通用方法.其实,每新学一个定理、公式,可尝试先不看答案,做一次例题,看是否能正确运用新定理、公式;若不行,再对照答案,加深对定理、公式的理解.

3.落实训练

在理解了基本概念以后,必须要做大量的练习,这样才能巩固你所学的知识,加深对概念的理解.所谓"熟能生巧",数学最能体现这句话的哲理性.数学的思维、解题的技巧只有在做题中摸索,印象才会深刻,运用起来才会得心应手.当然,我们并不提倡题海战术,适量就可以,习题做得太多,很容易产生厌烦情绪.最重要的还是选题,一定要选好题、精题.同时选题还要根据自己的实际情况.一般而言,先要做基础题,把基础打牢固,然后再逐步加深难度,做一些提高性的题目.我们并不认为做很多高难度的题目很好.但是,每一个知识点都要做一定量的高难度的题来巩固,这样才能将其牢牢掌握.做完每个题之后,要回头看一遍(尤其是难题),想想做这一题有什么收获,这样,就不会做了很多题却没有什么效果.

运算的落实也是一个重要的环节,与方法的重要性不相上下.有一些同学,他们具有很强的

思维能力，能够从多角度思考问题，可是计算能力却不强，平时也不训练，考试时往往是找对了方法却算错了答案，非常可惜．的确，繁琐的运算是令人望而生畏的，但是，在运算过程中你将发现许多新的问题，而运算能力也就在训练中渐渐提高了．因此，学习数学应方法与计算并重．一方面，要重视做题方法的训练，从多角度、多方面去思考问题；另一方面，也要注意锻炼计算能力，注重计算的精确性．切不可偏向一方而忽视另一面．

（三）善于总结，推陈出新

要重视平时作业、考试中出现的错误．比较成功的经验是准备一个错题本，专门搜集自己的错题、典型例题、难度较大的题，这些往往就是自己的薄弱之处．这就是一个梳理、总结并提高的过程．对于数学，我们平时就要高标准、严要求，在把基本功打好的基础上，多做一些难题，多总结方法、思路，多进行一些新的、有益的尝试，培养细心、大胆、熟练的解题技能．如果一味做题而忽略了梳理与总结，忽略了体味其中的技巧，不仅会使自己学得太死，也会学得很累．长此下去能力没有提高，水平只能停留在原来的高度．这样做题就造成了时间和精力的浪费．俗话说："吃一堑，长一智"，多数有用的经验都是从错误中总结出来的，要在不断的纠错与总结中使自己的能力与水平得到升华．

（四）强调过程，关注细节

俗话说："过程决定结果，细节决定成败"．这句话在数学学习中也有它深刻的含义．学习成绩的好坏不是凭一时之功就能行的，我们平时要付出艰苦的努力，天上不会掉馅饼，一份耕耘才会有一份收获．另外绝不可忽视细节，如做题的规范、书写的整洁、思维的全面等等，要把你会做的、该得的分数一分不拉的全部得到！那些细节往往是决定成败的关键，切不可忽视，要养成良好的思考习惯．

有人说过"文学是谎言，数学才是真理"，这肯定有失偏颇，不过却道出了数学的重要性．怎样才能学好高中数学，可谓"仁者见仁，智者见智"，各人应根据自己的实际情况合理选择适合自己的方法，所谓"纸上得到终觉浅，绝知此事要躬行"．打好基础是学好数学的第一道关口；练习是必不可少的，要规范、适度、持恒、精选；善于总结、勤于梳理．这是基本性原则！

亲爱的读者，我们相信：只要你认真、努力、方法得当，再配上我们为你精心打造的《教材完全解读》，你会获得意想不到的成功！

第一章 三角函数

课标单元知识

1. 理解任意角的概念、弧度的意义，能正确进行弧度与角度的换算.
2. 掌握任意角的正弦、余弦、正切的定义.
3. 了解正、余弦函数，正切函数的图象性质，会用“五点法”画正弦、余弦函数的简图.
4. 了解周期函数与最小正周期的意义.
5. 会用“五点法”画函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的简图，理解 A、ω、φ 的意义.
6. 掌握同角三角函数的基本关系式及正弦、余弦的诱导公式.

高考命题趋向

高考对本章的考查一直侧重于对基本概念、基本公式、三角函数基本性质的应用和计算、推理能力的考查，试题难度以容易题、中档题为主.

§1 周期现象

1 知识·能力聚焦

1. 周期现象

一个角每旋转一周(顺时针或逆时针)，终边就又回到原来的位置，终边相同的角周而复始地出现，这正是三角函数具有周期性的本质原因，也是解决某些问题的关键. 而且这种周期现象在现实生活中有广泛的应用.

[例] 今天是星期一，则100天后是星期几?

[解] 由于星期几也具有周期性，因而可类似于角的问题来解决，即 $100=7\times14+2$，100天后是星期三.

2. 周期函数

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，如果存在非零常数 T，使得对任何 $x\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则函数 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $y=f(x)$ 的一个周期. 若一个函数为周期函数，我们称这个函数具有周期性，函数的周期性是函数的一个重要性质之一.

2 方法·技巧平台

3. 函数周期性的判定

判断一个函数是否为周期函数，一是根据定义，二是记住一些重要结论，如

(1) $y=f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$.

由此可知，周期 $T=4$，事实上有

$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$.

即 $f(x+4)=f(x)$. 所以 $T=4$.

(2) $y=f(x)$ 满足 $f(x+3)=\dfrac{1}{f(x-1)}$.

由此可知，周期 $T=8$，事实上有

$$f(x+8)=\frac{1}{f(x+4)}=f(x).$$

名师诠释

◈ [考题1] 今天是星期一，

(1) $7k(k\in\mathbf{Z})$ 天后的那一天是星期几? $7k(k\in\mathbf{Z})$ 天前的那一天是星期几?

(2) 158天后的那一天是星期几?

(清华附中训练题)

[解析] 每个星期，从星期一一直到星期日，共7天，呈现周期性变化，每7天都要重复出现.

(1) ∵ 今天是星期一，∴ $7k(k\in\mathbf{Z})$ 天后的那一天仍是星期一；$7k(k\in\mathbf{Z})$ 天前的那一天仍是星期一.

(2) ∵ $158=7\times22+4$，又∵ 今天是星期一，

∴ 158天后的那一天是星期五.

◈ [考题2] 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=a$，$f(2)=b$，$f(n+2)=f(n+1)-f(n)$，$n\in\mathbf{N}^*$，试确定 $f(2007)$ 的值.

[解析] 不知道函数的解析式，我们只能从函数值上来观察规律：$f(1)=a$，$f(2)=b$，$f(3)=f(2)-f(1)=b-a$，$f(4)=f(3)-f(2)=-a$，$f(5)=f(4)-f(3)=-b$，$f(6)=f(5)-f(4)=a-b$，$f(7)=f(6)-f(5)=a$，$f(8)=f(7)-f(6)=b$，…. 则可发现，从 $f(7)$ 开始，函数值呈周期出现，即 $f(n+6)=f(n)$.

$\therefore f(2007)=f(2001)=f(1995)=\cdots=f(3)=b-a$.

◈ [考题3] 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，其图像关于直线 $x=1$ 对称. 对任意 x_1、$x_2\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$.

(1) 设 $f(1)=2$，求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f\left(\frac{1}{4}\right)$；(2) 证明：$f(x)$ 是周期函数.

[解析] (1) 由 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，$x_1$、$x_2\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 知 $f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant0$，$x\in[0,1]$. ∵ $f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$，$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}$. 同理 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2$，$\therefore f\left(\frac{1}{4}\right)=2^{\frac{1}{4}}$.

(2) 依题设 $y=f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，故 $f(x)=f(1+1-x)$，即

$$f(x)=f(2-x),x\in\mathbf{R}.$$

又由 $f(x)$ 是偶函数知 $f(-x)=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$， (3)$y=f(x)$满足$y=f(x+2)$是偶函数，且$y=f(x)$的图像关于直线$x=1$对称.

由此可知，周期$T=2$，事实上，因$f(x+2)$为偶函数，所以$f(-x+2)=f(x+2)$[注意：还要将其中的x换为$-x$，避免出现$f(-x-2)=f(x+2)$的错误]. 又$y=f(x)$关于直线$x=1$对称，则$f(-x+2)=f(x)$. 所以有$f(x+2)=f(x)$.

[说明]　①的依据是“负负得正”；②的依据是“倒数的倒数是本身”；③的依据是偶函数将x变为$-x$，对称将$-x$又变为x.

4. 根据函数的周期性求函数值

如果一个函数是周期函数，我们只需已知其在一个周期上的函数值，就可根据周期函数的定义确定在其他区间上的函数值. 当然，前提是明确周期到底是多少.

[例]　设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当$0\leqslant x\leqslant 1$时，$f(x)=x$，则$f(7.5)$等于(　　).

A. 0.5　　B. -0.5　　C. 1.5　　D. -1.5

[解]　方法一：由已知可得$f(7.5)=f(5.5+2)=-f(5.5)=-f(2+3.5)=-[-f(3.5)]=f(3.5)=f(2+1.5)=-f(2-0.5)=-[-f(-0.5)]=f(-0.5)=-f(0.5)=-0.5$，故选B.

方法二：$\because f(x+2)=-f(x)$，

$\therefore f(x+2)=f(-x)$，

$\therefore f(2-x)=f(x)$，

图像关于$x=1$对称，又函数为奇函数，图像关于原点对称，又$0\leqslant x\leqslant 1$时，$f(x)=x$.

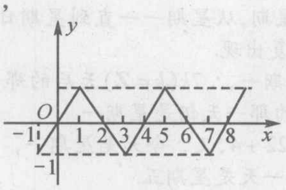


图 1-1-1

故可画出$f(x)$的图像如图1-1-1所示，得

$$f(7.5)=-0.5.$$

[评析]　从前面三种解法过程来看，显然根据函数的周期性求解是最简单的.

5. 对函数周期性的进一步理解

(1)“$f(x+T)=f(x)$恒成立”指的是对于$f(x)$的定义域中任一个x都成立，而不是对某些(或个别)的x成立.

(2)对于有的周期函数可能没有最小正周期，如常数函数$y=C$，对于任意一个非零的常数T均为它的周期，因而它没有最小正周期，同样函数$D(x)=\begin{cases}1(\text{当}x\text{为有理数时})\\0(\text{当}x\text{为无理数时})\end{cases}$对于任一个非零的有理数$T$均为$D(x)$的周期，它也没有最小正周期.

(3)设T为周期函数$f(x)$的一个周期，若x是定义域内任一个值，则$x+kT(k\in\mathbf{Z})$也一定属于定义域，因此周期函数的定义域一定是一个无限集，而且其定义域一定无上界或无下界.

(4)若T为周期函数$f(x)$的一个周期，则kT $(k\in\mathbf{Z})$也为$f(x)$的一个周期.

$\therefore$　　$f(-x)=f(2-x)$，$x\in\mathbf{R}$，

将上式中$-x$以x代换，得$f(x)=f(x+2)$，$x\in\mathbf{R}$，

这表明$f(x)$是$\mathbf{R}$上的周期函数，且2是它的一个周期.

[点评]　证明一个函数为周期函数，一般由定义，即存在$T\neq 0$使得：$f(x+T)=f(x)$成立来论证.

◈ [考题4]　设$f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$是以3为周期的奇函数，且$f(1)>1$，$f(2)=a$，则(　　).

A. $a>2$　　B. $a<2$　　C. $a>1$　　D. $a<-1$

[解析]　$\because f(1)>1$，$\therefore f(-1)=-f(1)<-1$，

又$f(2)=f(-1+3)=f(-1)$，$\therefore f(2)<-1$. 故选D.

◈ [考题5]　$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的函数，对于任意x、$y\in\mathbf{R}$，$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)(*)$恒成立，且$f(0)\neq 0$.

(1)试判断$f(x)$的奇偶性；

(2)若存在常数c，使得$f\left(\dfrac{c}{2}\right)=0$，求证：$f(x+c)=-f(x)$；

(3)在(2)的条件下，判断$f(x)$是不是周期函数？如果是，求出它的一个周期；如果不是，请说明理由.

[解析]　(1)在$(*)$式中，令$x=y=0$，得$f(0)+f(0)=2f(0)\cdot f(0)$.

$\because f(0)\neq 0$，$\therefore f(0)=1$.

再在$(*)$式中，令$x=0$得$f(y)+f(-y)=2f(0)f(y)$，

即$f(y)+f(-y)=2f(y)\Rightarrow f(-y)=f(y)$.

故$f(x)$是偶函数.

(2)在$(*)$式中，令$x=m+\dfrac{c}{2}$，$y=\dfrac{c}{2}$，得

$$f(m+c)+f(m)=2f\left(m+\frac{c}{2}\right)f\left(\frac{c}{2}\right)=0.$$

$\therefore f(m+c)=-f(m)$. 即$f(x+c)=-f(x)$.

(3)$\because f(x+c)=-f(x)$，

$\therefore f(x+2c)=f[(x+c)+c]=-f(x+c)=f(x)$.

故$f(x)$是周期函数，且$2c$是它的一个周期.

[点评]　对于没有给出解析式的抽象函数的问题，除了可以画出函数图像来求解外，还可以用赋值法.

◈ [考题6]　(1)若函数$f(x)$的图像关于直线$x=a$与$x=b(b>a)$对称，则$f(x)$是否为周期函数？并说明理由；

(2)若函数$f(x)$对于任意实数x都有$f(x)=f(x-a)+f(x+a)$(常数$a\in\mathbf{Z}^{*}$)，则$f(x)$是否为周期函数？若为周期函数，求出它的一个周期；若不是周期函数，则说明理由.

[解析]　(1)$\because y=f(x)$的图像关于直线$x=a$对称，

$\therefore$对任意实数x都有$f(x+a)=f(a-x)$，即$f(x)=f(2a-x)$恒成立.

同理有　　$f(x)=f(2b-x)$.

$\therefore f[x+2(b-a)]=f[2b-(2a-x)]=f(2a-x)=f(x)$.

$\therefore f(x)$是以$2(b-a)$为周期的周期函数.

(2)由　　$f(x)=f(x-a)+f(x+a)$，　　①

得　　$f(x+a)=f(x)+f(x+2a)$.　　②

①+②得　　$f(x-a)+f(x+2a)=0$，

即　　$f(x-a)=-f(x+2a)$，

即　　$f(x+3a)=-f(x)$.

$\therefore$　　$f(x+6a)=-f(x+3a)=f(x)$，

$\therefore y=f(x)$是以$6a$为周期的周期函数.

◈ [考题7]　设$f(x)$是周期函数，且最小正周期为2，且$f(1+x)=f(1-x)$，当$-1\leqslant x\leqslant 0$时，$f(x)=-x$，试求函数$f(x)$在区间$[-1,3]$上的表达式.

[解析]　$\because f(-x)=f(2-x)=f[1+(1-x)]=f[1-(1-x)]=f(x)$，$\therefore f(x)$是偶函数. 于是由“当$-1\leqslant x\leqslant 0$时，$f(x)=-x$”可知当$0\leqslant x\leqslant 1$时，$f(x)=x$；

进而，当$1\leqslant x\leqslant 2$时，$-1\leqslant x-2\leqslant 0\Rightarrow f(x)=f(x-2)=-(x-2)=-x+2$；

3 创新·思维拓展

6. 如何确定周期函数的解析式

周期函数解析式的确定，一是可借助函数的图像，二是根据函数的其他性质来共同决定.

［例］ 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$，它的图像既关于直线 $x=1$ 对称，又关于直线 $x=3$ 对称，并且当 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)=2x-x^2$，对于整数 m，记 $I_m=[4m-1,4m+3]$，求 $f(x)$ 在 $x\in I_m$ 时的解析表达式.

［解］ $\because$ 函数 $f(x),x\in k$ 的图像关于直线 $x=1,x=3$ 对称，所以对任意 $x\in k$ 都有 $f(x)=f(2-x)=f[6-(2-x)]=f(x+4)$，$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 是以 4 为周期的函数，故有 $f(x-4m)=f(x)$.

设 $x\in[-1,3]$，则 $-1\leqslant 2-x\leqslant 1$，而 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)=2x-x^2$，$\therefore f(2-x)=2(2-x)-(2-x)^2=4-2x-4+4x-x^2=2x-x^2$. 又 $\because f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，$\therefore f(2-x)=f(x)$.

$\therefore x\in[-1,3]$，$f(x)=2x-x^2$.

设 $x\in[4m-1,4m+3]$，$m\in\mathbf{Z}$，由 $4m-1\leqslant x\leqslant 4m+3$，得 $-1\leqslant x-4m\leqslant 3$，$\therefore f(x-4m)=2(x-4m)-(x-4m)^2=-x^2+2(1+4m)x-8m(1+2m)$. 又 $\because f(x-4m)=f(x)$，

$\therefore f(x)=-x^2+2(1+4m)x-8m(1+2m)$，$m\in\mathbf{Z},x\in I_m$.

当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，$0\leqslant x-2\leqslant 1\Rightarrow f(x)=f(x-2)=x-2$.

$$\text{故 } f(x)=\begin{cases}-x & x\in[-1,0],\\ x & x\in[0,1],\\ -x+2 & x\in[1,2],\\ x-2 & x\in[2,3].\end{cases}$$

［点评］ 本题也可以画出符合题意的草图，利用图形求解.

◈［考题8］ 已知：函数 $y=f(x)$ 是定义在 k 上的周期函数，周期 $T=5$，函数 $y=f(x)(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 是奇函数. 又知 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是一次函数，在 $[1,4]$ 上是二次函数，且在 $x=2$ 时函数取最小值，最小值为 -5.

(1)证明：$f(1)+f(4)=0$；

(2)试求：$y=f(x),x\in[1,4]$ 的解析式；

(3)试求：$y=f(x)$ 在 $[4,9]$ 上的解析式.

（2007 年湖北省实验中学测试题）

［解析］ (1) $\because T=5$，$\therefore f(4)=f(4-5)=f(-1)=-f(1)$，

$\therefore f(1)+f(4)=0$.

(2)当 $x\in[1,4]$ 时，$f(x)=a(x-2)^2-5$.

$\because f(1)+f(4)=0$，$\therefore a(1-2)^2-5+a(4-2)^2-5=0$.

$\therefore a=2$，$\because f(x)=2(x-2)^2-5(1\leqslant x\leqslant 4)$.

(3) $\because f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的奇函数，$\therefore f(0)=0$.

设 $f(x)=kx$，$\because f(1)=2(1-2)^2-5=-3$，$\therefore k=-3$.

$\therefore$ 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=-3x$.

设 $-1\leqslant x\leqslant 0$，则 $0\leqslant -x\leqslant 1$，又 $\because f(-x)=-f(x)$，

$\therefore f(x)=-f(-x)=-3x$，$\therefore x\in[-1,1]$ 时，$f(x)=-3x$.

当 $4\leqslant x\leqslant 6$ 时，$-1\leqslant x-5\leqslant 1$，$\therefore f(x)=f(x-5)=-3x+15$.

当 $6<x\leqslant 9$ 时，$f(x)=f(x-5)=2(x-7)^2-5$，

$$\therefore f(x)=\begin{cases}-3x+15 & 4\leqslant x\leqslant 6,\\ 2(x-7)^2-5 & 6<x\leqslant 9.\end{cases}$$

4 能力·题型设计

点击考点

［1A］若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=-f(3+x)$，则 $f(x)$ 是（　　）. 测试要点 1、2

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 周期函数，$T=2$　　D. 周期函数，$T=4$

［2A］设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的以 3 为周期的奇函数，若 $f(1)>1$，$f(2)=\dfrac{2a-3}{a+1}$，则（　　）. 测试要点 1、2

A. $a<\dfrac{2}{3}$　　B. $a<\dfrac{2}{3}$ 且 $a\neq -1$

C. $a>\dfrac{2}{3}$ 或 $a<-1$　　D. $-1<a<\dfrac{2}{3}$

［3A］设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的以 2 为周期的奇函数，若 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(1-x)$，则 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上（　　）. 测试要点 2、6

A. 单调增，且 $f(x)>0$　　B. 单调减，且 $f(x)>0$

C. 单调增，且 $f(x)<0$　　D. 单调减，且 $f(x)<0$

［4B］已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的图像关于点 $\left(-\dfrac{3}{4},0\right)$ 对称，且满足 $f(x)=-f\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$，$f(-1)=1$，$f(0)=-2$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2005)$ 的值为（　　）. 测试要点 4

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1

［5A］已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 以 2 为周期，则 $f(1)+f(2)+f(3)$ 的值是（　　）. 测试要点 4

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

［6A］设函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 为奇函数，$f(1)=\dfrac{1}{2}$，$f(x+2)=f(x)+f(2)$，则 $f(5)$ 等于（　　）. 测试要点 4

A. 0　　B. 1　　C. $\dfrac{5}{2}$　　D. 5

[7B]已知$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，且满足$f(x+2)=-f(x)$，当$0\leqslant x\leqslant 1$时，$f(x)=\frac{1}{3}x$，则使$f(x)=-\frac{1}{3}$的x值等于(　　).　　测试要点2、6

A. $4k-1,k\in\mathbf{Z}$　　B. $4k+1,k\in\mathbf{Z}$　　C. $2k-1,k\in\mathbf{Z}$　　D. $2k,k\in\mathbf{Z}$

[8C]设$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上以6为周期的函数，$f(x)$在$(0,3)$内单调递减，且$y=f(x)$的图像关于直线$x=3$对称，则下面正确的结论是(　　).　　测试要点4

A. $f(1.5)<f(3.5)<f(6.5)$　　B. $f(6.5)<f(3.5)<f(1.5)$

C. $f(3.5)<f(1.5)<f(6.5)$　　D. $f(3.5)<f(6.5)<f(1.5)$

[9A]若存在常数$p>0$，使得函数$f(x)$满足$f(px)=f\left(px-\frac{p}{2}\right)(x\in\mathbf{R})$则$f(x)$的一个正周期为______.　　测试要点2、3

[10B]已知$f(x+a)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$($a$是不为零常数)，求证：$f(x)$是以$2a$为周期的函数.　　测试要点2、3、5

[11B]已知奇函数$f(x)$满足$f\left(x+\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{f(x)}$，且$f(2)=-\frac{1}{2}$，求$f(1000)$的值.　　测试要点4

[12C]设$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的函数，满足$f(x+2)=-f(x)$，且$x\in[0,2]$时，$f(x)=2x-x^2$.　　测试要点6

(1)求$x\in[-2,0]$时，$f(x)$的表达式；

(2)求$f(9)$和$f(-9)$的值；

(3)求证：$f(x)$是奇函数.

[13B]设函数$f(x)$的定义域关于原点对称，且满足：①对定义域中的任意x_1,x_2，都有$f(x_1-x_2)=\frac{f(x_1)\cdot f(x_2)+1}{f(x_2)-f(x_1)}$；②存在正常数$a$，使$f(a)=1$.　　测试要点3

求证：(1)$f(x)$是奇函数；

(2)$f(x)$为周期函数.

[14C]已知$g(x)=x(2-x)(0\leqslant x<1)$，$g(1)=0$，若函数$y=f(x)(x\in\mathbf{R})$是以2为周期的奇函数，且在区间$[0,1]$上有$f(x)=g(x)$，画出$y=f(x)(-2\leqslant x\leqslant 2)$的图像并求其解析式.　　测试要点5、6

[15C]已知定义在$\mathbf{R}$上的奇函数$f(x)$有最小正周期2，且$x\in(0,1)$时，$f(x)=\frac{2^x}{4^x+1}$. 求$f(x)$在$[-1,1]$上的解析式.　　测试要点6

教材课后习题解答

习题1-1

1. 右边.

2. $\frac{14}{3}$秒.

3. 768人.

最新5年高考名题诠解

1.(2005年广东高考题)设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上满足$f(2-x)=f(2+x)$，$f(7-x)=f(7+x)$，且在闭区间$[0,7]$上，只有$f(1)=f(3)=0$.

(1)试判断函数$y=f(x)$的奇偶性；

(2)试求方程$f(x)=0$在闭区间$[-2005,2005]$上的根的个数，并证明你的结论.

[解析]　(1)由$f(2-x)=f(2+x)$，$f(7-x)=f(7+x)$得函数$y=f(x)$的对称轴为$x=2$和$x=7$，从而知函数$y=f(x)$不是奇函数.

由$\begin{cases}f(2-x)=f(2+x)\\f(7-x)=f(7+x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)=f(4-x)\\f(x)=f(14-x)\end{cases}$

$\Rightarrow f(4-x)=f(14-x)\Rightarrow f(x)=f(x+10)$，

从而知函数$y=f(x)$的周期为$T=10$.

又$f(3)=f(-7)=0$，而$f(7)\neq0$，

故函数$y=f(x)$是非奇非偶函数.

(2)由$\begin{cases}f(2-x)=f(2+x)\\f(7-x)=f(7+x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)=f(4-x)\\f(x)=f(14-x)\end{cases}\Rightarrow f(4-x)=f(14-x)\Rightarrow f(x)=f(x+10)$.

又$f(3)=f(1)=0$，$f(11)=f(13)=f(-7)=f(-9)=0$，故$f(x)$在$[0,10]$和$[-10,0]$上均有两个解，从而可知函数$y=f(x)$在$[0,2005]$上有402个解，在$[-2005,0]$上有400个解，所以函数$y=f(x)$在$[-2005,2005]$上有802个解.

2.(2006年山东)已知定义在$\mathbf{R}$上的奇函数$f(x)$满足$f(x+2)=-f(x)$，则$f(6)$的值为(　　).

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

[解析]　$\because$　$f(x+2)=-f(x)$，

$\therefore$　$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$.

则$f(x)$是以4为周期的周期函数，

$\therefore$　$f(6)=f(2)=f(-2)$.

又$\because f(x)$是奇函数，$\therefore f(-2)=-f(2)$，则$f(2)=0$.

$\therefore f(6)=0$. 故选B.

§2 角的概念的推广

1 知识·能力聚焦

1. 任意角的概念

(1)角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形.

(2)正角:按逆时针方向旋转形成的角.

(3)负角:按顺时针方向旋转形成的角.

(4)零角:一条射线没有做任何旋转,我们称它为零角.

[注意] ①角度的范围再不限于0°~360°.

②角的概念是通过角的终边的运动来推广的,根据角的终边的旋转"方向",得到正角、负角和零角,由此我们应当意识到角的终边位置的重要性.

③当角的始边相同且角相等时,则终边相同;终边相同,而角不一定相等.

2. 终边相同的角

与角α终边相同的角为$\beta=k\cdot360^\circ+\alpha(k\in\mathbf{Z})$,连同角$\alpha$,可构成一个集合$S=\{\beta|\beta=k\cdot360^\circ+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$.

利用终边相同的角的一般形式可以求出符合某些条件的终边相同的角.

[例] 在$-1080^\circ\sim-360^\circ$间,找出与2004°终边相同的角,并指出它所在的象限.

[解] ∵与2004°终边相同的角为

$$k\cdot360^\circ+2004^\circ(k\in\mathbf{Z}).$$

由$-1080^\circ\leqslant k\cdot360^\circ+2004^\circ<-360^\circ$,

得 $k=-7$或$k=-8$.

故所求的角为-516°和-876°,它们是第三象限的角.

2 方法·技巧平台

3. 象限角与轴线角及其表示方法

(1)象限角

如果角的顶点与坐标原点重合,角的始边与x轴的非负半轴重合,那么角的终边(除端点外)在第几象限,就说这个角是第几象限角的.

比如60°,420°,−300°都是第一象限角;120°,480°,−240°都是第二象限角;210°,570°,−150°都是第三象限角;300°,660°,−60°都是第四象限角.

如果角的顶点不与坐标原点重合,或者角的始边不与x轴非负半轴重合,则不能判断角在哪一个象限,也就是说它不能称做象限角.

(2)轴线角

如果角的顶点与坐标原点重合,角的始边与x轴的非负半轴重合,那么角的终边落在坐标轴上,称做轴线角,这时这个角不属于任何象限.

比如0°,90°,180°,270°,360°,−90°,−180°,−270°,−360°,−1080°等都是轴线角.

名师诠释

◈ [考题1] 时针走过2小时40分,则分针转过的角度是______.

[解析] 首先注意到时针是按顺时针方向转动,转动的角度是负角.2小时40分$=2\frac{2}{3}$小时.

时针走过1小时分针恰好转一圈,即转过-360°,

$\therefore -360^\circ\times2\frac{2}{3}=-960^\circ$.

[答案] -960°

◈ [考题2] 已知角α的终边与$\frac{\pi}{3}$角的终边相同.在$[0,2\pi)$内,哪些角的终边与$\frac{\alpha}{3}$角的终边相同?

[解析] α角的一般形式为$\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,$\frac{\alpha}{3}$角的一般形式为$\frac{\alpha}{3}=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{9}$.此后讨论$k$的取值,使$\frac{\alpha}{3}\in[0,2\pi)$就可以了.

解:∵角α的终边与$\frac{\pi}{3}$角的终边相同,

$$\therefore \quad \alpha=2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z}),$$

$$\therefore \quad \frac{\alpha}{3}=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{9}(k\in\mathbf{Z}).$$

又$\because 0\leqslant\frac{\alpha}{3}<2\pi$,

$$\therefore \quad 0\leqslant\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{9}<2\pi(k\in\mathbf{Z}),$$

当$k=0,1,2$时,$\frac{\alpha}{3}=\frac{\pi}{9},\frac{7\pi}{9},\frac{13\pi}{9}$,它们均在$[0,2\pi)$内.

∴所求角为$\frac{\pi}{9},\frac{7\pi}{9},\frac{13\pi}{9}$.

◈ [考题3] 已知角α是第二象限角,判断角$\beta=2\alpha$是第几象限的角,或其终边的位置.

[解析] ∵角α是第二象限角,

$\therefore k\cdot360^\circ+90^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+180^\circ,k\in\mathbf{Z}$.

由$\beta=2\alpha$,得

$$k\cdot720^\circ+180^\circ<\beta<k\cdot720^\circ+360^\circ,k\in\mathbf{Z}. \quad ①$$

$\because k\cdot720^\circ$的角的终边落在x轴的非负半轴上,

$\therefore k\cdot720^\circ+180^\circ$的角的终边落在$x$轴的非正半轴上.

同样可以分析出$k\cdot720^\circ+360^\circ$的角的终边落在$x$轴的非负半轴上.以上$k\in\mathbf{Z}$.由①式可知,

角β是第三、四象限的角;或角β的终边落在y轴的非正半轴上.

(3)象限角的集合

第一象限角集合为

$\{x|k\cdot360°<x<k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$;

第二象限角集合为

$\{x|k\cdot360°+90°<x<k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$;

第三象限角集合为

$\{x|k\cdot360°+180°<x<k\cdot360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$;

第四象限角集合为

$\{x|k\cdot360°+270°<x<k\cdot360°+360°,k\in\mathbf{Z}\}$;

(4)轴线角的集合

终边落在x轴的非负半轴上,角的集合为

$\{x|x=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在x轴的非正半轴上,角的集合为

$\{x|x=k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在x轴上,角的集合为

$\{x|x=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在y轴的非负半轴上,角的集合为

$\{x|x=k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在y轴的非正半轴上,角的集合为

$\{x|x=k\cdot360°-90°,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在y轴上,角的集合为

$\{x|x=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在坐标轴上,角的集合为

$\{x|x=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$.

[注意] 象限角与轴线角的集合的表示形式并不唯一,还有其他的表示形式.

4. 数形结合思想的应用

数形结合的方法,能将区间角(象限角是特殊的区间角)在直角坐标系中正确地用图表示出来;反之,对于直角坐标系中的图形所表示的角的范围,能正确地用区间角表示.

[例] 若角α的终边在图1-2-1中阴影所表示的范围内,则α角组成的集合为______.

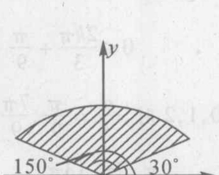


图1-2-1

[解] 在0°~360°范围内,终边落在阴影范围内的角是$30°\leqslant\alpha\leqslant150°$,故满足条件的角的集合为$\{\alpha|k\cdot360°+30°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+150°,k\in\mathbf{Z}\}$.

3 创新·思维拓展

5. 已知角α所在象限,求2α、$\frac{\alpha}{2}$、$\frac{\alpha}{3}$所在象限问题

(1)利用已知条件写出α的范围,由此确定2α、$\frac{\alpha}{2}$、$\frac{\alpha}{3}$的范围,再根据范围确定象限.

[考题4] 若角α与β的终边相同,则角$\alpha-\beta$的终边( ).

A. 在x轴的非负半轴上

B. 在x轴的非正半轴上

C. 在y轴的非负半轴上

D. 在y轴的非正半轴上

[解析] 由角α与角β的终边相同,得

$$\alpha=k\cdot360°+\beta,k\in\mathbf{Z},$$

$\therefore\alpha-\beta=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore\alpha-\beta$的终边在x轴的非负半轴上.

[答案] A

[方法技巧] 终边相同的两个角的差仍然是一个角,它的终边在x轴的非负半轴上,不是偶然性结果,而是必然性结果.

[考题5] 终边在坐标轴上的角的集合是( ).

A. $\{\varphi|\varphi=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{\varphi|\varphi=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\varphi|\varphi=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\varphi|\varphi=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$

[解析] 对于$k,m\in\mathbf{Z}$,有

$$k=4m,$$
$$k=4m+1,\text{(分类讨论)}$$
$$k=4m+2,$$
$$k=4m+3.$$

以下代入答案C进行检验:

(1)若$k=4m$,则$\varphi=4m\cdot90°=m\cdot360°$;

(2)若$k=4m+1$,则$\varphi=(4m+1)\cdot90°=m\cdot360°+90°$;

(3)若$k=4m+2$,则$\varphi=(4m+2)\cdot90°=m\cdot360°+180°$;

(4)若$k=4m+3$,则$\varphi=(4m+3)\cdot90°=m\cdot360°+270°$.

综上可得,终边在坐标轴上的角的集合是$\{\varphi|\varphi=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$.

[答案] C

[考题6] 已知角α的终边在图1-2-3中阴影所表示的范围内(不包括边界),那么$\alpha\in$______.

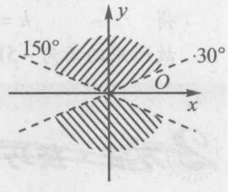


图1-2-3

[解析] 在0°~360°范围内,终边落在阴影内的角为

$30°<\alpha<150°$与$210°<\alpha<330°$.

$\therefore$所有满足题意的角α的集合为

$\{\alpha|k\cdot360°+30°<\alpha<k\cdot360°+150°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|k\cdot360°+210°<\alpha<k\cdot360°+330°,k\in\mathbf{Z}\}$

$=\{\alpha|2k\cdot180°+30°<\alpha<2k\cdot180°+150°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|(2k+1)180°+30°<\alpha<(2k+1)180°+150°,k\in\mathbf{Z}\}$

$=\{\alpha|n\cdot180°+30°<\alpha<n\cdot180°+150°,n\in\mathbf{Z}\}$.

[答案] $(n\cdot180°+30°,n\cdot180°+150°)n\in\mathbf{Z}$.

[点评] 根据数学表达式画出几何图形或根据几何图形直观地写出数学表达式,是解决数学问题的常用方法.本题在进行区间合并时,前一集合是以180°的偶数倍表示,后一集合是以180°的奇数倍表示,二者合并,即可用180°的整数倍表示.

[考题7] 完成下列填空.

(1)若α是第一象限角,则$\frac{\alpha}{2}$是第______象限角;并在图1-2-4