Fundamentals of Econamathematics

经济数学基础 第二版

■ 主编　彭文学　李少斌

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

Fundamentals of Econommathematics

经济数学基础 第二版

■ 主编　彭文学　李少斌

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础/彭文学,李少斌主编.—第二版.—武汉:武汉大学出版社,2007.12
ISBN 978-7-307-05910-8

Ⅰ.经… Ⅱ.①彭… ②李… Ⅲ.经济数学—高等学校—教材
Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第164646号

责任编辑:范绪泉　　责任校对:王　建　　版式设计:詹锦玲

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn　网址:www.wdp.whu.edu.cn)
印刷:湖北恒泰印务有限公司
开本:720×1000　1/16　印张:22.875　字数:423千字　插页:1
版次:1996年10月第1版　2007年12月第2版
2007年12月第2版第1次印刷
ISBN 978-7-307-05910-8/F·1089　定价:30.00元

前　言

科学思维有两种方法:一种是演绎法,它从基本的定义与公理出发,按照一定的规则,推导出公式、定理和结论;另一种是归纳法,它从客观存在的现实与人们熟知的事实出发,总结归纳出合乎逻辑发展规律的一般结论。这两种方法在数学研究与学习中非常普遍,也特别重要。学习数学绝不能靠死记硬背,最重要的是要运用科学思维方法学习理解、掌握数学中的概念、性质、定理与方法。只有掌握了方法,学习数学才能左右逢源,游刃有余。我们编写的这部教材力求使学生在学习中掌握这些方法,为此在编写中我们注意了以下几个方面的问题:

第一,经济数学是高等院校各经济管理类专业的一门基础课,因此,按照教学大纲的要求,适当注意了知识的完整性,比较系统地介绍了微积分和线性代数的基本知识。其主要目的是使学生掌握所需知识的基本概念和方法,而不是刻意于知识体系的严谨性。

第二,实用性。随着社会主义市场经济体制的不断完善,管理的科学化和规范化日益受到重视,数学应用于经济管理的各个部门也日趋广泛,数学无论是作为经济工作的计算工具,还是作为经济工作分析研究的工具,都具有十分重要的作用。因此,在介绍抽象的数学概念时,我们尽可能地赋予这些概念以经济意义;在介绍数学运算时,尽可能结合经济工作中的实例加以说明,以便为数学作为工具应用于经济工作铺平道路,便于学生加深理解,扩展视野,激发学习兴趣,提高实际应用能力。

第三,化难为易,通俗易学。对于不少学生来说,学习本课程有一定的难度。本书编写坚持从实际出发,删去了不少内容坚深而又与实际应用关系不大的内容。同时,在编写方法上力求循序渐进、深入浅出,便于理解和自学,基本概念尽可能用几何意义来说明,基本方法的叙述尽可能详尽且突出重点。在内容叙述上,采取由特殊到一般的方法,在对具体实例分析的基础上再介绍一般的方法,尔后又通过一定数量的例题叙述解题的基本方法。学习数学没有什么捷径可走,其中很重要的一环就是要多做多练,因此,本书编写加大了习题的分量,在各节之后都附有练习题。练习(A)作为客观性习题,主要是为

消化本节基本概念之用，练习(B)主要是计算、应用等传统题型，为学生掌握本节基本计算和基本方法之用。各章之后都配有复习题，以便全面复习和巩固本章所学内容。

本书第一、二、三章由李少斌执笔，第四、五章由彭文学执笔。限于作者水平，缺点和错误等不妥之处在所难免，祈望读者不吝指正。

编 者

2008 年 1 月

目　　录

第一章　函数与极限

函数是微积分研究的主要对象，极限方法是微积分研究所采用的基本方法，微积分学中的一些基本概念都是在极限概念的基础上建立起来的. 用微积分研究经济问题离不开函数关系，离不开极限方法. 因此，本章作为全书的一个引论，简要地介绍了与函数有关的问题，在引入极限概念的基础上，着重介绍了求极限的方法，为便于理解和掌握它在经济领域中的应用，引入了在以后各章要经常用到的经济函数.

§1.1　函数的概念与性质

一、函数的定义

数学中讨论的量分为两类：常量与变量. 在给定的问题中，不变的、保持一定值的量叫做常量；由于某种缘故变化着的、取不同值的量叫变量. 在同一个问题中，还往往同时出现好几个变量，而这些变量又往往是相互联系的和相互依赖的.

例 1　我们熟知圆的面积公式：

$$S=\pi r^2.$$

式中 r 是圆的半径. 圆的半径不同，圆的面积也就不同，而 π 在圆的面积计算中总是不变的. 所以我们说，在这个给定的问题中，π 是常量，圆的半径 r 和圆的面积 S 都是变量，它们之间的相互关系是由上述公式确定的.

例 2　某种牌号的收音机，当单价为 120 元时，每月可销售 2 000 台，如果单价每降低 5 元，则可多销售 20 台. 单价不得低于 90 元. 销量 Q 与单价 P 有如下关系：

P	120	115	110	105	100	95	90
Q	2 000	2 020	2 040	2 060	2 080	2 100	2 120

当 P 在允许的降价范围内变化时，销售量 Q 也随之有一个确定的值与之对应.

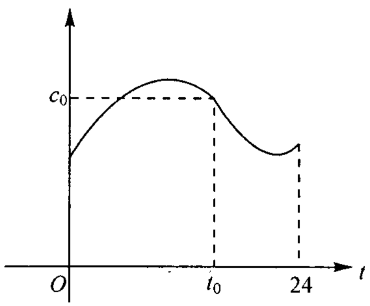

图 1-1

例 3 气象台为了掌握某地气温的变化，使用自动记录器将每天的气温记录下来，直接画出一条如图 1-1 所示的曲线. 图中有两个变量：时间 t 和气温 c. 对从 0 到 24 小时内的任意一个确定的时刻 t，都有一个确定的气温 c 与之对应，它们之间的对应关系就是图 1-1 的曲线. 当时间为 t_0 时，通过图中曲线可以找到 c_0，且 c_0 是唯一的值.

上述各例，就其所包含的具体含义而言，有几何的、经营的、气象的. 撇开各自的具体含义，其共同本质是参与给定问题的变量之间相互依赖的关系. 当其中一个变量取定了一个数值时，按照某种确定的对应关系，就可以求得另一个变量的一个相应值. 函数的一般概念正是这样抽象出来的.

定义 1.1 设在某一问题中有两个变量 x 和 y，变量 x 的变化范围为 D. 如果对 D 中的每一个值 x，按照某种确定的对应关系，都可确定变量 y 的一个相应值，则称变量 y 是变量 x 的一个函数，记为

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

x 称为自变量，y 称为因变量. x 的变化范围 D 称为函数的定义域. 相应地，y 值的集合称为函数 $f(x)$ 的值域.

对于函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 中的每一个 x_0，按对应规则 f，就得到一个 y_0 值，y_0 就是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记为

$$y_0=f(x_0).$$

例 4 设 $y=f(x)=2x^2-x+1$.

$x=0$ 时，　$f(0)=2\times 0^2-0+1=1$；

$x=1$ 时，　$f(1)=2\times 1^2-1+1=2$；

$x=x_0$ 时，　$f(x_0)=2x_0^2-x_0+1$.

例 5 单利计算公式. 设初始本金为 A_0 元，年利率为 R，则第 m 年末的本利和 A_m 是时间 m 的函数，它们之间的关系为

$$A_m=A_0+mRA_0=A_0(1+mR).$$

若本金 A_0 为 2 万元，年利率为 10%，则第三年末的本利和为

$$A_3=2(1+3\times 0.1)=2.6\text{(万元)}.$$

例 6 复利计算公式. 设初始本金为 A_0 元, 年利率为 R, 则第一年末的本利和

$$A_1=A_0+RA_0=A_0(1+R).$$

将 A_1 存入银行, 则第二年末的本利和

$$A_2=A_0(1+R)+A_0(1+R)R=A_0(1+R)^2.$$

再将 A_2 存入银行, 如此反复, 则第 m 年末的本利和 A_m 是时间 m 的函数, 其函数关系为

$$A_m=A_0(1+R)^m.$$

这就是以年为期的复利计算公式.

在例 5 中, 对同样的本金和年利率, 若按复利计算公式计算, 则第三年末的本利和是

$$A_3=2(1+0.1)^3=2.662(\text{万元}).$$

在函数定义中, 自变量 x 的取值范围 D 称为函数的定义域. 在实际问题中, 函数的定义域根据实际意义来确定. 在例 1 中, 圆的半径不可能是负数和零, 所以定义域是由大于零的数组成的集合. 当我们只是在数学上一般地研究某一由具体解析式所规定的函数关系时, 函数的定义域是由解析式本身确定的.

例 7 试确定函数 $f(x)=\lg(1-x^2)+\sqrt{x}$ 的定义域.

解 函数第一项 $\lg(1-x^2)$ 的定义域是满足不等式

$$1-x^2>0$$

的值. 解此不等式得 $-1<x<1$.

第二项 $\sqrt{x}$ 的定义域是 $x\geqslant 0$.

两者的公共部分 $0\leqslant x<1$ 为所求函数的定义域.

确定一个函数, 主要是对应关系和定义域. 它们是函数的二要素. 至于自变量和因变量用什么记号来表示, 那是无关紧要的. 例如在例 5 中, 自变量时间用 m 表示, 因变量本利和用 A_m 表示, 表示 A_m 是 m 的函数.

在函数定义 1.1 中, 规定对每一个 $x\in D$, 有且仅有 y 的一个值与之对应. 符合这样的定义的函数称为单值函数. 若对于每个 $x\in D$, 有多个 y 的值与之对应, 符合这种情形的函数称为多值函数. 以后我们所涉及和讨论的函数一般都是指单值函数.

二、函数的性质

1. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$, $x\in(-a,a)$. 对任意 $x\in(-a,a)$, 若 $f(-x)=f(x)$, 则

称函数 $f(x)$ 是偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

例如，我们熟悉的函数 $f(x)=x^2$，$f(x)=\cos x$ 等都是偶函数，函数 $f(x)=x^3$，$f(x)=\sin x$ 都是奇函数.

偶函数的图形关于 Oy 轴对称；奇函数的图形关于坐标原点对称.

例 8 讨论下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=a^x-a^{-x}$；

(2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^3+x}$.

解 (1)

$$f(-x)=a^{-x}-a^{-(-x)}=a^{-x}-a^x=-(a^x-a^{-x})=-f(x).$$

故 $f(x)$ 是奇函数.

(2)

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{(-x)^3+(-x)}=\frac{-\sin x}{-(x^3+x)}=f(x).$$

故 $f(x)$ 是偶函数.

2. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$. $x\in(a,b)$，若对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加的；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调减少的.

单调增加或单调减少的函数都称为单调函数，(a,b) 称为这个函数的单调区间.

例 9 设函数 $f(x)=-3x+1$，讨论其单调性.

解 该函数定义域是 $(-\infty,+\infty)$，对于任意 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$.

$$f(x_1)-f(x_2)=-3x_1+1-(-3x_2+1)=-3(x_1-x_2).$$

因此，当 $x_1<x_2$ 时， $f(x_1)-f(x_2)>0$，即

$$f(x_1)>f(x_2).$$

故该函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调减少的.

3. 函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若存在常数 $l>0$，对于任意 $x\in D$，有 $f(x+l)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 是周期函数，满足上面等式的最小正数 l 叫做函数 $f(x)$ 的周期.

函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

有很多自然现象，像季节、气候等都是年复一年的呈周期变化的；有很多经济活动，小到商品销售，大到经济宏观运行，其变化也具有周期规律性.

4. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若存在常数 $M>0$，对任意 $x\in D$，都有：

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 内是有界的，否则称 $f(x)$ 在 D 内无界.

例如函数 $y=\sin x$，$\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，存在 $M=1$，使得

$$|\sin x|\leqslant 1,\qquad |\cos x|\leqslant 1.$$

练　习　1.1

(A)

(一)填空题

1. 设 $f(x)=x^3-1$，$f(0)=($　　$)$，$f(-x)=($　　$)$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x>0, \\ 1, & x=0, \\ -x, & x<0, \end{cases}$

$f(0)=($　　$)$，　$f(-1)=($　　$)$，　$f(1)=($　　$)$.

3. 函数 $f(x)=\lg(2x-1)$ 的定义域是(　　).

4. 在 $x\in($　　$)$，$f(x)=x^2$ 是单调减少的函数.

5. 函数 $f(x)=\tan 2x$ 的周期是(　　).

(二)选择题

1. 下列函数对中，表示相同的函数是(　　).

(A) $f(x)=|x|$，$g(t)=\sqrt{t^2}$

(B) $y_1=\lg x^2$，$y_2=2\lg x$

(C) $y_1=\lg x^2$，$y_2=2\lg|x|$

(D) $y_1=\dfrac{x^2-1}{x+1}$，$y_2=x-1$

2. 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，那么 $f(x+1)$ 的定义域是(　　).

(A) $[0,1]$　　(B) $[-1,0]$

(C) $[1,2]$　　(D) $[0,2]$

3. 函数 $f(x)=1+2\sin x$ 的值域是(　　).

(A) $[-1,3]$　　(B) $[-1,1]$

(C) $[0,2]$　　(D) $[0,3]$

4. 下列函数中是奇函数的有(　　).

(A) $x^2-\cos x$　　(B) $\sin x^3-4x$

(C) $10^{-x}+10^x$　　(D) $\frac{\sin x}{x}$

5. 下列函数中,(　　)是单调函数.

(A) $y=2^x$　　(B) $y=2-3x$

(C) $y=(x-1)^2-1$　　$(1\leqslant x<+\infty)$

(D) $y=(x-1)^2-1$　　$(-\infty<x<+\infty)$

(B)

1. 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\sqrt{2x+1}$;　　(2) $f(x)=\sqrt{\lg(4-x)}$;

(3) $f(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$;　　(4) $g(x)=\frac{x}{x^2-4x+3}$;

(5) $f(x)=\frac{1}{\lg(2-x)}$;　　(6) $f(x)=\frac{1}{4-x^2}+\sqrt{1-x}$.

2. 设 $f(x)=2x^2+3x-4$,求 $f(0)$,$f(-2)$,$f(3)$,$f(-x)$,$f(c+1)$,$f\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. 如果 $f(x)=2^x$,判断下列式子的正确性:

(1) $2[f(x+3)-f(x-1)]=15f(x)$;

(2) $\frac{f(x+3)}{f(x-1)}=f(4)$.

4. 判别下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=x^5-2x^3-4x$;　　(2) $f(x)=\cos x-\sin x$;

(3) $y=\frac{a^x+1}{a^x-1}$;　　(4) $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$.

5. 判别下列函数的单调性:

(1) $y=2x-1$;　　(2) $y=\log_a(x+1)$.

§1.2　反函数　复合函数　初等函数

一、反函数

在函数的定义中有两个变量:一个叫自变量;一个叫因变量,一主一从,地

位不同.然而在实际问题中,谁是自变量,谁是因变量,并不是绝对的,它们是可以依所研究的具体问题不同而转化的.

例如,设某种商品的单价是 P,每日销售量为 Q,每日的销售收入为 R,则

$$R=PQ.$$

销售收入 R 是销售量 Q 的函数.

若制定计划要求每日的收入为 R,问每日要销售量 Q 为多少时,则应把 Q 表示成 R 的函数

$$Q=\frac{R}{P}.$$

我们将 $Q=\frac{R}{P}$ 称为 $R=PQ$ 的反函数.一般地,有如下定义:

定义 1.2 设给定函数 $y=f(x)$,其值域是 Y,如果对 Y 中的每一个 y 值,都可以从关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的一个 x 值,则得到一个定义在 Y 上的以 y 为自变量,x 为因变量的新函数:$x=\varphi(y)$,它称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

函数 $y=f(x)$ 的反函数记为 $x=f^{-1}(y)$.

因为函数对于用什么字母来表示自变量和因变量是没有限制的,因此对于字母没有特定意义的函数,习惯上总用 x 表示自变量,y 表示因变量,故 $y=f(x)$ 的反函数可以记为 $y=f^{-1}(x)$.

例 1 求 $y=f(x)=2^{x-1}$ 的反函数.

解 由 $y=2^{x-1}$ 解得 x,得

$$x=\log_2 y+1.$$

将 x,y 的位置互换,得

$$y=\log_2 x+1.$$

这就是函数 $y=2^{x-1}$ 的反函数.

函数 $y=f(x)$ 与反函数 $x=f^{-1}(y)$ 代表同一方程,因此它们的图形是一条相同的曲线,但若按习惯,在反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中,x 与 y 互换,即 $y=f^{-1}(x)$,则反函数 $y=f^{-1}(x)$ 与函数 $y=f(x)$ 的图形是对称于直线 $y=x$ 的(图 1-2).

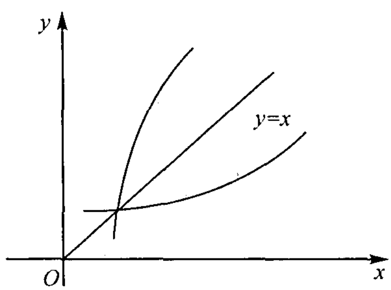

图 1-2

二、基本初等函数

我们把下列六类函数统称为基本初等函数:

1. 常数函数

$$y=f(x)=C\ (C\text{ 是常数}).$$

2. 幂函数

$$y=f(x)=x^{\alpha}(\alpha\text{ 为实数}).$$

常见的幂函数有 $f(x)=x,x^2,x^3,\sqrt{x},\frac{1}{x},\frac{1}{\sqrt{x}}$等.

3. 指数函数

$$y=f(x)=a^x(a>0,a\neq1).$$

最重要的指数函数是 $f(x)=e^x$,e 的由来见 § 1.3.

4. 对数函数

$$y=f(x)=\log_a x\ (a>0,a\neq1).$$

最重要的对数函数是 $f(x)=\log_e x$,简记为 $\ln x$.

5. 三角函数

(1)正弦函数　$y=f(x)=\sin x$;

(2)余弦函数　$y=f(x)=\cos x$;

(3)正切函数　$y=f(x)=\tan x$;

(4)余切函数　$y=f(x)=\cot x$.

6. 反三角函数

(1)反正弦函数　$y=f(x)=\arcsin x$;

(2)反余弦函数　$y=f(x)=\arccos x$;

(3)反正切函数　$y=f(x)=\arctan x$;

(4)反余切函数　$y=f(x)=\text{arccot}\, x$.

有关上述六类基本初等函数的图形、性质在中学数学中都作过详尽的讨论,这里从略.

三、复合函数

从以上列举的基本初等函数出发,经过加、减、乘、除(分母不为零)的四则运算以及函数的复合,可以派生出大量的较复杂的函数. 什么是函数的复合呢?

定义 1.3 设有两个函数

$$y=f(u),\quad u=\varphi(x).$$

前者的自变量是 u,因变量是 y;后者的自变量是 x,因变量是 u;如果将 $u=\varphi(x)$代入 $y=f(u)$中,就得到

$$y=f(\varphi(x)).$$

这个以 x 为自变量，以 y 为因变量的函数称为复合函数. u 称为中间变量.

例 2 设 $y=f(u)=\ln u, u=\varphi(x)=\sin x$.

将后者代入前者就得到复合函数

$$y=f(\varphi(x))=\ln\varphi(x)=\ln\sin x.$$

例 3 设 $y=f(u)=\sin u, u=\varphi(x)=\ln x$.

将 $u=\ln x$ 代入 $y=\sin u$ 中，得

$$y=f(\varphi(x))=\sin\varphi(x)=\sin\ln x.$$

函数的复合还可以推广到两个以上函数的情形.

设 $y=f(u), u=\varphi(v), v=\psi(x)$.

将 $v=\psi(x)$ 代入 $u=\varphi(v)$ 得

$$u=\varphi(\psi(x)).$$

再将 u 代入 $y=f(u)$ 中，这样依次代入得复合函数

$$y=f(\varphi(\psi(x))).$$

这里有两个中间变量 u、v.

例 4 设 $y=\cos u, u=e^v, v=\tan x$.

将后者依次代入前者，得复合函数

$$y=\cos e^v=\cos e^{\tan x}.$$

基本初等函数可以复合成复合函数，与此相对应，复合函数也可以分解成若干个基本初等函数.

例 5 设 $y=\cos\sqrt{\ln x}$，该函数可以分解成如下三个基本初等函数

$$y=\cos u,\quad u=\sqrt{v},\quad v=\ln x.$$

四、初等函数

基本初等函数经有限次四则运算以及函数的复合而得到的函数，叫做初等函数.

例如 线性函数 $y=ax+b$，

二次函数 $y=ax^2+bx+c$，

以及

$$y=\frac{x^2-1}{\ln(x+1)},$$

$$y=\sin(1+\cos 2x)-\sqrt{x-1},$$

等都是初等函数，显然基本初等函数属于初等函数.

我们遇到的函数绝大多数都是初等函数，初等函数是微积分研究的主要对象.

由初等函数的定义可知，初等函数是用一个表达式表示的函数，不能用一

个表达式表达的分段函数一般不是初等函数.

例 6 设符号函数

$$y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

显然上述表达式按照函数的定义是一个函数,准确地说是一个分段函数但不是初等函数.

例 7 某水果店以 0.5 元的单价购进西瓜,以 0.8 元的单价卖出,当天以此价卖不完的西瓜又必须以 0.4 元的单价处理掉.设该店每天西瓜的进货量为 1 500 公斤,试将该店每天的利润 L 表成销售量 Q 的函数.

解 由于每天的进货量是确定的,对于两种不同的销售情况,其利润情况也不同.

(1) 供大于求,即 $Q<1\,500$ 公斤时,以 0.8 元的单价卖西瓜所获收入为 $0.8Q$,余下的 $1\,500-Q$ 公斤西瓜按照 0.4 元的处理价所获收入为 $0.4(1\,500-Q)$,购进西瓜的总费用是 750 元,故

$$\begin{aligned}L&=L(Q)=0.8Q+0.4(1\,500-Q)-750\\&=0.4Q-150.\end{aligned}$$

(2) 供不应求,即所进 1 500 公斤西瓜按单价 0.8 元全部售出,则

$$L=L(Q)=1\,500\times0.8-750=450(\text{元}).$$

综合以上两种情况,得

$$L=L(Q)=\begin{cases}0.4Q-150, & 0\leqslant Q\leqslant 1\,500,\\ 450, & Q>1\,500.\end{cases}$$

这是一个分段函数,函数曲线如图 1-3 所示.

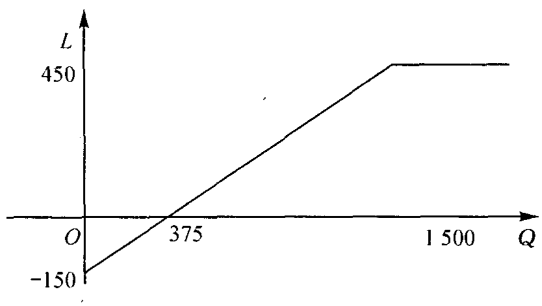

图 1-3