



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

Shuxue  
Jiaoyu gailun

# 数学教育概论

○ 翁凯庆 主编

图书定价 8008992306 或  
02 电话 1955 地址 曾至  
核编 001 联通 03 00 取价  
四川教育出版社



四川大学出版社



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 数学教育概论

Shuxue Jiaoyu gailun

○ 翁凯庆 主编



四川大学出版社

责任编辑:周树琴  
责任校对:马 娜  
封面设计:翼虎书装  
责任印制:李 平

### 图书在版编目(CIP)数据

数学教育概论 / 翁凯庆主编. —成都: 四川大学出版社,  
2007.7

ISBN 978-7-5614-3725-4

I. 数… II. 翁… III. 数学课-教学理论-教材 IV.  
G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 092887 号

### 书名 数学教育概论

---

主 编 翁凯庆  
出 版 四川大学出版社  
地 址 成都市一环路南一段 24 号 (610065)  
发 行 四川大学出版社  
书 号 ISBN 978-7-5614-3725-4/G·862  
印 刷 郫县犀浦印刷厂  
成品尺寸 185 mm×260 mm  
印 张 16.5  
字 数 354 千字  
版 次 2007 年 11 月第 1 版  
印 次 2007 年 11 月第 1 次印刷  
印 数 0 001~4 000 册  
定 价 25.00 元

◆ 读者邮购本书, 请与本社发行科  
联系。电话: 85408408/85401670/  
85408023 邮政编码: 610065

◆ 本社图书如有印装质量问题, 请  
寄回出版社调换。

◆ 网址: [www.scupress.com.cn](http://www.scupress.com.cn)

---

版权所有◆侵权必究  
此书无本社防伪标识一律不准销售

# 前 言

1979年,全国13所高等师范院校合作编写了《中学数学教材教法》一书,这是我国在数学教育理论建设上的重要里程碑。二十多年过去了,数学教育得到了蓬勃的发展。数学教育研究内容也已涉及《数学课程论》、《数学教学论》、《数学学习论》、《数学思维论》、《数学教育测量与评价》、《数学教育技术》等诸多方面,其内容远远超出了《中学数学教材教法》的知识领域,初步形成了《数学教育学》这门独立的学科。

鉴于以上情况,我们在高等师范院校开设多年的《中学数学教材教法》的基础上,编写了《数学教育概论》一书,以作为高等师范院校数学教育专业开设《数学教育学》课程的教材。编写时我们力求体现如下特点:

(1) 继承与发展相结合的原则。即既要选取《中学数学教材教法》课程中经实践检验对数学师范生培养起重要作用的内容,又要体现从《中学数学教材教法》向《数学教育学》发展,构建起这门学科的理论体系。作为教材,构建的理论体系应当严谨,涵盖《数学教育学》的主要内容,使数学师范生通过学习对《数学教育学》这门学科有完整的了解。

(2) 理论与实践相结合的原则。即既要反映《数学教育学》所包含的《数学课程论》、《数学教学论》、《数学学习论》、《数学思维论》等内容中的基础理论,还要注重这些基础理论对中学数学教学实践活动的指导作用,使理论学习真正成为教学实践活动的指南。

新一轮基础教育课程改革,初中数学课程改革已在全国推行,高中数学课程改革行将在全国铺开,本书对新一轮高初中数学课程改革给予了充分的关注。

(3) 先进性与实用性相结合的原则。即既要展现国内外数学教育中重要的新思想、新观念,同时也注重总结我国中学数学教育中的成功与不足,来审视当前基础教育中学数学课程改革,为数学课程改革的顺利实施尽微薄之力。

总之,在编写中我们努力做到结构严谨,立论正确,行文规范流畅,以便为高等师范院校数学教育专业的学生提供一本理想的教材。

本书由翁凯庆担任主编,袁南桥、张红、陈琼担任副主编,熊昌雄、宁锐、李昌勇、潘亦宁、周思波、赵思林担任编委,在集体讨论的基础上编写而成。编写组分工如下:翁凯庆负责全书的整体设计,并撰写第一章、第七章;袁南桥、熊昌雄撰写第二章、第三章及第六章;张红、宁锐、周思波撰写第四章、第五章;陈琼、赵思林撰写第八章;宁锐、李昌勇撰写第九章;潘亦宁撰写第十章。全书经过主编、副主编统一审稿,最后由翁凯庆统稿并定稿。

# SHUXUE JIAO YU GAILUN 数学教育概论

本书已于2006年进入普通高等教育“十一五”国家级规划教材之列，这是对我们工作的极大肯定和鞭策。教材建设是一项长期的任务，教材是否具有先进性、实用性，是否实现了理论与实践的有机融合，有待于读者的检验。

四川师范大学数学与软件科学学院为本书的出版提供了有力支持；四川大学出版社为本书的出版提供了许多便利条件，在此表示谢意，同时也深深感谢关心、支持本书出版的所有同行和朋友们。

编者

2007年3月

## 目 录

第一章 概 论 .....	( 1 )
第一节 数学教育学的研究对象 .....	( 3 )
第二节 数学教育学的研究方法 .....	( 4 )
第二章 中学数学教育的目标和功能 .....	( 7 )
第一节 数学对象的性质、特征及存在方式 .....	( 9 )
第二节 数学教育的功能 .....	( 12 )
第三节 中学数学教育的目标 .....	( 14 )
第三章 中学数学课程概述 .....	( 19 )
第一节 中学数学课程的意义 .....	( 21 )
第二节 中学数学课程的设计原则 .....	( 24 )
第三节 中学数学课程的内容 .....	( 28 )
第四节 中学数学课程标准与数学教学大纲的比较 .....	( 43 )
第五节 教师在数学课程改革中的作用 .....	( 59 )
第六节 中学数学课程改革的发展趋势 .....	( 61 )
第四章 中学数学教学概述 .....	( 63 )
第一节 中学数学的教学原则 .....	( 65 )
第二节 现代数学教学理论简介 .....	( 73 )
第三节 中学数学的教学方法 .....	( 77 )
第四节 中学数学的教学过程及其优化 .....	( 86 )
第五章 中学数学的教学工作 .....	( 91 )
第一节 备课与说课 .....	( 93 )
第二节 数学教学的基本技能 .....	( 101 )
第三节 中学数学的课外工作 .....	( 121 )
第四节 中学数学的教学研究 .....	( 123 )
第五节 教育实习 .....	( 128 )
附录 教案与说课材料 .....	( 130 )

第六章 逻辑基础与数学教学 .....	(139)
第一节 数学概念及其教学 .....	(141)
第二节 数学命题及其教学 .....	(149)
第三节 数学中的推理和证明 .....	(158)
第七章 数学学习概述 .....	(167)
第一节 数学学习与数学认知结构 .....	(169)
第二节 数学知识、技能的学习 .....	(174)
第三节 建构主义与数学教学 .....	(178)
第四节 数学问题解决 .....	(180)
第八章 数学思维与数学能力的培养 .....	(189)
第一节 数学思维及其品质 .....	(191)
第二节 数学创造思维及其培养 .....	(196)
第三节 数学能力概述 .....	(204)
第四节 中学生数学能力的培养 .....	(206)
附录 中学生数学能力结构剖析表 .....	(214)
第九章 数学教育测量与评价 .....	(217)
第一节 数学教育评价的一般理论 .....	(219)
第二节 中学数学课堂教学评价 .....	(224)
第三节 试题质量评价与分析 .....	(228)
第十章 现代教育技术与数学教育 .....	(237)
第一节 现代教育技术的产生与发展 .....	(239)
第二节 现代教育技术应用于数学教学的基本模式 .....	(241)
第三节 现代教育技术对数学教育的影响 .....	(248)
参考文献 .....	(254)



# 第一章

## 概 论

GAI LUN

数学教育学的研究对象

---

数学教育学的研究方法

---





## 第一节 数学教育学的研究对象

### 一、数学教育学的内容

数学教育学是以数学教育作为研究对象的一门学科。数学教育可以在不同的场所,在不同的时间,在不同程度上,采取不同的方式进行。它是整个社会教育的一部分,因此,数学教育有着广阔的社会背景。这样,数学教育学势必成为一门研究内容广泛,理论体系庞大的学科。由于数学教育的具体研究对象由教学、学习、课程所组成,因此,数学教育学这门学科的主体框架包括了数学学习论、数学教学论和数学课程论。

#### 1. 数学学习论

数学学习论以学生的数学学习为研究对象,探索在学校教育的条件下,学生的数学知识、技能和能力是怎样获得的,其间有什么规律。我国著名科学家钱学森说:“教育科学中最难的问题,也是最核心的问题是教育科学的基础理论,即人的知识和应用知识的智力是怎样获得的,有什么规律。解决了这个核心问题,教育科学和教育工作的其他部门都有了基础,有了依据。”

学生的数学学习是一个特殊的认识过程,其特殊性体现在依据一定的教学大纲(课程标准)和教材,在教师的指导、帮助下,有计划有目的地进行学习。而认识过程涉及学生对情境的感知,进入记忆、思维和想象,从而获得数学知识和技能,并从行为中表现出来。在这个认识过程中,学生的头脑中将输入的感性材料如何进行“加工处理”,发生了什么样的变化,其心理机制如何,都需要从学习心理学的角度进行分析,探索其间的规律。因此,郑毓信先生指出:“从根本上说,深入开展数学学习心理学的研究,直接关系到数学教育学能否成为一门真正的科学。因而,一切数学教育研究最终都需落实于学生的数学学习活动,从而,就只有对学生在学习数学过程中的思维活动有着较为深入的了解,数学教育学才有可能在科学的基础上得到健康的发展。”

#### 2. 数学教学论

数学教学论以数学教学为研究对象,目的在于揭示数学教学的基本规律,从理论和实践的不同侧面探讨数学教学的基本原理。

按照传统的理解,数学教学是指由数学的教和学两方面组成的活动,并且两者是不可分割的,因而数学教学论的研究必然与数学、教师和学生这三个对象都有着密切的联系。其中心问题应该包括:教师怎样教数学?学生如何学数学?以及数学教学中涉及的数学内容又是哪一些?等等。但是为了进一步揭示数学教学的本质,我们这里所涉及的数学教学论将以教学的一种规定性定义为依据,即教学是指由教师引起、维持以及促进学生学习的行为。因而我们讨论的侧重点将是数学教师如何教数学,而不是学生如何学数学;尤其集中讨论的是有关中学数学教学原则,各种不同教学方法的实施,以及数学课程教学中教师所采用的各种教学技能等,以便使高等师范院校数学系数学教育专

业的学生对中学数学教学从理论到实践都有较为清晰、正确的认识,并通过教学实践获得较强的教学能力。

### 3. 数学课程论

数学课程论的研究对象包括数学课程的目标、数学课程的设计原则、数学课程的实施与评价等问题。

数学课程在任何一个教育体系中都居于中心地位、实力地位。课程是实施教学目标的手段,课程编制的好坏,决定着教育质量的高低,决定着教育目标能否圆满实现。因此,现在许多国家都把课程的研究作为教育科学研究的中心课题,重视课程的研究是当今各国教育科学研究的共同趋势。

数学课程也不例外,它是数学教育的中心课题。国内外数学教育改革的历史表明,数学课程的改革历来是数学教育改革的焦点。当前,新一轮基础教育课程改革正紧锣密鼓地进行,它的实施必将引起学生的学习方式、教师的教学方式的转变,以及教材呈现方式和内容的转变。如何深入进行新一轮中学数学课程改革,无疑这一改革需要在数学课程论的指引下进行。

数学教育学的主体是数学学习论、数学教学论和数学课程论。应该指出,尽管这“三论”分别有各自的研究对象,但是它们之间又有着不可分割的联系。数学教学是根据一定的课程内容来进行的,数学课程论的研究是数学教学论研究的基础,而数学课程的编制又受教、学双方的制约,相应地要受数学教学论与学习论的影响。

## 二、现代数学教育的发展

在国际、国内的教育领域中,数学教育始终是最活跃的学科之一。学术组织林立,专业会议频繁,各种新理论、新观点层出不穷。数学教育研究队伍日益壮大。

数学教育学是涉及数学、哲学、心理学、教育学、思维科学、现代教育技术、逻辑学、数学史等多门学科的综合学科。数学教育的现代研究具有以下两个显著特点:

一是数学教育的现代研究开拓了更多的研究方向。如数学教育的测量与评估,数学方法论,现代技术在数学教育中的应用,数学思维教育等。

二是数学教育的现代研究越来越多地体现了多学科、多方位的相互渗透与整合的特点。例如,作为数学教育的重要指导性著作,1992年出版的《数学教与学的研究手册》(Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning)共列举了29个课题,其中就包括了学习心理学、社会、文化研究、数学哲学等多方面的内容。如“数学观:它的作用和影响”、“数学教室的文化:一个未知量”、“教师的信念与观念:一个综述”、“学会数学的思维:问题解决、元认知与数学中的意义赋予”、“转向高层次数学思维:函数、极限、无限和证明”、“民俗数学与每个人的认知”等。

## 第二节 数学教育学的研究方法

数学教育学是一门正在发展的新兴学科,其内容既有很强的理论性,又有很强的实

践性；既要从整体上进行宏观的研究，又要对其中的部分进行微观的研究，这就决定了数学教育学有其特殊的研究方法。其特殊性体现在：它往往不是孤立、单一的研究方法，而是综合的、系统的研究方法，如调查法、文献分析法、实验法等方法的综合运用。

### 1. 调查法

调查法是为了弄清所研究问题的实际情况，获得事实、材料或数据，以利于探索它的规律而采取的一种方法。调查是一种有目的有计划的活动，一般在进行调查之前，先要确定调查课题，制定调查计划，其中包括明确调查对象，拟定调查提纲与步骤等；然后进行实际调查和收集资料，对所收集的资料力求全面、客观、真实并具有代表性；最后，对调查所得情况、资料和数据等进行分析、整理，从中提炼概括出规律性的东西来。

在实际调查和收集资料时，可以采用多种形式和方法，如谈话、问卷、测试、追踪等方法，这些都要根据调查的课题、目的、对象与具体情况，灵活加以选用。谈话法是直接与被调查者对话了解情况、观察动向，这就需要预先明确谈话的目的，拟定谈话内容或提纲，以及进行的方式和估计谈话中可能出现的问题及所采取的对策。每次谈话时都要做好记录，以便于归纳整理。问卷法是用书面方式收集情况或数据，它简单易行且调查的面广。在使用问卷法时，要求所提问题必须恰当、明确，能让被调查者如实地回答问题。测试法是根据调查的目的，拟出合适的试卷，通过测试，从被调查者的解答中了解情况，并通过比较、分析，揭示其规律。追踪法是对被调查的个体或群体，在比较长的时间内，进行有系统的定期的调查，其中可以采用谈话、问卷或测试等方法了解情况，取得资料或数据，以便在演变过程中发现量变或质变的规律等。

### 2. 文献分析法

文献分析法是通过查阅有关的论著、文件、法规、资料，以此为素材进行分析研究的方法，例如运用文献分析法研究数学课程论。文献分析法大致包括下面几个方面：

①学习研究有关数学教育和课程理论的专著，分析研究有关数学课程的论述，掌握基本原理，明确指导思想。

②分析教育部门制定的学校的培养目标，现行的数学教学大纲或课程标准等方针政策和具体规定，这是编制和改革我国数学课程的基本依据。

③历史地分析和研究国内外数学课程的发展，分析各次重大课程改革的起源、过程、特点、理论依据、结果及其经验教训，从中总结数学课程发展的规律，提取数学课程编制的原理，把握数学课程发展的主要趋向。

④分析研究当代各国有关数学课程的规定（如教学大纲、课程标准）和有代表性的数学课本，比较异同，分析利弊，总结规律，借鉴吸收。

### 3. 实验法

这里的实验法指数学教育实验，它是根据一定的数学教育理论假说，创设一种人工

的数学教育情境(实验)。研究者在实验中控制各种与实验因素无关的条件,使其保持稳定不变,同时对实验因素加以操纵,使其按预先设计发生变化,然后对实验因素加以观察和测定并进行分析,以此来确定数学教育现象间的关系的一种研究方法。在实验中由于控制或排除了无关因素的影响和干扰,突出了实验因素,因而较为真实地反映了事物之间的因果关系;而对实验因素人为地进行了控制,在实验中可以观察到在自然条件下不易遇到的情况,或出现某种实验因素的效果,获得有价值的结论。有些实验需要建立实验组与对照组。对照组完全保持正常情况,不受实验因素的影响,以便于实验后与实验组进行对照、比较。而对数据进行分析,一般都采用统计的方法。

#### 4. 其他研究方法与手段

目前,无论是国内还是国外,多数中学数学教师并不关心数学教育的科研成果,其形成原因是多方面的。一方面是中学数学教师必须面对他们日常繁重的教学工作,难以抽出时间、精力来进行数学教育的研究工作;另一方面,思维活动在学生头脑中究竟是如何进行的,目前脑科学对此还不能阐明它的机制,还不能深入到神经元等的微观观测来说明它。因此,目前涉及学生学习的有关理论仍显得有些贫乏,这些理论的有效性和实用性并不十分有力,未能引起中学数学教师充分的重视。鉴于此,近年来在数学教育研究中,倡导一种数学教师的行动研究法。

行动研究法可以理解为:是由以教师为主体的群体所实施的自我探究(self-investigation),其目的是改进他们自己的教学实践,并在这一实践中加深自己对于这些实践的理解。行动研究的方法即“实践—反思”的循环,当然,在研究中可以使用任何必要的研究方法。通过行动研究,教师将成为教学工作的“设计者”和“智慧的实践者”。

近年来,谈话法、个案分析法等研究技术受到人们的广泛关注。目前,数学教育研究的基本任务是描述各种数学思维本身的各种形式,这是因为,数学学习只不过是各种数学思维形式之间的一种“转换”或迁移。因此,了解数学思维过程的研究手段,如谈话法、个案分析法等受到了研究者的青睐。我国有人在研究“解决几何问题的思维过程”时,要求被试学生“出声思维”(“出声想”),用录音机录下被试者的口语材料,以便于分析研究学生解几何题时的思维活动。数学教育的研究方法有多种,各种方法都既有优点,也有局限性。通过思辨论证而得出的结果有待实践的检验,利用实验数据统计而获得的结果,需要说明数据的可靠性。而个案能向人们展示特定的教学过程,以其生动的情景吸引人,以其真实的经验说服人,但也要注意个案中是否蕴含有深刻的数学教育思想。只有综合运用多种数学教育研究方法,才能促进数学教育蓬勃、健康的发展。

# 第二章

## 中学数学教育的目标和功能

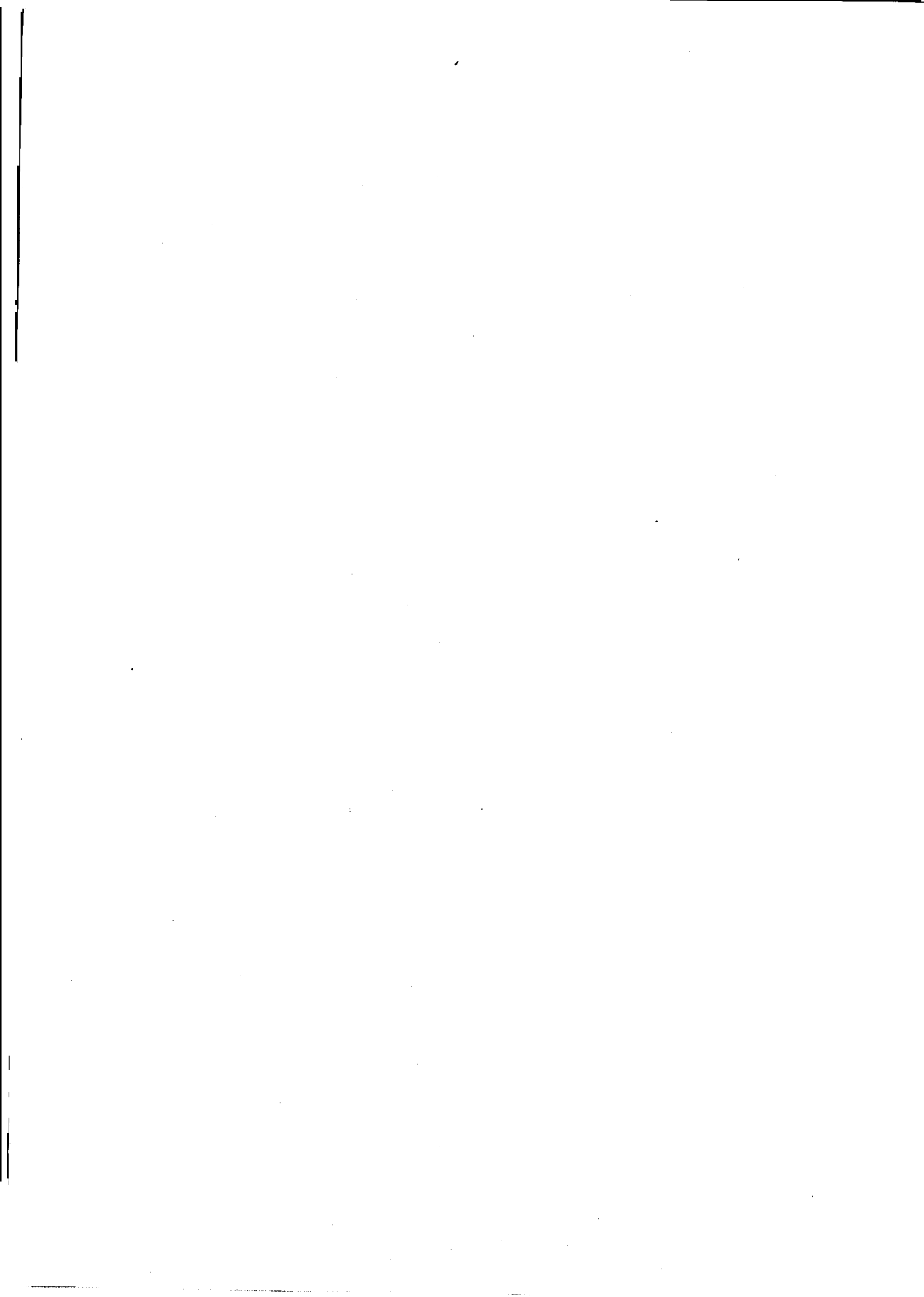
ZHONG XUE SHU XUE JIAO YU DE MU BIAO HE GONG NENG —

数学对象的性质、特征及存在方式

数学教育的功能

中学数学教育的目标





中学数学教育的目标是数学教育工作的出发点。数学教育的功能是实现数学教育目标的必要条件。不少研究表明,对数学本质的认识,不同的数学观将会产生不同的数学教育,直接或间接地影响着学生数学学习的动机和效果。数学是什么?什么是中学数学教育的目标?数学教育的功能如何?这是本章探讨的主要问题。

## 第一节 数学对象的性质、特征及存在方式

什么是数学?这是任何一个数学教育工作者都应该认真思考的问题。只有对数学对象的性质、特征及存在方式有比较清晰的认识,才能在数学教育及其研究中把握正确的方向。

### 一、数学研究的对象及存在方式

要回答什么是数学,必须揭示数学研究的对象及存在方式。自从亚里士多德给出数学对象的定义:“数学是量的科学”以来,数学家就有着各种不同的答案。19世纪下半叶,恩格斯在《反杜林论》中曾明确地指出:“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系”,“我们的几何学是从空间关系出发,我们的算术和代数是数量出发。”这些论述,无疑是对19世纪以前数学研究的主要内容的高度概括,而且至今仍然有着十分重要的意义。当然,20世纪数学的长足发展,使得数学研究的对象如今已经越出了数量关系和空间形式的最初意义的理解。比如“ $n$ 维向量空间”、“函数空间”等,只是在形式上与一般空间概念上有某些类似的模拟物。此外,各种抽象结构、形式体系和一般关系等,都已成为现代数学的研究对象。比如法国布尔巴基学派就认为,一切数学都建立在代数结构、序结构和拓扑结构这三种母结构之上。因此,有的数学家认为,现代数学是研究一种广义的量——模式结构的科学。如数学家怀特海在《数学与善》中说:“数学的本质就是:在从模式化的个体作抽象的过程中对模式进行研究”。另外一部分数学家则认为,对数学研究的对象的进一步的哲学概括,既要包含对19世纪以前恩格斯所概括的内容,又要反映近一个世纪以来数学的发展与变化。于是,我国大连工学院徐利治先生指出:“数学是实在世界的最一般的量与空间形式的科学,同时又作为实在世界中具有特殊性、实践性及多样式的量与空间形式的科学。”而首都师范大学的周春荔先生则认为:在一般意义下,抽象空间也好,形式关系、结构也好,本质上都是—种量或量的一种表现形式,因此,依据20世纪数学发展的状况来概括,数学不外乎是研究量和量的变化的科学。

在对数学对象的研究工作中,我们不难发现数学对象存在以下的两种基本方式:

#### 1. 数学研究的对象是一种形式化的“思想事物”

从数学与客观世界的关系来看,数学研究的量的关系都是实在世界的真实关系。例如,当速度一定时,路程与时间的关系;成本与总投资的关系等,都是非常现实的材料。但在数学研究中,数学所直接处理的对象,则是由现实世界抽象出来经过形式化加工并以概念形式出现的一种思想材料。正如世界上本无“一次函数”这个实物,而是

人类从客观世界数量关系中得出来的思想材料。没有人，就不会有自然数、方程式、函数和微积分，也就没有数学研究的对象。但物质运动还是客观地存在于人的头脑之外的现实世界中。自然科学的对象是大自然本身，数学研究的对象则是经过人脑加工了的思想观念，一种人对实在世界的概括和认识。正如恩格斯指出过的，数学是“一种研究思想事物（虽然它们是现实的摹写）的抽象的科学”。这对正确认识数学研究中直接处理的对象和开展数学教学、科研工作有直接的意义，同时，也加深我们对数学的客观真理性必须经过实践检验的认识。

## 2. 数学研究的对象普遍存在于一切事物之中

由于任何事物都具有量和质的规定性，所以数学的对象——量与量的变化，不仅仅存在于某种个别的物质结构层次和物质运动状态之中，而且普遍地存在于各种物质结构层次和物质运动状态之中。因此，凡是要研究量、量的变化、量的关系、量的关系的变化、量的变化的关系时，都离不开数学。

数学作为研究实在世界的数量关系和空间形式的科学，它的研究对象较力学、物理学、化学、生物学等自然科学的研究对象更具有普遍性的特征，也正是由于数学研究对象的这一基本特征，决定了数学的一些主要特点。

## 二、数学的主要特点

基于对数学本质特征的认识，人们从不同侧面讨论了数学的具体特点。比较普遍的观点是：数学具有理论的抽象性、逻辑的严谨性和应用的广泛性等特点。

### 1. 数学对象的特点——高度的抽象性

数学的抽象性是数学最本质的特点。如前所述，数学研究的对象是非常现实的，但它仅从量的关系和空间形式方面来反映客观现实，舍弃了事物的其他属性和质的内容。因此，数学对象是由现实世界抽象出来经过加工以概念形式出现的形式化符号系统。并且，这一抽象过程是在不同层次上不断进行着的。如从自然数概念的基础上，抽象出整数、有理数、实数、复数等数的概念；由数的概念，又可抽象出函数、泛函、拓扑等。数学抽象的这种层次性相当分明突出，以至产生了数学概念“抽象度分析”这一专门学问。也正是因为大多数数学概念都是在一般数学概念的基础上抽象产生的，所以，数学的抽象思维表现出相对的封闭性，可以不依赖外界就能独立深入地发展。

### 2. 数学体系的特点——逻辑的严谨性

数学的严谨性主要表现在推理的逻辑性、公理化方法和结论的精确性上。数学理论体系的建立，要靠严密的逻辑推理（至少基本情形如此），虽说通过实验、验证也可获得一些成果，但要作为一项数学结论被确定下来，还必须经受逻辑证明的检验。像数学那样对逻辑方法的使用和要求，是其他科学研究所不具备的。数学思维中对事物基本属性的准确把握，本质上源于公理化方法，用公理化方法和逻辑性推理得到的数量关系和空间形式的必然规定性，是事物客观规律的反映，它确保数学结论的确是可靠、客观有