福建教育学院 梦山丛书

FUJIAN INSTITUTE OF EDUCATION

常微分方程精品课堂

丁崇文 编著

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

福建教育学院

常微分方程精品课堂

丁崇文　编著

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程精品课堂/丁崇文编著.—厦门:厦门大学出版社,2008.4
(福建教育学院梦山丛书)
ISBN 978-7-5615-2746-7

Ⅰ.常… Ⅱ.丁… Ⅲ.常微分方程-高等学校-教材 Ⅳ.O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 047562 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门大学 邮编:361005)
http://www.xmupress.com
xmup @ public.xm.fj.cn
福建省金盾彩色印刷有限公司印刷
(地址:福州市福飞路江厝路 5 号 邮编:350013)
2008 年 4 月第 1 版 2008 年 4 月第 1 次印刷
开本:787×1092 1/16 印张:41 插页:2
字数:1050 千字
定价:87.00 元

总 序

福建教育学院坐落在福州市风景秀丽的大梦山下、西子湖畔。山湖的钟灵之气赋予了学院毓秀之神。五十个日月轮回，五十载花开花落，美丽的山湖见证着学院的培训历程，陪伴着学院研究的征途。为了党的教育事业，为了学院的培训研究，多少无悔的青春在这里闪光，多少年轻的血液在这里流淌，多少智慧的灵感在这里孕育。如今，辛勤耕耘的教育学院人，到了初尝收获的季节了，出版集培训与研究于一体的《梦山丛书》，是全院教职工的愿望，是全体培训学员的期盼。

入选这批《梦山丛书》的教材、著作是老师与学员们共同探索学科理论、探索基础教育培训的结晶。她的问世，推进着学院精品课程的建设，武装了《教育管理学》、《实用计算机基础》、《常微分方程》、《计算机辅助化学教学》、《社会主义精神文明建设概论》、《学校发展与管理》、《马克思主义基本原理》等院级精品课程，形成了具有师范性成人性独特的学科培训教材；她的问世，提升着学院师训干训的层次与水平，《校长培训案例集》、《八闽校长办学方略精粹》、《校长培训与校长专业化发展》、《中学思想道德建设研究》、《求索综合实践活动常态之路》、《视频案例设计与制作》、《计算机实用技术技巧操作》、《英文写作课堂教学综合实践》等教材，支撑着国家级、省级骨干教师与省级学科带头人的培训，支撑着全省完中校长、骨干校长的培训；她的问世，强化了学院学术群的建设，《中国农地使用权流转研究》、《马克思主义哲学方法论》、《常微分方程精品课堂》、《性健康教育概论》、《教育管理学》、《生态旅游》、《高等数学》、《社会主义精神文明建设论》等著作教材，汇集了学院学科群体的力量，展露了学科学术的优势。有的著作、教材还是国家、省"十五"科研项目。这一切都让我们深感欣慰。

但是，研究是认识向着未知领域的扩展，在这个意义上，研究的领域是无限的，而我们的认识是有限的。因此，我们的研究只能是阶段性局部性的认识，是有待检验、有待发展的研究。

《梦山丛书》是我们一个阶段研究的记录，更是我们深化研究、扩展研究的行动宣言。我们坚信，继她之后，老师们会有更多更新更可喜的成果问世，这，也就是《梦山丛书》出版的最大愿望。

《梦山丛书》编委会

2006 年 9 月

前　言

数学是一门内容浩瀚、应用广泛的科学，它不仅为研究自然科学、工程技术与社会科学提供了有效的计算方法，促进科学技术与经济建设的发展，而且影响着人们的思维方式和逻辑推理能力．它已经进人社会各行各业中，各行各业也已离不开它.与微积分学一起成长起来的常微分方程，它的重要性早已被人们所公认的.从它诞生之日起就日益成为人类认识自然改造自然的有力工具，成为数学科学联系实际的主要手段之一.因此常微分方程是数学专业必修的专业基础课，也是其他理工科本科生必修的基础内容.为了《常微分方程》精品课程的建设，完善该课程的教材体系建设，更好地为教学服务，为学生学习需要，为适应因材施教，分流培养，促进优秀人才脱颖而出需要，根据长期的教学实践积累，我们编写了《常微分方程精品课堂》一书.该书注重数学思想方法的介绍，数学思维的训练，培养数学思维能力.为了加深理解所学知识，加强综合运用知识能力的训练，在选题上注意知识点、综合性较强、有训练逻辑推理的题目.为了掌握解题方法，提高分析问题、解决问题能力，让学生在角度丰富的练习实践中，在自主合作探究的学习方式中学习、总结、运用知识规律，本书精选700多道例题，通过例题思路点拨，点明用有关原理解答的方法，总结解题方法，达到复习巩固的目的.同时按章节分类，精选800多道练习题，通过自己动手解题来掌握要领，触类旁通，提高解题能力，进一步复习、巩固和提高.本书还设计15套模拟试题供学生自我检测，自我对照检查学习情况.

本书中的例题、练习题和解答，大部分是编者在长期教学实践中所使用、积累和兄弟院校的成功之作.在此谨向所查阅、引用并从中得到教益、启示的宝贵资料的作者们深表谢意，并将在卷末的文献目录中一一予以列举.

为了编好本书，编者虽然尽了一定努力，终因才疏学浅，缺点和错误在所难免，敬请专家和读者不吝指正.

编　者

2006年国庆于福州

数学是打开科学大门的钥匙.

——培根(Bacon,R)

数学除了锻炼敏锐的理解力,发现真理之外,它还有另一个训练全面考查科学系统的头脑的开发功能.

——格拉斯曼(Grassmann,H. G)

解题是一种实践性的技能,就像游泳、滑雪或弹钢琴一样,只能通过模仿、练习和钻研学到它.

——波利亚(Polya,G)

只有聪明的禀赋、内在的悟性、勤奋而不懈地工作汇合,才能激发出灿烂的智慧之火.

——华罗庚

作为我们当今如此众多科技的首要基础,作为如同一门伟大创造艺术那样重要的分支,作为一个万能语言以及一个基本的思维方式,我们很难对数学是现代文化的完整部分这一断言提出什么争议.

——布柔德本(Broadbent,T)

数学既和几乎所有的人类活动有关,又对每一个真心感兴趣的人有益.

——巴克(Buck,R. C)

一个国家的科学水平可以用它消耗的数学来度量.

——拉奥(Rao,A. N)

要辩证而又唯物地了解自然,就必须熟悉数学.

——恩格斯(Engels,F)

目 录

第一章 绪 论

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※
※ 一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达 ※
※ 到真正完善的地步. ※
※ ——卡尔·马克思(Karl. Max) ※
※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

(一) 内容要点

一 基本概念

定义 1 含有自变量、未知函数以及它的某些导数(或微分)的关系式称为微分方程.

微分方程中,如果其中未知函数只与一个自变量有关,则称这种微分方程为常微分方程. 如果未知函数与两个或两个以上自变量有关,则称这种微分方程为偏微分方程.

定义 2 常微分方程中所含未知函数的导数的最高阶数称为常微分方程的阶.

n 阶常微分方程一般形式为

$$F\left(t,x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}\right)=0 \tag{1·1}$$

定义 3 如果微分方程(1·1)的左端为 $x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}$ 的一次有理整式,则称微分方程(1·1)为 n 阶线性微分方程. 不是线性的微分方程称为非线性微分方程.

定义 4 如果 $\varphi(t)$ 在区间 I 上定义且有 1 阶至 n 阶导数 $\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}^2\varphi(t)}{\mathrm{d}t^2},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n\varphi(t)}{\mathrm{d}t^n}$,并且使得

$$F\left(t,\varphi(t),\cdots,\frac{\mathrm{d}^n\varphi(t)}{\mathrm{d}t^n}\right)\equiv 0 \quad t\in I$$

则函数 $\varphi(t)$ 称为微分方程(1·1)在区间 I 上的解.

定义 5 求微分方程满足某种指定条件(即所谓定解条件)的解的问题称为定解问题.

最常见的定解条件是初值条件,对于 n 阶微分方程(1·1)初值条件是指如下 n 个条件:

(1·2) $x(t_0)=x_0,\ \dfrac{\mathrm{d}x(t_0)}{\mathrm{d}t}=x_0^{(1)},\cdots,\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x(t_0)}{\mathrm{d}t^{n-1}}=x_0^{(n-1)}$

这里 $t_0,x_0,x_0^{(1)},\cdots,x_0^{(n-1)}$ 是给定的 $n+1$ 个常数.

求微分方程(1·1)满足初值条件(1·2)的解的问题,称为初值问题或称为 Cauchy 问题.

定义 6 对于 n 阶微分方程(1·1),如果它的含有 n 个互相独立任意常数的解族

(1·3) $x=\varphi(t,c_0,c_1,\cdots,c_{n-1})$

在区间 I 上对任意给定初值条件(1·2),总能找出任意常数 $c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}$ 的特定值(可能为∞)使得对应的解满足此初值条件,则称(1·3)为 n 阶微分方程(1·1)在 I 上的通解.

对于微分方程组也有相类似的基本概念.

二 求已知的曲线族所满足的微分方程

设已知曲线族方程为

(1·4) $\varphi(t,x,c_1,\cdots,c_n)=0$

其中 $c_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是任意常数. 按下列步骤求它所满足的微分方程:设 x 是变量 t 的 n 阶连续可微函数

(1) 对等式(1·4)关于 t 求 n 次导数得

$$(1\cdot 5)\quad \begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}x'=0\\[2mm] \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+2\,\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x}x'+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}x'^2+\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}x''=0\\ \cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial^n\varphi}{\partial t^n}+\cdots+\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}x^{(n)}=0\end{cases}$$

(2) 从关系式(1·4)、(1·5)消去任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$.

三 微分方程的实际背景

常微分方程有着深刻而生动的实际背景,常微分方程是从生产实践和科学技术中产生的,而又成为现代科学技术中分析问题、解决问题的强有力的工具,为了建立比较准确描述现象规律的数学模型——微分方程和定解条件——一般是比较困难,因为它不仅涉及有关的数学概念和方法,而且涉及该问题所属的学科知识.我们从几何问题和物理问题来说明常微分方程的实际背景.对于几何问题,建立微分方程时需要掌握导数、微分的几何意义,以及在数学分析中熟知的用导数、微分来表达的许多其他几何概念及它们之间的关系式等;对于物理问题,除了应用物理定律外,还要知道导数的物理意义.

四　微分方程的几何意义

定义 7　微分方程

$$(1 \cdot 6)\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x)$$

的解 $x=x(t)$ 在 tox 平面的图象，称为微分方程(1・6)的积分曲线．而方程(1・6)的通解 $x=x(t,c)$ 对应于 tox 平面的积分曲线，称为方程(1・6)的积分曲线族．满足初值条件 $x(t_0)=x_0$ 的特解就是通过点 (t_0,x_0) 的一条积分曲线．

定义 8　设微分方程(1・6)的右端函数 $f(t,x)$ 在 tox 平面上区域 G 有定义，对于区域 G 内的每一点 (t,x) 都可以引一条以 $f(t,x)$ 在这点的值为斜率，并一律指向 t 增加方向的有向线段，这样区域 G 上每一点都作出一个方向后，则称 G 为由方程(1・6)确定的方向场．

定义 9　在由方程(1・6)确定的方向场中，方向相同的点的几何轨迹称为等倾线，等倾线方程为

$$f(t,x)=k$$

其中 k 是参数．

定理　曲线 L 为方程(1・6)的积分曲线的充要条件是在 L 上任一点的切线与方程(1・6)所确定方向场在该点的有向线段重合，即曲线 L 的每点均与方向场的有向线段相切．

要想较精确地作出积分曲线，还必须进一步弄清楚积分曲线的极值点、拐点等．显然如果极值、拐点存在的话，它们分别满足方程

$$f(t,x)=0$$

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}+f(t,x)\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}=0.$$

（二）题　解

一　基本概念

指出下列方程中哪些是微分方程，并说明它们的阶数(1～7)

1　$\mathrm{d}y-y^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=0$

答　是微分方程，阶数是一．

2　$y^2=2y+x$

答　不是微分方程．

3　$x\mathrm{d}y+y^2\sin x\mathrm{d}x=0$

答　是微分方程，阶数是一．

4　$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+3y=\mathrm{e}^{2x}$

微分方程定义和微分方程阶的定义：

含有自变量、未知函数以及它的某些导数(微分)的关系式称为微分方程．

微分方程中所含未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的阶．

微分方程解的定义，通解定义和特解定义：

答 是微分方程,阶数是二.

5 $y''+y'=3x$

答 是微分方程,阶数是二.

6 $dy=\frac{y}{x+y^2}dx$

答 是微分方程,阶数是一.

7 $xy'''-(y')^2=0$

答 是微分方程,阶数是三.

指出下列微分方程的阶数,并回答方程是否是线性的(8~9)

8 $y'''-5xy'=e^x+1$

答 三阶线性微分方程.

9 $xy''+x^2y'-\sqrt{y}\sin x=x^2-x+1$

答 二阶非线性微分方程.

验证下列函数是否是相应的微分方程解,是通解还是特解(10~14)

10 $xy'=2y,\quad y=cx^2,\quad y=x^2$

答 $y=cx^2$ 是通解,$y=x^2$ 是特解.

11 $y''=-y,\quad y=\sin x,\quad y=3\sin x-4\cos x$

答 $y=\sin x$ 是特解,$y=3\sin x-4\cos x$ 也是特解.

12 $\frac{dy}{dx}=2y,\quad y=e^x,\quad y=ce^{2x}$

答 $y=e^x$ 不是该微分方程的解,$y=ce^{2x}$是通解.

13 $y'=e^{x-y},\quad y=\ln(c+e^x),\quad y=x$

答 $y=\ln(c+e^x)$是方程通解,$y=x$ 是特解.

14 $y-xy'=0,\quad \begin{cases}x=e^{\arctan t},\\ y=e^{-\arctan t},\end{cases}\quad y=cx$

答 $\begin{cases}x=e^{\arctan t}\\ y=e^{-\arctan t}\end{cases}$ 不是该方程的解,$y=cx$ 是通解.

15 判定 $y(x)=1$ 是否为方程

$$y''+2y'+y=x$$

的解.

解 由 $y(x)=1$ 知 $y'(x)=0,y''(x)=0$,对于任何区间都有

$$y''+2y'+y=0+2\cdot 0+1=1\neq x$$

所以 $y(x)=1$ 不是该方程的解.

16 验证所给函数组$\begin{cases}y=x+e^x\\ z=e^{-x}\end{cases}$是否为微分方程组

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{z-1}{z} & (1)\\ \frac{dz}{dx}=y-x & (2)\end{cases}$$

的解.

如果 $\varphi(t)$在区间 I 定义且有一阶到 n 阶导数,并使得

$$F(t,\varphi(t),\cdots,\frac{d^n\varphi(t)}{dt^n})=0$$

$t\in I$,则称函数 $\varphi(t)$是微分方程

(1) $\quad F(t,x,\frac{dx}{dt},\cdots,\frac{d^nx}{dt^n})=0$

的解;

如果由方程 $\varphi(t,x)=0$ 所确定的隐函数 $x=x(t)$是方程(1)的解,则称它是微分方程(1)的隐式解(亦称为解).

对于 n 阶微分方程(1),若它含有 n 个互相独立任意常数的解 $x=\varphi(t,c_0,c_1,\cdots,c_{n-1})$在区间 I 上对任意给定初值条件:

$$x(t_0)=x_0,x'(t_0)=x_0^{(1)},\cdots,x^{(n-1)}(t_0)=x_0^{(n-1)}$$

总能找出任意常数 $c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}$的特定值使得对应解满足初值条件,则称它为微分方程(1)的通解.

满足初值问题的解称为微分方程特解.

利用微分方程解的定义来判定.

利用微分方程组解的定义来判定.

解 将函数组代入微分方程组(1)式得

左边$=1+e^x$， 右边$=1-e^x$

左边$\neq$右边

代入(2)式得

左边$=-e^{-x}$， 右边$=e^x$

左边$\neq$右边

所以函数组$\begin{cases} y=x+e^x \\ z=e^{-x} \end{cases}$不是微分方程组的解.

17 证明函数组$\begin{cases} x_1=c_1e^{-t}+c_2e^{3t} \\ x_2=2c_1e^{-t}-2c_2e^{3t} \end{cases}$是微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_1-x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_2-4x_1 \end{cases}$$

的通解.

应用方程组通解定义.

证明 易验证函数组是上式微分方程组的解.现设(t_0,x_1^0,x_2^0)是$-\infty<t,x_1,x_2<+\infty$上任一点,代入函数组得

$$\begin{cases} x_1^0=c_1e^{-t_0}+c_2e^{3t_0} \\ x_2^0=2c_1e^{-t_0}-2c_2e^{3t_0} \end{cases}$$

这是关于c_1,c_2的代数方程,由于

$$\begin{vmatrix} e^{-t_0} & e^{3t_0} \\ 2e^{-t_0} & -2e^{3t_0} \end{vmatrix}=-4e^{2t_0}\neq 0$$

所以存在唯一解c_1、c_2,可求得初值问题解,因此函数组是微分方程组通解.

18 证明$y=\ln x$在区间$(0,+\infty)$内是方程

$$xy''+y'=0$$

的一个解,而区间$(-\infty,+\infty)$不是它的定义区间.

微分方程解是函数,因此它有定义区间.

证 当$x\in(0,+\infty)$时$y'=\dfrac{1}{x}$,$y''=-\dfrac{1}{x^2}$,将其代入方程得

$$xy''+y'=x(-\frac{1}{x^2})+\frac{1}{x}=0$$

所以$y=\ln x$是该方程在区间$(0,+\infty)$上的一个解.

因为$x\in(-\infty,0]$时,$y=\ln x$是无意义的,所以区间$(-\infty,+\infty)$不是解的定义区间.

19 证明$y=\dfrac{1}{x^2-1}$在区间$(-1,1)$内是方程

$$y'+2xy^2=0$$

的一个解,但任何包含-1或1点的区间不是它的定义区间.

证 当$x\in(-1,1)$,$y'=\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$,将其代入方程得

$$y'+2xy^2=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}+2x(\frac{1}{x^2-1})^2=0$$

所以 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ 在区间$(-1,1)$内是该方程的一个解.

因为 $x=\pm1$ 时,$y=\dfrac{1}{x^2-1}$ 无定义,所以任何包含 -1 或 1 点的区间都不是它的定义区间.

二 求已知的曲线族所满足的微分方程

建立给定曲线族所满足的微分方程(20～23)

20 $x^2+cy^2-2y=0$

解 设 $y=y(x)$ 是已知曲线族方程的一个连续可微的解,其中 c 是一个不依赖于 x 的常数,则应有恒等式

$$x^2+cy^2(x)-2y(x)=0 \tag{1}$$

两边关于 x 求导得

$$2x+2cy(x)y'(x)-2y'(x)=0$$

从而有 $c=\dfrac{y'(x)-x}{y(x)y'(x)}$

代入(1)式得微分方程

$$(x^2-y)y'-xy=0$$

此即为所求的微分方程.

21 $y=e^{cx}$

解 设 $y=y(x)$ 是已知曲线族方程的一个连续可微的解,则有

$$y(x)=e^{cx} \tag{1}$$

上式关于 x 求导,得

$$y'(x)=ce^{cx}$$

从而得 $c=\dfrac{y'(x)}{y(x)}$

代入(1)式得微分方程

$$y=e^{\frac{y'}{y}x}$$

此即为所求的微分方程.

22 $(x-c_1)^2+c_2y^2=1$

解 设 $y=y(x)$ 是已知曲线族方程的一个二阶连续可微解,则应有恒等式

$$(x-c_1)^2+c_2y^2(x)-1=0$$

关于 x 求导得

$$2(x-c_1)+2c_2y(x)y'(x)=0$$

$$1+c_2(y'(x))^2+c_2y(x)y''(x)=0$$

从上面三个式子中消去任意常数 c_1,c_2 得微分方程

$$y^3y''+(y'^2+yy'')^2=0$$

此即为所求的微分方程.

23 $x-c_1y^2-c_2y-c_3=0$

解 设 $y=y(x)$ 是已知曲线族方程的一个三阶连续可微解,则有

建立给定的曲线族的微分方程一般步骤为:设给定曲线族为

$$\varphi(x,y,c_1,\cdots,c_n)=0$$

其中 $c_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是任意常数.假设 y 是变量 x 的 n 阶连续可微函数.

(1) 对上式关于自变量 x 求 n 次导数得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'=0$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}y'+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y''=0$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^n\varphi}{\partial x^n}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y^{(n)}=0$$

(2) 从上面关系式消去任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$.

$$x-c_1y^2(x)-c_2y(x)-c_3=0$$

关于 x 求导得

$$1-2c_1y(x)y'(x)-c_2y'(x)=0$$

$$2c_1(y'^2(x)+y(x)y''(x))+c_2y''(x)=0$$

$$2c_1(3y'(x)y''(x)+y(x)y'''(x))+c_2y'''(x)=0$$

从上面最后一式得

$$c_1=-\frac{c_2y'''(x)}{2(3y'(x)y''(x)+y(x)y'''(x))}$$

代入上面的第二式得

$$y'^2y'''-3y'(y'')^2=0$$

即 $$3(y'')^2-y'y'''=0 \quad (因为\ y'\neq 0)$$

此即为所求的微分方程.

24 写出平面上所有圆的微分方程.

解 设圆的圆心为 (a,b)，半径为 R(a,b,R 是任意常数)，则圆的标准方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

设 $y=y(x)$ 是方程的一个三阶连续可微解，则有

$$(x-a)^2+(y(x)-b)^2-R^2=0$$

关于 x 求导得

$$x-a+(y(x)-b)y'(x)=0$$

$$1+y'^2(x)+(y(x)-b)y''(x)=0$$

$$3y'(x)y''(x)+(y(x)-b)y'''(x)=0$$

从最后两个式消去 $y(x)-b$，得

$$y'''(1+y'^2)-3y'(y'')^2=0$$

此即为所求的微分方程.

25 建立半径为 1，圆心在直线 $y=2x$ 上的所有圆的微分方程.

解 设圆心坐标为 $(a,2a)$，则圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-2a)^2=1.$$

设 $y=y(x)$ 是方程的一个一阶连续可微解，则有

$$(x-a)^2+(y(x)-2a)^2-1=0.$$

关于 x 求导得

$$x-a+(y(x)-2a)y'(x)=0$$

消去常数 a 得

$$(2x-y)^2(y'^2+1)-(2y'+1)^2=0$$

此即为所求的微分方程.

26 建立摆线族

$$\begin{cases} x=c(t-\sin t) \\ y=c(1-\cos t) \end{cases}$$

的微分方程.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}=\dfrac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$.

$$t=2\arctan(\frac{1}{y})+2k\pi \qquad k\in z$$

把 t 值代入

$$\frac{y}{x}=\frac{1-\cos t}{t-\sin t}$$

得 $$y'=\cot\frac{x+yy'}{y(1+y'^2)}$$

此即为所求的微分方程.

27 证明:二次曲线的微分方程具有

$$9(y'')^2y^{(5)}-45y''y'''y^{(4)}+40(y''')^3=0$$

形式.

证 设二次曲线为

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

其中 a,b,c,d,e,f 是常数,$a\neq0$,为简单起见,设 $a=1$ 即

$$x^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

关于 x 求导得

$$x+b(y+xy')+cyy'+d+ey'=0 \tag{1}$$

$$1+b(2y'+xy'')+c(y'^2+yy'')+ey''=0 \tag{2}$$

$$b(3y''+xy''')+c(3y'y''+yy''')+ey'''=0 \tag{3}$$

$$b(4y'''+xy^{(4)})+c[3(y'')^2+4y'y'''+yy^{(4)}]+ey^{(4)}=0 \tag{4}$$

$$b(5y^{(4)}+xy^{(5)})+c(10y''y'''+5y'y^{(4)}+yy^{(5)})+ey^{(5)}=0 \tag{5}$$

从上式(2),(3),(4)求出

$$\begin{cases} c=\dfrac{3y''y^{(4)}-4(y''')^2}{3y'^2y''y^{(4)}-4y'^2(y''')^2-6y'(y'')^2y'''+9(y'')^4} & (6)\\[2ex] b=\dfrac{3y''^2y'''+4y'(y''')^2-3y'y''y^{(4)}}{3y'^2y''y^{(4)}-4y'^2(y''')^2-6y'(y'')^2y'''+9(y'')^4} & (7)\end{cases}$$

从(2),(5)式消去 e,并将(6),(7)式代入消去 e 的结果中,得

$$9(y'')^2y^{(5)}-45y''y'''y^{(4)}+40(y''')^3=0$$

所以结果得证.

28 证明:可微曲线族

$$\arctan\frac{y}{x}-\ln c\sqrt{x^2+y^2}=0$$

满足微分方程

$$(x+y)dx-(x-y)dy=0$$

证 设 $y=y(x)$ 是曲线族方程的一阶连续可微解,则有

$$\arctan\frac{y(x)}{x}-\ln\sqrt{x^2+y^2(x)}-\ln c=0$$

关于 x 求导得

$$\frac{xy'(x)-y(x)}{x^2+y^2(x)}-\frac{x+y(x)y'(x)}{x^2+y^2(x)}=0$$

整理得 $(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y=0$

所以结论得证.

29 设某个微分方程的通解具有

$$y=c_1x+c_2\mathrm{e}^x+c_3(x+x^2)$$

形式,函数 $y=x+1$ 是否是这个微分方程的特解?

应用微分方程通解、特解的定义.

解 $y=x+1$ 不是这个微分方程特解,实因对于任意常数 c_1,c_2,c_3 取任何值(包括趋于$\pm\infty$),不能从通解得出这个函数.

30 求以$(x+c)^2+y^2=1$ 为通解的微分方程.

求通解所满足的微分方程,实际就是求给定曲线族(通解所表示的曲线族)所满足的微分方程.

解 设 $y(x)$是方程的一阶连续可微解,则有

$$(x+c)^2+y^2(x)-1=0$$

关于 x 求导得

$$(x+c)+y(x)y'(x)=0$$

消去$(x+c)$得

$$y^2y'^2+y^2=1$$

所以所求微分方程为

$$y^2y'^2+y^2=1.$$

31 求以 $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{2x}$ 为通解的微分方程.

解 关于 x 求导得

$$y'=c_1\mathrm{e}^x+2c_2\mathrm{e}^{2x}$$

$$y''=c_1\mathrm{e}^x+4c_2\mathrm{e}^{2x}$$

由上两式求得

$$c_2=\frac{1}{2}(y''-y')\mathrm{e}^{-2x}$$

$$c_1=(2y'-y'')\mathrm{e}^{-x}$$

代入通解得

$$y''-3y'+2y=0$$

所以所求微分方程为

$$y''-3y'+2y=0.$$

32 如果微分方程的通解为

$$y=c_1\cos ax+c_2\sin ax \tag{1}$$

求它所满足的微分方程,并求满足初值条件 $y(0)=1,y'(0)=1$的特解.

先求通解所满足的微分方程,然后根据初值条件来确定通解中的任意常数的值.

解 关于 x 求导得

$$y'=-c_1a\sin ax+c_2a\cos ax \tag{2}$$

$$y''=-c_1a^2\cos ax-c_2a^2\sin ax \tag{3}$$

消去常数 c_1,c_2 得

$$y''+a^2y=0$$

所以所求微分方程为