高职高专计算机教材精选

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

离散数学习题与解答

（第二版）

邵学才 等 编著

清华大学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高职高专计算机教材精选

离散数学习题与解答

（第二版）

邵学才 等 编著

清华大学出版社

北京

内 容 简 介

本书是与《离散数学(第二版)》(邵学才等编著)的配套辅导教材。本书概述了《离散数学(第二版)》中的重要知识点，解答了教材中的全部习题，并精选了大量具有典型意义的例题，以加深读者对基本概念和基本理论的认识和运用。书中的例题分析和习题解答叙述详尽、层次分明，有很强的可读性。

本书可作为高职高专院校计算机专业学生学习“离散数学”课程的辅导书。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学习题与解答/邵学才等编著. —2版. —北京：清华大学出版社，2008.6
高职高专计算机教材精选
ISBN 978-7-302-17156-0

Ⅰ.离… Ⅱ.邵… Ⅲ.离散数学—高等学校：技术学校—解题 Ⅳ.TP158-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 028382 号

责任编辑：束传政
责任校对：李 梅
责任印制：杨 艳
出版发行：清华大学出版社
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn
邮 编：100084
社 总 机：010-62770175
邮 购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京嘉实印刷有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185×260 印 张：12 字 数：272 千字
版 次：2008 年 6 月第 2 版 印 次：2008 年 6 月第1 次印刷
印 数：1～4000
定 价：19.00 元

 产品编号：022174—01

第二版前言

《离散数学》(21 世纪计算机专业大专系列教材)已出版第二版。在《离散数学》第二版中,修订的主要部分是:第 5 章图论的大部分内容和第 7 章谓词逻辑的全部内容,教材中的习题也有相应的变动,其中第 5 章和第 7 章的习题全部更新。因此,作为与《离散数学》配套的辅导教材《离散数学习题与解答》将同时出版第二版。《离散数学习题与解答》第二版将给出《离散数学》第二版全部习题的解答。

第二版的习题,在质量上有明显的提高。经过精心地挑选,习题的难度适中,更贴近高职高专学生的实际水平;习题的内容与基本概念紧密结合,使解题的过程成为逐步加深理解基本概念的过程,习题真正成为教材中不可替代的组成部分。带 * 号的习题不作教学要求,有兴趣的学生可以选做。

在第二版的修订过程中,得到高莹先生的支持和帮助,作者深表谢意。

诚恳欢迎广大读者对本书提出批评和指正。

邵学才

2006 年 6 月

前言

本书是与《离散数学》(邵学才等编著)配套的辅导教材。

“离散数学”是一门理论抽象、内容广泛、结构严谨的计算机专业基础课程。它不仅与后续课程,如:数据结构、数据库原理、操作系统、人工智能等有紧密联系,而且在培养学生的创新能力,提高学生的科研素质方面都有着重要作用。为了学好“离散数学”课程,首先要对基本概念和基本理论有较好的把握,它不仅需要深入地思考,反复领会,更需要做大量的习题,在解题过程中,一方面提高自己的解题技巧;另一方面,也是更重要的方面,是深化对基本概念和基本理论的认识。因为有些习题往往是基本概念和基本理论的一种具体描述,而有些习题则是基本概念和基本理论的一种实际运用。所以解题过程就是进一步领悟的过程,深入理解的过程。因此,做大量的习题是学好“离散数学”课的关键之一。但由于“离散数学”课中的习题有一定的难度,它的解题方法与“高等数学”等课程的解题方法有较大的差异,初学者面对习题经常会感到无从下手,难以适应。为了帮助初学者能顺利地学好“离散数学”课,我们专门编写了这本以解题为主要内容的辅导教材。

在辅导教材中,每一章都由三部分组成。

第一部分是内容提要。它只是把这一章的主要内容作简明的阐述,便于在解题时查阅所需要的定义、定理、公式和有关概念;第二部分是例题分析。这部分内容有较强的针对性,前几个例题通常和《离散数学》教材中的习题有某些相似之处,其目的是给初学者提供解题的思路,具有一定的启示作用。后几个例题中,有些有较大的难度,以提高解题技巧。有些构思精巧,可以提高对基本概念和基本理论的认识和运用,并能进一步激发学习“离散数学”课的兴趣;第三部分是习题与解答。它把《离散数学》教材中所有习题做了详尽的解答。

最后,还是要说句老话:当你刚开始做题时,不要忙于去翻阅解答,更不要抄些解答去应付你的老师,解题是自我提高的过程,思考,思考,再思考;当你经过长时间的思考后,再去参阅习题解答,就会有

所领悟,就会感到受益匪浅。

这本辅导教材是由北京工业大学计算机学院邵学才教授主持编写的,北京语言文化大学石嘉明副教授,北京工业大学计算机学院蒋强荣副教授、邓米克副教授、沈彤英副教授参与了编写。在编写过程中,得到全国高等学校计算机教育研究会副理事长李大友教授的关切和支持,北京工业大学计算机学院刘建丽副教授细心地阅读了书稿并提出很多有益的建议,对此作者深表谢意。在繁忙的教学和编写工作中,得到张锡恩先生、张绍昆先生和张静小姐的悉心帮助,作者表示诚挚的感谢。

邵学才

2001年9月

目录

第 1 章 集合

1.1 内容提要

1.1.1 集合的基本概念

集合是具有某种特点的研究对象的聚合，其中每一个对象称为这个集合的元素。通常用大写的英文字母 $A,B,\cdots$ 表示集合，用小写的英文字母 $a,b,\cdots$ 表示集合中的元素。当 a 是集合 A 中的元素时，称 a 属于 A，并记作 $a\in A$，否则记作 $a\notin A$。

1. 集合的表示方法

(1) 列举法。这种表示方法是把集合中的所有元素一一列举出来，元素间用逗号分开，并用花括号把它们括起来。如：

$$A=\{2,3,5,7,11,13\}$$

(2) 特征法。特征法是以某个小写的英文字母统一表示该集合的元素，并指出这类元素的共同特征。如：

$$B=\{x \mid x \text{是小于 15 的素数}\}$$

当两个集合 P 和 Q 有同样的元素时，称这两个集合相等，记作 $P=Q$。

显而易见，上面提到的集合 A 和 B 是相等的，即有 $A=B$。

2. 子集、全集与补集

如果集合 A 中每一个元素又都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，并记作

$$B\supseteq A \text{ 或 } A\subseteq B$$

如果 A 是 B 的子集，且 B 中总有一些元素不属于 A，则称 A 是 B 的真子集，并记作

$$B\supset A \text{ 或 } A\subset B$$

由子集的定义可得：

定理 1.1.1 集合 A 和集合 B 相等的充分必要条件是 $A\supseteq B$ 且 $B\supseteq A$。

不含有任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$ 或 $\{\ \}$。

由空集的定义可知，空集是任何集合的子集。

当研究对象总是限制在某个集合时，这个集合称为全集，记作 U。

由属于全集 U，但不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为 A 的补集，记作 $\overline{A}$ 或 $\sim A$。

3. 幂集

由集合 A 中所有子集作为元素构成的集合称为 A 的幂集，记作 $P(A)$。例如

$$A=\{1,2\}$$

则

$$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

定理 1.1.2 设 A 是有限集，且 A 中含有 n 个元素，则幂集 $P(A)$ 有 2^n 个元素。

有限集 A 中元素个数称为 A 的基，记作 $|A|$，所以当 $|A|=n$ 时，$|P(A)|=2^n$。

1.1.2 集合的基本运算

1. 并运算

定义 1.1.1 集合 A 和 B 的并记作 $A\cup B$，它也是一个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素合并在一起构成的，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

2. 交运算

定义 1.1.2 两个集合 A 和 B 的交记作 $A\cap B$，它也是一个集合，由属于 A，B 两集合的所有共同元素构成，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

3. 减运算

定义 1.1.3 由属于集合 A 但不属于集合 B 的那些元素构成的集合称为 A 减 B 的差，记作 $A-B$，即

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

4. 对称差

定义 1.1.4 集合 A 和 B 的对称差记作 $A\oplus B$，它是个集合，其元素或属于 A，或属于 B，但不能既属于 A 又属于 B，即

$$\begin{aligned}A\oplus B&=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B,\text{但 } x\notin A\cap B\}\\&=(A\cup B)-(A\cap B)\end{aligned}$$

5. 集合运算的常用公式

(1) $A\cup A=A$

$A\cap A=A$

(2) $A\cup B=B\cup A$

$A\cap B=B\cap A$

(3) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(4) $A\cup U=U$

$A\cap U=A$

(5) $A\cup\varnothing=A$

$A\cap\varnothing=\varnothing$

(6) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(7) $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$

(8) $A\cap(A\cup B)=A$

$A\cup(A\cap B)=A$

(9) $A-B=A\cap\bar{B}$

(10) $A\oplus B=B\oplus A$

(11) $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

(12) $A\oplus A=\varnothing$

(13) $A\oplus\varnothing=A$

(14) $A\oplus U=\bar{A}$

(15) $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$

1.1.3 包含排斥原理

设 A 和 B 是有限集，则

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

上式就是关于两个集合的包含排斥原理。对于 3 个集合，则有

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

一般情况下有

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|$$
$$+\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

本章的重点：熟练掌握集合的基本运算，熟记集合运算中的常用公式，并能熟练地运用常用公式证明、求解和分析问题；能求出给定集合的幂集；并能利用包含排斥原理求解一些简单的组合计数问题。

本章的难点：集合的对称差运算，包含排斥原理的运用。

1.2 例题分析

例 1.1 设集合 $A=\{1,2,3,4\}$，求其幂集 $P(A)$。

解 这里将给出一种与《离散数学(第二版)》教材不同的求解方法。

易知，当集合 A 中含有 4 个元素时，其幂集 $P(A)$ 含有 2^4 个元素。因此可以把幂集 $P(A)$ 中的元素与 4 位二进制序列(0000～1111)建立一一对应关系，从而方便地求得

幂集。

具体的做法是：先把集合 A 中的元素确定一种排列顺序，在本例中，集合 A 中元素的排列顺序为 1,2,3,4。其幂集 $P(A)$ 中的元素与 4 位二进制序列的一一对应关系如下：

1 2 3 4		$P(A)$ 中的元素
0 0 0 0	→	$\varnothing$
0 0 0 1	→	$\{4\}$
0 0 1 0	→	$\{3\}$
0 0 1 1	→	$\{3,4\}$
	⋮	
1 1 1 0	→	$\{1,2,3\}$
1 1 1 1	→	$\{1,2,3,4\}$

如果把 $P(A)$ 中与 4 位二进制序列 k 所对应的元素记作 A_k，则

$P(A)=\{A_{0000},A_{0001},A_{0010},A_{0011},A_{0100},A_{0101},A_{0110},A_{0111},A_{1000},A_{1001},A_{1010},A_{1011},A_{1100},A_{1101},A_{1110},A_{1111}\}$，即有

$$P(A)=\{\varnothing,\{4\},\{3\},\{3,4\},\{2\},\{2,4\},\{2,3\},\{2,3,4\},\{1\},\{1,4\},\{1,3\},\{1,3,4\},\{1,2\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{1,2,3,4\}\}$$

例 1.2 设 $\mathbf{I}_+$ 是正整数集合，集合 A,B,C 分别为：

$$A=\{x\mid x=k\pi,k\in\mathbf{I}_+\}$$

$$B=\left\{x\mid x=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{I}_+\right\}$$

$$C=\left\{x\mid x=\frac{k\pi}{2}+2\pi,k\in\mathbf{I}_+\right\}$$

求下列运算结果：

(1) $A\cap B\cap C$

(2) $(A\cup B)-C$

(3) $A-(B\cup C)$

(4) $C-(A\oplus B)$

解 为了便于运算，把集合 A,B,C 用列举法表示为：

$$A=\{\pi,2\pi,3\pi,\cdots\}$$

$$B=\left\{2\pi+\frac{\pi}{2},4\pi+\frac{\pi}{2},6\pi+\frac{\pi}{2},\cdots\right\}$$

$$C=\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi,3\pi,\frac{\pi}{2}+3\pi,\cdots\right\}$$

由此可知

(1) $A\cap B\cap C=\varnothing$

(2) $(A\cup B)-C=\{\pi,2\pi\}$

(3) $A-(B\cup C)=\{\pi,2\pi\}$

(4) 易见，$A\cap B=\varnothing$，所以

$$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$$

$$= A \cup B$$
$$= \left\{\pi, 2\pi, 2\pi+\frac{\pi}{2}, 3\pi, 4\pi, 4\pi+\frac{\pi}{2}, \cdots\right\}$$

于是可得

$$C-(A \oplus B)=\left\{3\pi+\frac{\pi}{2}, 5\pi+\frac{\pi}{2}, 7\pi+\frac{\pi}{2}, \cdots\right\}$$
$$=\left\{x \mid x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{I}_+\right\}$$

例 1.3 证明下列等式：

(1) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$

(2) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$

(3) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

(4) $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(C-A)$

(5) $(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)=A\cup B$

证明 (1) $(A-B)-C=(A\cap\bar{B})-C$

$=(A\cap\bar{B})\cap\bar{C}$

$=A\cap(\overline{B\cup C})$

$=A-(B\cup C)$

(2) $A-(B-C)=A-(B\cap\bar{C})$

$=A\cap(\overline{B\cap\bar{C}})$

$=A\cap(\bar{B}\cup C)$

$=(A\cap\bar{B})\cup(A\cap C)$

$=(A-B)\cup(A\cap C)$

(3) $(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap\bar{C}$

$=(A\cap\bar{C})\cup(B\cap\bar{C})$

$=(A-C)\cup(B-C)$

(4) $A\cup(B-C)=A\cup(B\cap\bar{C})$

$=(A\cup B)\cap(A\cup\bar{C})$

$=(A\cup B)\cap(\overline{\overline{A\cup\bar{C}}})$

$=(A\cup B)\cap(\overline{\bar{A}\cap C})$

$=(A\cup B)-(\bar{A}\cap C)$

$=(A\cup B)-(C-A)$

(5) 左式 $=(A-B)\cup((B-A)\cup(A\cap B))$

$=(A-B)\cup((B\cap\bar{A})\cup(A\cap B))$

$=(A-B)\cup(B\cap(\bar{A}\cup A))$

$=(A-B)\cup B$

$=(A\cap\bar{B})\cup B$

$=(A\cup B)\cap(\bar{B}\cup B)$

$=A\cup B$

【注意】 下面给出例 1.4 和例 1.5 有一定难度的证明题，看在证明过程中是如何运用公式的，特别是分配律的使用。

例 1.4 证明下列等式：

(1) $(A-B)\cup(B-C)\cup(C-A)\cup(A\cap B\cap C)=A\cup B\cup C$

(2) $(A-B)\cup(B-C)\cup(C-A)=(A\cup B\cup C)\cap(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C})$

证明 (1) 利用并运算的可交换性可知

$$\begin{aligned}
\text{左式} &= ((A-B)\cup(A\cap B\cap C))\cup(B-C)\cup(C-A)\\
&=((A\cap\bar{B})\cup(A\cap B\cap C))\cup(B-C)\cup(C-A)\\
&=(A\cap(\bar{B}\cup(B\cap C)))\cup(B-C)\cup(C-A)\\
&=(A\cap((\bar{B}\cup B)\cap(\bar{B}\cup C)))\cup(B-C)\cup(C-A)\\
&=(A\cap(\bar{B}\cup C))\cup(B-C)\cup(C-A)\\
&=(A\cap\bar{B})\cup(A\cap C)\cup(B-C)\cup(C-A)\\
&=(A\cap\bar{B})\cup(A\cap C)\cup(B\cap\bar{C})\cup(C\cap\bar{A})\\
&=(A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{C})\cup(C\cap(A\cup\bar{A}))\\
&=(A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{C})\cup C\\
&=(A\cap\bar{B})\cup((B\cup C)\cap(\bar{C}\cup C))\\
&=(A\cap\bar{B})\cup B\cup C\\
&=((A\cup B)\cap(\bar{B}\cup B))\cup C\\
&=A\cup B\cup C
\end{aligned}$$

(2) 利用减法公式和分配律可知

$$\begin{aligned}
\text{左式} &= (A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{C})\cup(C-A)\\
&=(((A\cap\bar{B})\cup B)\cap((A\cap\bar{B})\cup\bar{C}))\cup(C-A)\\
&=(((A\cup B)\cap(\bar{B}\cup B))\cap((A\cup\bar{C})\cap(\bar{B}\cup\bar{C})))\cup(C-A)\\
&=((A\cup B)\cap(A\cup\bar{C})\cap(\bar{B}\cup\bar{C}))\cup(C\cap\bar{A})\\
&=((A\cup B)\cup(C\cap\bar{A}))\cap((A\cup\bar{C})\cup(C\cap\bar{A}))\cap((\bar{B}\cup\bar{C})\cup(C\cap\bar{A}))\\
&=(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B\cup\bar{A})\cap(A\cup\bar{C}\cup C)\cap(A\cup\bar{C}\cup\bar{A})\\
&\quad\cap(\bar{B}\cup\bar{C}\cup C)\cap(\bar{B}\cup\bar{C}\cup\bar{A})\\
&=(A\cup B\cup C)\cap(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C})
\end{aligned}$$

例 1.5 证明下列等式：

(1) $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$

(2) $\overline{A\oplus B}=\bar{A}\oplus B$

(3) $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

(4) $(A\oplus B)\cap(A\oplus C)=((B\cap C)-A)\cup(A-(B\cup C))$

证明 (1) 由对称差定义可知

$$\begin{aligned}
A\oplus B &= (A\cup B)-(A\cap B)\\
&=(A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)}\\
&=(A\cup B)\cap(\bar{A}\cup\bar{B})\\
&=((A\cup B)\cap\bar{A})\cup((A\cup B)\cap\bar{B})
\end{aligned}$$

$$=(A\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{B})$$
$$=(A-B)\cup(B-A)$$

(2) 由于 $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$,所以

$$\begin{aligned}\overline{A\oplus B}&=\overline{(A-B)\cup(B-A)}\\&=\overline{(A-B)}\cap\overline{(B-A)}\\&=\overline{(A\cap\overline{B})}\cap\overline{(B\cap\overline{A})}\\&=(\overline{A}\cup B)-(B\cap\overline{A})\\&=\overline{A}\oplus B\end{aligned}$$

(3) 右式$=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

$$\begin{aligned}&=((A\cap B)-(A\cap C))\cup((A\cap C)-(A\cap B))\\&=(A\cap B\cap(\overline{A\cap C}))\cup(A\cap C\cap(\overline{A\cap B}))\\&=(A\cap B\cap(\overline{A}\cup\overline{C}))\cup(A\cap C\cap(\overline{A}\cup\overline{B}))\\&=(A\cap B\cap\overline{A})\cup(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap C\cap\overline{A})\cup(A\cap C\cap\overline{B})\\&=(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap C\cap\overline{B})\\&=A\cap((B\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{B}))\\&=A\cap((B-C)\cup(C-B))\\&=A\cap(B\oplus C)=\text{左式}\end{aligned}$$

(4) 左式$=(A\oplus B)\cap(A\oplus C)$

$$\begin{aligned}&=((A\cup B)-(A\cap B))\cap((A\cup C)-(A\cap C))\\&=(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})\cap(A\cup C)\cap(\overline{A\cap C})\\&=(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cup C)\cap(\overline{A}\cup\overline{C})\\&=(A\cup(B\cap C))\cap(\overline{A}\cup(\overline{B}\cap\overline{C}))\\&=((A\cup(B\cap C))\cap\overline{A})\cup((A\cup(B\cap C))\cap(\overline{B}\cap\overline{C}))\\&=((B\cap C)\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\\&=((B\cap C)\cap\overline{A})\cup(A\cap(\overline{B\cup C}))\\&=((B\cap C)-A)\cup(A-(B\cup C))\end{aligned}$$

集合的对称差运算是学习本章的难点之一。由对称差运算的定义可知

$$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$$

或可写成

$$A\oplus B=(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$$

由例1.5中(1)等式可知

$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$$

或可写成

$$A\oplus B=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$$

由此得到对称差运算的4种表示方式。针对不同的问题,采用合适的表示方式,往往能使证明过程得到简化。

例 1.6 证明$(A\oplus B)\cup(A\oplus C)=(A-(B\cap C))\cup((B\cup C)-A)$。

证明 由于题中的左式为对称差的"并"，所以对称差也采用"并"的表示方式。即

$$
\begin{aligned}
\text{左式} &= (A-B)\cup(B-A)\cup(A-C)\cup(C-A)\\
&= (A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})\cup(A\cap\bar{C})\cup(C\cap\bar{A})\\
&= (A\cap(\bar{B}\cup\bar{C}))\cup((B\cup C)\cap\bar{A})\\
&= (A\cap\overline{(B\cap C)})\cup((B\cup C)\cap\bar{A})\\
&= (A-(B\cap C))\cup((B\cup C)-A)
\end{aligned}
$$

例 1.7 设 A,B,C 是集合，证明

(1) 如果 $A\oplus B=\varnothing$，则 $A=B$；

(2) 如果 $A\oplus B=A\oplus C$，则 $B=C$；

(3) 如果$(A\oplus B)\cup(A\oplus C)=\varnothing$，则 $A=B=C$。

证明 (1) 因为 $A\oplus B=\varnothing$，所以

$$(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$$

即有

$$A-B=\varnothing \quad \text{和} \quad B-A=\varnothing$$

也即有

$$B\supseteq A \quad \text{和} \quad A\supseteq B$$

由此证得 $A=B$。

(2) 由于 $A\oplus A=(A\cup A)-(A\cap A)=A-A=\varnothing$，所以

$$A\oplus A\oplus B=A\oplus A\oplus C$$

$$\varnothing\oplus B=\varnothing\oplus C$$

而$\varnothing\oplus B=(\varnothing\cup B)-(\varnothing\cap B)=B$，同样有$\varnothing\oplus C=C$，由此得证。

(3) 由于$(A\oplus B)\cup(A\oplus C)=\varnothing$，所以

$$A\oplus B=\varnothing \quad \text{和} \quad (A\oplus C)=\varnothing$$

即有

$$A=B \quad \text{和} \quad A=C$$

由此证得 $A=B=C$。

例 1.8 某班有学生 72 人，其中选学英语的有 30 人，选学日语的有 36 人，选学法语的有 29 人；兼学英语和日语的有 12 人；三门外语都选学的有 5 人；仅选法语的有7 人。问这 3 门外语都不学的人数是多少？

解 设 A 表示选学英语学生的集合，B 表示选学日语学生的集合，C 表示选学法语学生的集合。

由题设可知，$|A|=30$，$|B|=36$，$|C|=29$，$|A\cap B|=12$，$|A\cap B\cap C|=5$。

由于仅仅学习法语的人数为 7，所以

$$7=|C|-(|C\cap B|-|A\cap B\cap C|+|C\cap A|-|A\cap B\cap C|)-|A\cap B\cap C|$$

其中括号中的内容$|C\cap B|-|A\cap B\cap C|+|C\cap A|-|A\cap B\cap C|$表示仅仅学习法语和日语两种外语的人数以及仅仅学习法语和英语两种外语的人数。由此可得

$$|B\cap C|+|A\cap C|=27$$