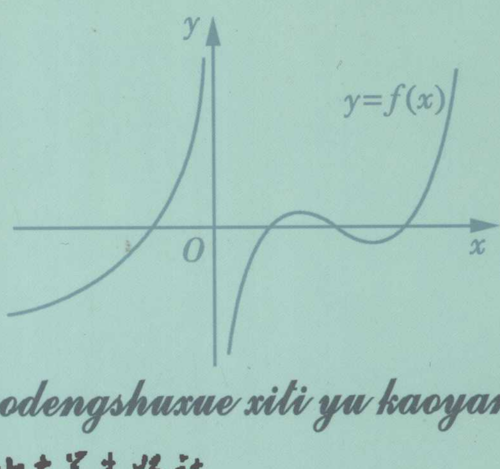
大学数学学习指导丛书

高等数学

习题与考研题解析（下册）

黄光谷 黄川 蔡晓英 李 杨 编



Gaodengshuxue xiti yu kaoyanti jiexi

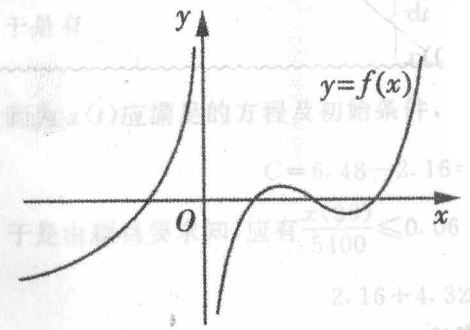
中山大学出版社

大学数学学习指导丛书

高等数学

习题与考研题解析（下册）

黄光谷　黄　川　蔡晓英　李　杨　编



Gaodengshuxue xiti yu kaoyanshiti jiexi

中山大学出版社
·广　州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题与考研题解析(下册)/黄光谷,黄川,蔡晓英,李杨编.—广州:中山大学出版社,2004.8

(大学数学学习指导丛书)

ISBN 7－306－02304－7

Ⅰ.高… Ⅱ.①黄… ②黄… ③蔡… ④李… Ⅲ.高等数学—高等学校—解题

Ⅳ.O13－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 046626 号

选题策划:曾纪川
责任编辑:李文　李立鹏
封面设计:朱霭华
责任校对:李春梅
责任技编:黄少伟
出版发行:中山大学出版社
　　　　编辑部电话(020)84111996,84113349
　　　　发行部电话(020)84111998,84111160
地　　址:广州市新港西路 135 号
邮　　编:510275　　传真:(020)84036565
印 刷 者:江门市新教彩印有限公司
经 销 者:广东新华发行集团
规　　格:787mm×1092mm　1/16　16.625 印张　410 千字
版次印次:2004 年 8 月第 1 版　2004 年 8 月第 1 次印刷
定　　价:28.00 元

内容简介

本书与同济大学应用数学系编的《高等数学》(第五版)教材同步、章节一致，立足工科本科，兼顾理科、农林经管与专科及“专升本”、“考研”者，按照“教学基本要求”和“考研数学大纲”(两者是一致的，简称“考纲”)的要求编写，各章开始列有考纲要求及复习指导，指出了重点、难点、关键和常考点，各节分为四个层次编写：主要公式、例题增补、习题解析与考研题解析，对一些典型的范例、习题和考题进行了精辟的分析和解答，书末附有当年的考研试题及解答.

本书具有代表性、通用性，是大学生学习高等数学的入门工具和良师益友，是考研者、“专升本”备考数学的参考资料和复习指南. 本书由浅入深、循序渐进、通俗易懂、适用面广、可读性强，特别适宜各工、理、农林、财经管等本、专科各专业大学生和“考研”、“专升本”者阅读，也可作为教师备课、辅导和命题的参考书.

前　言

高等数学是高等院校普遍开设的必修基础课，其重要性是众所周知的．初学者学起来困难重重，特别是不会解题，但这又是衡量学得好与坏的重要标志，本书就是为了帮助读者解决这些困难而编写的．

本书与用得最多的同济大学应用数学系编的《高等数学》(第五版)教材同步、各章节目录一致，便于读者配合教材，加深理解进行学习．各章开始列有考纲(2004 年考研数学大纲之数学一)的要求，这实际上也是教学大纲的要求(教学基本要求)，指出了各章的重点、难点、关键与常考点，编写了复习指导，便于读者高屋建瓴、提纲挈领地掌握全章内容．

各节(教材中有些简单的节，本书进行了合并，作为教与学的一个单元)分为四个层次编写．

一、主要公式(含主要定理等)．便于读者一目了然地系统掌握该节内容，这也是为后几个部分服务、作知识准备和铺垫的，这是基础知识．

二、例题增补．这是为三、四部分服务的．教材受篇幅所限，并让教师有发挥的余地，一般都写得精练，不能举很多例题作示范．这部分内容弥补了不足，使读者开拓眼界、获得启发，学习怎样用所学知识去解题．这是一些有代表性的例题；其中有一些是 1987 年以前部分重点院校的考研试题；还有各地或重点院校的部分数学竞赛试题，有的竞赛题又出现在考研题之中，这是发人深省的；阅读这些例题还可激发读者学习的兴趣．在题末标有(赛、2001、京)者，指的是 2001 年北京市的数学竞赛试题，其余类似．对于阅读例题增补感觉困难的读者，可以先读本书各节的第一、三部分；再读第二、四部分，就不会困难了．

三、习题解析．选解了同济五版《高等数学》教材中约一半的习题．有的题已作了详细的分析或提示者，不重复解答．另一半未解的习题是比较容易或类似之题，留给读者自己解答是不困难的．简单的分析用【　　】标出．选解题的题号与教材一致，便于读者对照，不重新编号．例如某节之三、习题解析一开始是“3．……”，说明第 1、2 题较易未选解，指的是原教材第 3 题．

四、考研题解析．选解了历年全国硕士研究生入学考试数学一至四约一半的高等数学试题．这是一些很有代表性、带指导性的试题(常称为“指挥棒”)．读者不要畏惧这些试题，它们没有超出考纲和教学基本要求，大部分题不困难，只不过综合性强一些；少量题难度大一些、灵活一些、实践性强一些．在读懂前三部分的基础之上，这部分是可以读懂的，甚至可以自己做出来．考研题的综合题较多，少数题可能在编排上会用到稍后的知识，但也是可以读懂的．在题号后标有(研、2003、一)者，指该题是 2003 年全国考研数学一的试题，其余类似．解后画有_____者，为填空题答案，如__5__；题后留(　　)者，为选择题．

书末所附当年考研试题，可作为模拟测试题，读者先动手去做一做，再核对阅读解答．

特别要感谢李立鹏先生和出版社的同志们，他们为本书的出版做了大量细致的工作．书中引用了教材和其他书籍的一些资料，在此一并致谢！

由于我们水平有限和时间仓促，书中可能有错误或缺点，欢迎读者指正，以便再版时修改．

目　　录

第八章　多元函数微分法及其应用

考纲要求

1. 理解多元函数的概念，理解二元函数的几何意义.

2. 了解二元函数的极限与连续性的概念，以及有界闭区域上连续函数的性质.

3. 理解多元函数偏导数和全微分的概念，会求全微分，了解全微分存在的必要条件和充分条件，了解全微分形式的不变性.

4. 理解方向导数与梯度的概念并掌握其计算方法.

5. 掌握多元复合函数一阶、二阶偏导数的求法.

6. 会求隐函数的求导法则.

7. 了解曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念，会求它们的方程.

8. 了解二元函数的二阶泰勒公式.

9. 理解多元函数极值和条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求简单多元函数的最大值和最小值，并会解决一些简单的应用问题.

复习指导

重点　偏导数、全微分概念，复合函数求导法则，多元函数的极值、最大(小)值及应用.

难点　多元复合函数求导法则，隐函数(组)求导公式，方向导数与梯度.

关键　画复合函数关系的联络图(树图)，运用连锁规则，找出目标函数和约束条件，学会运用拉格朗日乘数法.

常考点　复合函数求一阶、二阶导数；多元函数的极值与最大(小)值及应用题；多元函数微分学的几何应用.

复习注意

1. 搞清多元函数有定义、存在极限、连续、存在偏导数、存在方向导数、可微与存在连续偏导数之间的关系，如下所示(≪读作“远小于”，表示“弱于”)：

$$\left.\begin{array}{l}\text{有定义}\ll\\ \exists\ \text{极限}\ll\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\text{连续}\ll\\ \exists\ \text{偏导数}\ \ll\\ \exists\ \text{方向导数}\ll\end{array}\right\}\text{可微}\ll\exists\ \text{连续偏导数}$$

像一元函数一样，对分段表示的多元函数，要会用定义求偏导数.

2. 用复合函数求导法则求偏导数的考题较多. 在使用多元函数的连锁规则时，最好画一“树图”(联络图)，分清函数、各中间变量、各自变量之间的关系，避免记错或记不得求导公式；在树图中，要注意**“分线相加，连线相乘”**，各种符号的区别：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$与$\frac{\partial}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial f}{\partial x}$，$f'_1$、$f''_{12}$、$f''_{21}$等等.

3. 有时运用全微分形式的不变性求偏导数比较方便，可以一举几得，应尽量采用之.

4. 多元函数的极值，最大(小)值及应用题的考分多，应重视. 若是条件极值，尽量运用拉格朗日乘数法解之，则比较方便.

第一、二节　多元函数的基本概念　偏导数

一、主 要 公 式

平面点集的有关概念(略，见教材).

n 维空间　$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}$.

距离　$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$.

范数　$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$.

极限　$\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\Longleftrightarrow x_i\to a_i(i=1,2,\cdots,n)$.

邻域　$U(\boldsymbol{a},\delta)=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})<\delta\}$

n 元函数　$u=f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),P\in D$.

图形　二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形是三维空间的曲面.

函数(二重)极限　$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)\triangleq\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=A\Longleftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$,

当 $P\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$ 时(P_0 是 f 的定义域 D 的聚点)，都有 $|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\delta$.

连续　$f(x,y)\in C(P_0)\Longleftrightarrow\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)=f(x_0,y_0)$.

多元初等函数在其定义域内皆连续.

性质　在有界闭区域 D 上的多元连续函数，必在 D 上有界，取最大、最小值，具有介值性和一致连续性.

偏导数　$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{P=P_0}\triangleq f_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$.

$$f_z'(x,y,z)\triangleq\lim_{\Delta z\to0}\frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z}.$$

求偏导法　视其他变元为参数(常数)，用一元函数求导公式计算之.

高阶偏导数　$\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right),\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\triangleq f_{xy}$.

定理　若 $f_{xy},f_{yx}\in C(D)\Longrightarrow f_{xy}=f_{yx}$.

二、例 题 增 补

例 1　求下列函数的定义域：

$$z=\ln(x-y+1)+\sqrt{4-x^2-y^2}-\sin(x+y)/\sqrt{x^2+y^2-1}$$

解　解不等式组

$$\begin{cases}x-y+1>0\\4-x^2-y^2\geqslant0\\x^2+y^2-1>0\end{cases}$$

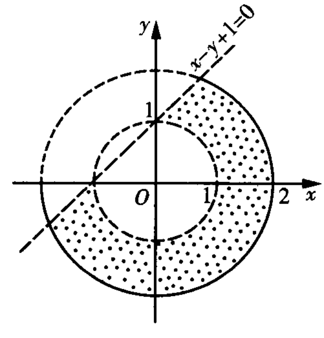


图 8-1

易知所求定义域为下列不等式组确定的平面点集(图 8-1)：

$$D=\{(x,y)\mid x-y+1>0,\quad 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$$

注 由不等式(组)画定义域的方法是先将不等式变成等式，求出边界方程，然后确定定义域应该在边界的哪一边.

例 2 求下列极限：(1)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$；(2)$\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

解 (1)用夹逼准则求之. 因为 $0\leqslant\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{2}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$，而$(x,y)\to(0,0)$时，$\sqrt{x^2+y^2}/2\to 0$，故原式$=0$.

另解 利用换元法化简计算. 令 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，则 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，当$(x,y)\to(0,0)$时，有 $\rho\to 0$；因为$|\sin\theta\cos\theta|\leqslant 1$，所以原式$=\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\sin\theta\cos\theta=0$.

(2)可化为一元函数求极限的问题解之.

$$\text{原式}=\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\left[(x^2e^{-x})e^{-y}+(y^2e^{-y})e^{-x}\right]=\lim_{x\to +\infty}x^2e^{-x}\cdot\lim_{y\to +\infty}e^{-y}+\lim_{x\to +\infty}e^{-x}\cdot\lim_{y\to +\infty}y^2e^{-y}$$
$$=0\cdot 0+0\cdot 0=0.$$

例 3 证明：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & x=y=0\end{cases}$分别对 x 和 y 是连续的，但在原点不连续.

证 当$(x_0,y_0)\neq(0,0)$时，有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xy_0^2}{x^2+y_0^4}=\dfrac{x_0y_0^2}{x_0^2+y_0^4}=f(x_0,y_0)$

当$(x_0,y_0)=(0,0)$时，有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot 0}{x^2+0}=0=f(0,0)$

所以 $f(x,y)$对变量 x 是连续的. 同理可证 $f(x,y)$对变量 y 也是连续的.

在点(0,0)处，当点(x,y)沿抛物线 $x=y^2$ 趋于(0,0)时，有

$$\lim_{x=y^2\to 0}f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{y^4}{y^4+y^4}=\frac{1}{2}\neq f(0,0)$$

故题设函数在点(0,0)不连续.

注 由此可知，证明 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)不连续，只需证明点(x,y)沿某一路径趋于(x_0,y_0)时，$f(x,y)$不趋于$f(x_0,y_0)$即可.

例 4 设 $z=y^x\ln(xy)$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y\ln(xy)+\dfrac{1}{x}y^x$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\ln y\left[y^x\ln y\ln(xy)+\frac{1}{x}y^x\right]+\frac{1}{x}y^x\ln y-\frac{1}{x^2}y^x=y^x\ln y[\ln y\ln(xy)+2/x]-y^x/x^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xy^{x-1}\ln y\ln(xy)+y^{x-1}\ln(xy)+y^{x-1}\ln y+y^{x-1}$$
$$=y^{x-1}[x\ln y\ln(xy)+\ln(xy)+\ln y+1]$$

注 此法为求偏导数的常用之法.

例 5 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(1)求 $f_x(0,0)$；　(2)求 $f_{xy}(0,0)$.

解 (1)$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$.

(2)当 $x=0,y\neq 0$ 时，先算

$$f_x(0,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,y)-f(0,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^3y-y^3\Delta x}{(\Delta x^2+y^2)\Delta x}=-y$$

故
$$f_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y}{\Delta y}=-1$$

注 分段函数在分段点处的偏导数只能按照定义求得.

例 6 若函数 $f(\xi,\eta)$ 具有连续的二阶偏导数且满足 Laplace 方程：$\dfrac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}=0$. 证明：函数 $z=f(x^2-y^2,2xy)$ 也满足 Laplace 方程，即$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

证 设 $\xi=x^2-y^2,\eta=2xy$，则 $z'_x=2xf'_\xi+2yf'_\eta$，　$z'_y=-2yf'_\xi+2yf'_\eta$

$$z''_{xx}=2f'_\xi+2x(f''_{\xi\xi}\xi'_x+f''_{\xi\eta}\eta'_x)+2y(f''_{\eta\xi}\xi'_x+f''_{\eta\eta}\eta'_x)=2f'_\xi+4x^2f''_{\xi\xi}+4xyf''_{\xi\eta}+4xyf''_{\eta\xi}+4y^2f''_{\eta\eta}$$

同理
$$z''_{yy}=-2f'_\xi+4y^2f''_{\xi\xi}-4xyf''_{\xi\eta}-4xyf''_{\eta\xi}+4x^2f''_{\eta\eta}$$

故
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4(x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\right)=0$$

例 7 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，则 $z'_x+z'_y=$______.　　(赛、1996、京)

解 由隐函数求导法，原方程两边分别对 x,y 求偏导数，得

$$2\cos(x+2y-3z)\cdot(1-3z'_x)=1-3z'_x,\quad 2\cos(x+2y-3z)\cdot(2-3z'_y)=2-3z'_y$$

将两式相加，得

$$2\cos(x+2y-3z)[3-3(z'_x+z'_y)]=3-3(z_x+z_y)$$

即
$$[3-3(z'_x+z'_y)]\cdot[1-2\cos(x+2y-3z)]=0$$

由于 $\cos(x+2y-3z)\neq 1/2$(否则与题设等式矛盾)，故 $3-3(z'_x+z'_y)=0\Longrightarrow z'_x+z'_y=1$.

例 8 设可微函数 $u=f(x,y)$ 满足方程 $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$，证明：$f(x,y)$ 在极坐标系中只是 θ 的函数.　　(赛、1998、京信息学院)

证 令 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$，由复合函数求导公式，知

$$\frac{\partial f}{\partial\rho}\cdot\rho=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\rho}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\rho}\right)\rho=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right)\rho=\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y=0\Longrightarrow\frac{\partial f}{\partial\rho}=0$$

可见 $f(x,y)$ 在极坐标系中不含 ρ，仅为 θ 的函数.

例 9 设函数 $f(x,y)$ 满足 $f(x,y)\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$，证明：$f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$.　　(赛、1991、京化工大)

证 将题设等式 $\dfrac{f_{xy}}{f_x}=\dfrac{f_y}{f}$ 两边对 y 积分，得 $\ln|f_x|=\ln|f|+\varphi_1(x)$，故

$$\ln\left|\frac{f_x}{f}\right|=\varphi_1(x)\Longrightarrow\frac{f_x}{f}=\pm e^{\varphi_1(x)}\triangleq\varphi_2(x)$$

再关于 x 积分，得
$$\ln|f|=\int\varphi_2(x)dx+\psi_1(y)\triangleq\varphi_3(x)+\psi_1(y)$$

故
$$f(x,y)=\pm e^{\varphi_3(x)}\cdot e^{\psi_1(y)}\triangleq\varphi(x)\cdot\psi(y)$$

三、习题解析

习题 8-1([1]P. 11

2. 已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan(x/y)$，试求 $f(tx,ty)$.

解 【只需将 tx,ty 分别代换 x 与 y.】

$$f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-(tx)(ty)\tan\frac{tx}{ty}=t^2\left(x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y}\right)=t^2f(x,y)$$

注 这时称 $f(x,y)$ 为二次齐次函数. 一般地，若 $f(tx,ty)=t^kf(x,y)$，则称 $f(x,y)$ 为 k 次齐次函数，当 $k=0$ 时，即有

$$f(tx,ty)=f(x,y)$$

则为零次齐次函数，又简称为齐次函数.

5. 求下列各函数的定义域：

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$； (5) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+x^2-r^2}}(R>r>0)$；

(6) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 【与一元函数求定义域类似，可由解不等式或不等式组确定多元函数的定义域.】

(1) 由 $y^2-2x+1>0\Longrightarrow y^2>2x-1$，定义域为 $D=\{(x,y)\,|\,y^2>2x-1\}$. 若要画出定义域，可先作其边界的图形. 此题区域的边界是开口向右的抛物线：$x=\dfrac{y^2+1}{2}$，它将平面区域分为左、右两部分，由

$$x<\frac{y^2+1}{2}\quad 或\quad y^2>2x-1$$

知，所求区域位于边界抛物线的左方(读者想象图形或自绘草图验证. 下同. 应注意：画图时，不等式带等号的，边界要画实线，否则画虚线).

(5) 由 $\begin{cases}R^2-x^2-y^2-z^2\geqslant 0\\ x^2+y^2+z^2-r^2>0\end{cases}\Longrightarrow r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$

定义域 $$V=\{(x,y,z)\,|\,r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$$

在空间它是以原点为球心的空心球，不包括内边界，但包括外边界.

(6) 由 $\begin{cases}x^2+y^2\neq 0,\\ \left|\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}(x,y)\neq(0,0)\\ z^2\leqslant x^2+y^2\end{cases}$ 知 $V=\{(x,y,z)\,|\,z^2\leqslant x^2+y^2,(x,y)\neq(0,0)\}$.

它是位于锥面 $z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 的外部且不含原点的空间区域.

6. 求下列各极限：

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{y}$； (6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

解 【求多元函数极限的常用方法有：利用四则运算法则与连续性，由变量代换化为一元函数求极限，利用初等变形，利用两边夹法则与无穷小性质，等等.】

(5) 化为能利用一元函数极限公式的形式.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{y}=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\left[\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot x\right]\xlongequal{t=xy}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{x\to 2}x=1\cdot 2=2$$

(6)变形化为能利用一元函数极限公式的形式.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2\dfrac{4}{x^2+y^2}}\cdot e^0\xlongequal{2t=x^2+y^2}\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0=0$$

7. 证明下列极限不存在：

(2)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

证 【对于重极限，自变量的变化过程，即点 $P\to P_0$ 的方式有无穷多种. 如果其中任意两种方式下求出的极限值不相等，则原极限不存在.】

设动点 $P(x,y)$沿 $y=kx$ 趋于点 $P_0(0,0)$，则

$$原式=\lim_{y=kx\to 0}\frac{k^2x^4}{k^2x^4+x^2(1-k)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^2}{k^2x^2+(1-k)^2}=0\quad(k\neq 1)$$

但当 $k=1$，即沿 $y=x$ 的路线让 $P\to P_0$ 时，又有原式$=\lim\limits_{y=x\to 0}\dfrac{x^4}{x^4+0}=1\neq 0$，所以原极限不存在.

习题 8-2([1]P. 18)

4. 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$.

解 $f_x(x,y)=1+(y-1)\dfrac{1}{\sqrt{1-x/y}}\cdot 2\sqrt{\dfrac{y}{x}}\cdot\dfrac{1}{y}$，$f_x(x,1)=1+0=1$.

5. 曲线$\begin{cases}z=\dfrac{x^2+y^2}{4}\\ y=4\end{cases}$在点(2,4,5)处的切线对于 x 轴的倾角是多少？

解 因为$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{4}+0=\dfrac{x}{2}$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,4,5)}=\dfrac{2}{2}=1$，故 $\mathrm{tg}\alpha=1$，$\alpha=\pi/4$ 即为所求.

6. 求下列函数的$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$：(3)$z=y^x$.

解(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$；$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\ln^2 y$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2}$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xy^{x-1}\ln y+y^x\cdot\frac{1}{y}=y^{x-1}(x\ln y+1).$$

7. 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求 $f_{xx}(0,0,1)$，$f_{xz}(1,0,2)$，$f_{yz}(0,-1,0)$及 $f_{zzx}(2,0,1)$.

解 $f_x=y^2+2xz$；$f_{xx}=2z$，$f_{xz}=2x$；$f_{xx}(0,0,1)=2$，$f_{xz}(1,0,2)=2$

$f_y=2xy+z^2$，$f_{yz}=2z$，$f_{yz}(0,-1,0)=0$. $f_{zzx}=f_{xzz}=(2x)'_z=0$

故

$$f_{zzx}(2,0,1)=0$$

8. 设 $z=x\ln(xy)$，求$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$及$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+\dfrac{x}{xy}\cdot y=\ln(xy)+1$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{y}{xy}=\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=0$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{x}{xy}=\dfrac{1}{y}$，$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=-\dfrac{1}{y^2}$

9. 验证：(1)$y=e^{-kn^2t}\sin nx$ 满足$\dfrac{\partial y}{\partial t}=k\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$；(2)$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$满足$\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}$.

证 (1)$\dfrac{\partial y}{\partial t}=-kn^2e^{-kn^2t}\sin nx$；$\dfrac{\partial y}{\partial x}=e^{-kn^2t}n\cos nx$，$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=n^2e^{-kn^2t}\sin nx$，故

$$\text{右式}=-kn^2e^{-kn^2t}\sin nx=\text{左式}.$$

(2)$\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{x}{r}$，$\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\dfrac{1}{r^2}\left(1\cdot r-x\dfrac{\partial r}{\partial x}\right)=\dfrac{1}{r^2}\left(r-\dfrac{x^2}{r}\right)=\dfrac{r^2-x^2}{r^3}$

由于 r 关于 x、y、z 的对称性，同理可得$\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\dfrac{r^2-y^2}{r^3}$，$\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{r^2-z^2}{r^3}$，故

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{1}{r^3}[3r^2-(x^2+y^2+z^2)]=\frac{2r^2}{r^3}=\frac{2}{r}$$

四、考研题解析

1.（研、1994、一） 二元函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处两个偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$存在是 $f(x,y)$在该点连续的（　　）.

(A)充分条件而非必要条件　　(B)必要条件而非充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既非充分条件又非必要条件

解 选(D). 多元函数存在偏导数与连续没有必然的联系，故选(D).

也可用反例说明.

(1)二元函数连续，偏导数可以不存在. 例如：

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

显见 $f(x,y)\in C(0,0)$，但它在原点的两个偏导数都不存在.

(2)二元函数的两个偏导数都存在（甚至相等），但可以不连续. 反例见下题.

2.（研、1997、一） 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$在点(0,0)处（　　）.

(A)连续，偏导数存在　　(B)连续，偏导数不存在

(C)不连续，偏导数存在　　(D)不连续，偏导数不存在

解 选(C). 令 $y=kx$，则$\lim\limits_{\substack{y=kx\\x\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$，$k$ 为任意实数，可见左式的极限不存在，更不连续；但 $f(x,y)$在原点的两个偏导数存在. 事实上，依定义有

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$

同理（或由对称性），$f_y(0,0)=0$，可见 f 在原点的两个偏导数都存在，故选(C).

3.（研、1996、三） 设函数 $z=f(u)$，方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)\mathrm{d}t$ 确定 u 是 x，y 的函数，其中 $f(u)$，$\varphi(u)$可微；$p(t)$，$\varphi'(u)$连续，且$\varphi'(u)\neq 1$. 求 $p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}$,为了代入计算,先求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$. 将题设方程两边分别对 x,y 求偏导数,得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(u)\frac{\partial u}{\partial x}+p(x)\Longrightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{p(x)}{1-\varphi(u)},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\varphi(u)\frac{\partial u}{\partial y}-p(x)\Longrightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{p(x)}{1-\varphi(u)}$$

所以
$$p(y)\frac{\partial z}{\partial x}+p(x)\frac{\partial z}{\partial y}=p(y)f'(u)\frac{p(x)}{1-\varphi(u)}-p(x)f'(u)\frac{p(y)}{1-\varphi(u)}=0$$

4.(研、2001、四) 设 $z=e^{-x}-f(x-2y)$,且当 $y=0$ 时,$z=x^2$,则$\frac{\partial z}{\partial x}=$______.

解 代入 $y=0$,得 $z=e^{-x}-f(x)\Longrightarrow f(x)=e^{-x}-x^2$,从而 $f(x-2y)=e^{-(x-2y)}-(x-2y)^2$

故
$$z=e^{-x}-e^{2y-x}+(x-2y)^2,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=e^{2y-x}-e^{-x}+2(x-2y)$$

第三节 全 微 分

一、主 要 公 式

定义 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$, $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$,$dz\overset{\Delta}{=}A\Delta x+B\Delta y$.

定理 1(必要条件) 若 $z=f(x,y)$在区域 $D\{(x,y)\}$可微,则 f 在(x,y)可偏导,且

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

定理 2(充分条件) 若 $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)\in C(x,y)\Longrightarrow f(x,y)\in D(x,y)$(可微).

*应用 $\Delta z\approx dz=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$$

绝对误差 $\delta_z=\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|\delta_x+\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\delta_y$; 相对误差 $\frac{\delta_z}{|z|}=\left|\frac{\partial z}{\partial x}\Big/z\right|\delta_x+\left|\frac{\partial z}{\partial y}\Big/z\right|\delta_y$.

二、例 题 增 补

例 1 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 研究 $f(x,y)$在点$(0,0)$处的连续性、偏导数和可微性.

解 因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\sqrt{|xy|}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=0\cdot 1=0=f(0,0)$,所以 $f(x,y)$在$(0,0)$处连续. 又$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$,所以 $f_x(0,0)=0$,同理 $f_y(0,0)=0$. 由于

$$\Delta f=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\sqrt{|\Delta x|\cdot|\Delta y|}\frac{\sin(\Delta x^2+\Delta y^2)}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{\Delta f-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}\quad (\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$