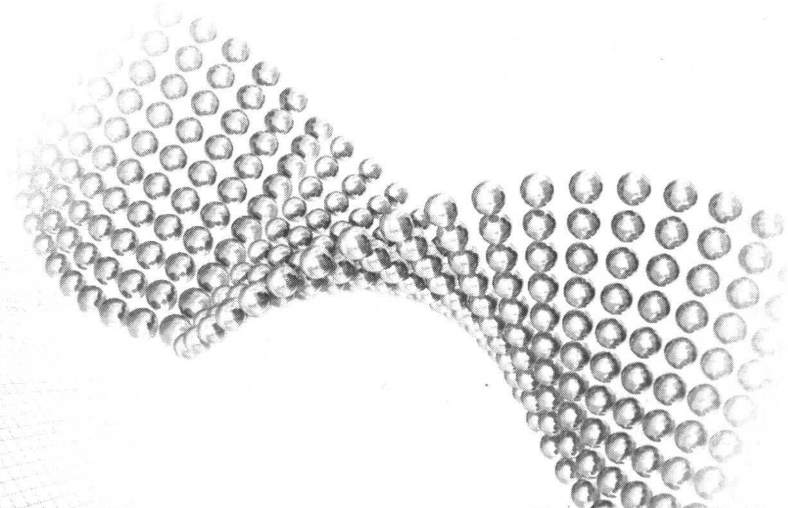
QIJIE
ZONGHENG
FANGZHEN
CHUTAN

奇阶纵横方阵初探

QIJIE ZONGHENG FANGZHEN CHUTAN

余家文 著

湖北科学技术出版社



奇阶纵横方阵初探

QIJIE ZONGHENG FANGZHEN CHUTAN

余家文 著

湖北科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据
奇阶纵横方阵初探/余家文著.—武汉:湖北科学技术出版社,2004.5
ISBN 7-5352-2429-6

Ⅰ.奇…　Ⅱ.余…　Ⅲ.数论—研究　Ⅳ.O156

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 041981 号

奇阶纵横方阵初探　　©余家文　著

责任编辑:李慎谦　　封面设计:喻　杨

出版发行:湖北科学技术出版社　　电话:87679468
地　　址:武汉市雄楚大街 268 号湖北出版文化城 B 座 12-14 层　　邮编:430070

印　　刷:孝感日报印刷厂　　邮编:432100

787 毫米×1092 毫米　16 开　11.25 印张　1 插页　249 千字
2004 年 5 月第 1 版　　2004 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 7-5352-2429-6/O・24　　定价:24.00 元

前　言

将 K^2 个互不相等的数(通常采用从 1 开始的连续自然数),排成 K 行、K 列的方形,称为“数方”。如果数方的各行、各列及两主对角线上的各数之和均相等,这种数方称为“纵横方阵”,简称“方阵”。数方或方阵的行数,即是它们的“阶”数,以 K 表之。数方与方阵,统称为“图”。图 0.1 即由 1 至 9 的 9 个连续自然数所排成的方阵,其各行、各列及两主对角线上的各数之和均为 15。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 0.1

行　$4+9+2=3+5+7=8+1+6=15$

列　$4+3+8=9+5+1=2+7+6=15$

主对角线　$4+5+6=2+5+8=15$

此方阵的 $K^2=9$,$K=3$,故为三阶方阵。

方阵发源于中国远古,据传图 0.1 即大禹时出现的“洛书”(又称“洛书数”)。在其后的几千年中,人们并未将洛书认为是数学,反而将此图附会上了很浓厚的神秘色彩,并称之为“九宫”。直到宋代,大数学家杨辉才把它当作一个数学问题来研究。公元 1275 年,杨辉所著的《续古摘奇算法》(简称《算法》)问世,其中介绍了三阶至十阶方阵以及其他多种非方形的图形,总称之为“纵横图”,此乃纵横图命名之始。继杨辉之后,历代都有人对纵横图进行研究,其较著者如明代的程大位、王文素,清代的方中通、张潮。国外也有人研究,他们将方阵叫做“幻方”或“魔阵”。

方阵研究的发展异常缓慢,新中国建立以前出现的方阵,为数不多。《算法》所介绍的三阶至十阶方阵中,三阶的一图,即洛书,四、五、六、七、八阶各二图,九、十阶各一图。以后历代研究者虽作出一些新图,但也寥若晨星,且均未超过十阶。《算法》中介绍的十阶方阵,名为“百子图”,其二主对角线上诸数之和与行、列上诸数之和并不相等。直至清代的张潮,才作出了行、列及二主对角线上各数之和均相等的十阶方阵,特称之为“更定百子图”。作图之难,由此可见一斑。方阵研究的发展缓慢,有其诸多的社会原因,但就方阵研究的本身而言,主要是当时没有找到适当的作图方法。每作一图,均须多方试探,百般求索,劳心费力,还不能期其必成。这样,纵使能作出一些图来,也不成体系,无法据以进行系统研究。新中国建立后,研究方阵者逐渐增加,发现了多种制作方阵的方法,使方阵的制作不再处于以前那种盲目摸索的状态,这无疑会对今后方阵的研究大有裨益。

方阵分奇阶和偶阶两大类,K 为奇数时即是奇阶,K 为偶数时即是偶阶,二者内在性质有别,作图方法自然也不相同。本书讨论范围,只限于奇阶方阵。因此,今后本书所提及的方阵,也都是奇阶方阵。

随着方阵研究的发展,要求我们不仅要考虑如何作出方阵,还要对作出的方阵进行系统地研究,从而了解它们相互间的关系,并进一步发现制作方阵的规律。因此,首要的问题是,如何

建立一个具有较强系统性的制作方阵的方法。这个方法,应满足如下一些要求:

(1)能适用于所有奇阶,而不是只能适用于其中的某些阶。

(2)除三阶外,在任一奇阶中都能作出尽可能多的、一系列的方阵,而不是只能作出一两个方阵。三阶由于本身条件的限制,只能作出互为镜像的两个方阵,与采用何种方法无关。

(3)在任一奇阶中,不但能作出方阵,还要能作出非方阵。这样,才有可能较全面、系统地了解什么情况下能作出方阵,为什么能作出;什么情况下作不出方阵,为什么作不出;如果改变相应的条件,是否能将作不出的方阵作出来。在这样的基础上,才能较容易找到作图的规律。

(4)使用起来比较简单方便。最好能只须按规定好的数字顺序,依次写入图内,不必为任一数字应在图中某一位置而大伤脑筋。这是历来的作图者都梦寐以求的。

要同时满足以上各项要求,是有相当困难,但不如此就不利于后续研究。

笔者经过长期、反复的研究,在前人已有方法的基础上,找出了一种能满足以上要求的制作奇阶方阵的方法,并在用该法所作的诸图中,作了一些粗浅的探索,希望能有所前进、有所收获。但这只是一孔之见,聊当引玉之砖而已。

本书各部分标题的层次如下:第一章、§1.1、一、1、(1)、①,不属以上层次者为1)。本书图号采用两级号:如图1.7,前数“1”,表示是第一章,后数“7”,表示该章的第七图。如果说明同一个问题需要几个图时,则采用三级号,如图7.15.1表示第七章第十五图的第一个分图。前言不属于各章,第一级以“0”表示,如图0.1,即前言的第一图。其他的表和公式的编号,均为二级号,前数表章,后数表该章的第几个表和公式。

笔者学识谫陋,数学并非专攻。限于条件,有关方阵的书籍、资料,接触不多。不当和谬误之处,敬希读者不吝赐教,谨此先致谢忱。

目　　录

第一章　新方法的建立

§1.1　数列与数方

一、数列

数列是制作数方和方阵的基础。通常采用始项 $a=1$,公差 $d=1$ 的等差数列中的各数来作数方。我们将这种 $a=1,d=1$ 的等差数列称为"原数列"。

我们先讨论一般等差数列的有关情况,然后令 $a=1,d=1$,即可得到原数列的有关情况。设数列的始项为 a,公差为 d,则组成 K 阶方阵的数列为:

$$a,a+d,a+2d,a+3d,\cdots,a+(K^2-2)d,a+(K^2-1)d$$

数列中各数之和,即方阵中各数之和,称为"方阵总和",简称"方和",以 F_h 表之,则

$$F_h=\frac{1}{2}\{a+[a+(K^2-1)d]\}K^2=aK^2+\frac{1}{2}(K^2-1)dK^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ 1.1$$

方阵的每行或每列中各数之和,称为"方阵常量",简称"方常",以 F_c 表之。由于方阵各行、各列必须相等,且 K 阶方阵必有 K 行、K 列,故

$$F_c=F_h/K=aK+\frac{1}{2}(K^2-1)dK \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ 1.2$$

若行的各数之和为 F_c 时,简述为"行为 F_c"或"行正"。列与对角线的简述与行同。当 K 为奇数时,K^2 必为奇数,等差数列中必有一"中数"(又称"中值"或"中项"),以 M 表之。M 的数值是以 M 为中心的对称二数的平均值,也是数列中各数的平均值,故

$$M=F_h/K^2=F_c/K=a+\frac{1}{2}(K^2-1)d \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ 1.3$$

由上可知,当数列确定后,F_h,F_c 和 M 都随之确定了,与方阵如何制作完全无关,可以事先计算出来,有利于方阵的制作和检验。

以上各式中,K 为等于或大于 3 的奇数,a 为实数,d 为不等于 0 的实数。若令 $a=1,d=1$,即可得原数列以及求原数列中的 F_h,F_c,M 各式。

数列中的各项,按排列顺序,依次称为第 1 项、第 2 项,直至第 K^2 项。一般情况下,上述的项次与该项的数值并不相等,但在原数列中,二者恰巧相同。必要时,为了不致引起混乱,应严格地予以区分。

二、数方和方阵的有关规定

1. 数方

(1)数方和原方　将数列中的各数,按规定的顺序,先由左向右,再由上向下排成 K 行、K

列的方形，即是数方。若数列为原数列，且规定数的顺序是由小到大，这样排成的数方，称为“原方”。图 1.1 即五阶原方。

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

图 1.1

(2)基方　用来排方阵的数方，称为“基方”。本书中，如无特别说明时，所用的基方都是原方。

(3)空方　数方未填入数字前，称为“空方”。

(4)行、列次序　数方的最上一行为第一行，向下依次为第二行、第三行，直至第 K 行。数方最左一列为第一列，向右依次为第二列、第三列，直至第 K 列。方阵行、列次序的规定与此同。

(5)对角线　连接数方或方阵二对角的斜线，叫主对角线，以 DI 表之。规定：从右上角向左下角斜的为 DI_1，从左上角向右下角斜的为 DI_2，如图 1.2。与 DI_1，DI_2 平行的诸斜线叫副对角线。每条副对角线，均由平行的两条斜线组成，分居于与其平行的主对角线两侧，而且这两条斜线上，必共有 K 个数。如图 1.2.1 中，标有 $DI_{1.1}$ 的两条斜线即组成一条副对角线。与 DI_1，DI_2 分别平行的副对角线各有 $K-1$ 条。规定在 DI_1 左上侧、离 DI_1 最近的一条叫 $DI_{1.1}$，再依次为 $DI_{1.2}$，直至 $DI_{1.K-1}$，如图 1.2.2；同样，DI_2 右上侧、离 DI_2 最近的一条叫 $DI_{2.1}$，再依次为 $DI_{2.2}$，直至 $DI_{2.K-1}$，如图 1.2.3。DI_1 及其诸副对角线称为“DI_1 族”，DI_2 及其诸副对角线称为“DI_2 族”。

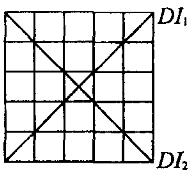


图 1.2

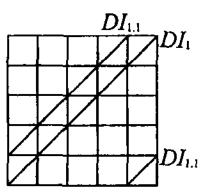


图 1.2.1

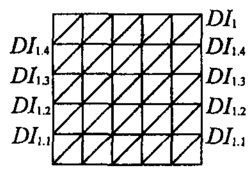


图 1.2.2

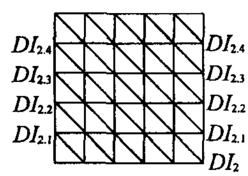


图 1.2.3

2. **方阵类型**

数方中各行、各列及二主对角线均为 F_c 时，称为“普通方阵”，以 P 表之，图 0.1 即三阶普通方阵；数方中各行、各列，一条主对角线及另一族对角线均为 F_c 时，称为“半全方阵”，以 B 表之；数方中各行、各列及所有各对角线均为 F_c 时，称为“全方阵”，以 Q 表之。方阵只此三种类型。

§1.2　有关的奇阶方阵制作法简介

已有的奇阶方阵的制作方法多种多样，这里只介绍与建立新方法有关的方法。

最简单的方阵是三阶方阵，这就是洛书。据《算法》介绍，洛书的制作方法是：“九子斜排，上下对易，左右相更，四维挺出，戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足。”其制作过程见图 1.3 至图 1.3.2。

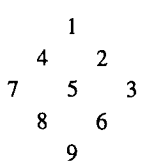


图 1.3

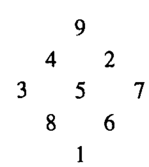


图 1.3.1

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 1.3.2

这是最古老的制作奇阶方阵的方法。此法在《算法》中没有名称，暂称之为"洛书法"。

洛书法不适用于更高奇阶。《算法》中所介绍的五、七、九阶各图，都不是用此法作成的。后人将此法予以改进，改进后的方法适用于所有奇阶，这使洛书法得到一个飞跃。现以五阶为例，介绍改进后的方法。五阶的 $F_c=65, M=13$。

将 1 至 25 等 25 个数斜排，以中项 M 为中心，画出五阶方阵的边界，如图 1.4。将方阵划分为 A,B,C,D 等四个区，如图 1.4.1。将方阵外的三角形 A' 平移至 A，则 A' 中的 1，6，2 等数恰巧落在 A 的三个空格中，如图 1.4.2。再将三角形 B', C', D' 平移至 B,C,D 区，就得到图 1.4.3。此图各行、各列及二主对角线上各数之和均为 65，等于 F_c，是普通方阵。

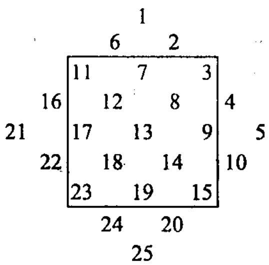


图 1.4

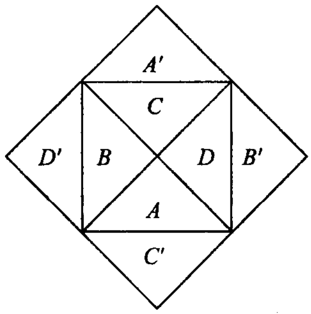


图 1.4.1

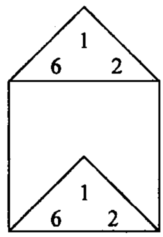


图 1.4.2

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

图 1.4.3

此法也没有名称，姑且将其叫做"斜排易位法"。

用此法可以制作任何阶的奇阶方阵，是制作奇阶方阵的通法之一。但它有两个主要缺点：其一是作方阵的过程太繁，使用起来颇为不便；其次，更主要的是每阶只能作 1 个方阵，不利于后续研究。下面分两步将此法予以改进：一是简化制作方阵的过程，不经过斜排易位，能将数字直接写入空方；二是进一步改进，使其能在一阶中作出一系列图来。改进此法的过程，就是建立新方法的过程。

§1.3 斜排易位法的简化

方阵中，每个数字都有自己的固定位置。要简化斜排易位法，如以五阶为例，就须将图 1.4.3中各数字的位置分类予以研究，从中找出规律，然后就可按规律将数字直接写入空方，不须经过斜排易位的过程，就可作成方阵。为了便于讨论，在图 1.4.3 外，加了一些带括号的数字和一个△，成为图 1.5。

						P	
11	24	7	20	3			
4	12	25	8	16	(4)	K=5	
17	5	13	21	9	(17)	F_c=65	
10	18	1	14	22	(10)	M=13	
23	6	19	2	15	(23)		
(11)	(24)	(7)	(20)	(3)	△		

图 1.5

从图 1.5 知，数列始项 1 的位置，在图中心的下一格。用斜排易位法作出的任何奇阶方阵，1 的位置总在方阵中心的下一格。因此，1 的位置是确定不变的。

1 和 2；4 和 5；7，8 和 9；11，12，13，14 和 15；17，18 和 19；21 和 22；24 和 25 这些数字，都是按自然顺序书写，而后一数总在前一数的右下方。我们将这种写法称为数字的"走向"。数字的右下斜走向，容易理解，因为在图 1.4 中，这些数字的走向就都是右下斜的。

另一些数字，如 2 和 3；3 和 4；6 和 7；9 和 10；16 和 17；19 和 20；22 和 23；23 和 24 等，在图 1.4 中，它们的走向也是右下斜的，但在图 1.5 中却并非如此。图 1.5 是怎样处理这些数字的呢？以 2 和 3 为例，当写了 2 后，如果再按走向写 3，就到了(3)的位置，已在方阵之外，当然应

将其纳入方阵内。纳入方阵中的什么位置呢？(3)是在第五列的延长线上，图 1.5 便将 3 写到了与(3)同列、离(3)最远的一格。其他 20,7,24 等数字，都是按这办法写的。我们将 3,20,7,24 等在方阵内的位置，叫做(3)，(20)，(7)，(24) 等的“相应位置”。再看 3 和 4，按走向 4 应写在(4)处，(4)在第二行的延长线上，图 1.5 将 4 写到与(4)同行、离(4)最远的一格内。其他 17,10,23 等，都是这样写的。我们将 4,17,10,23 等在方阵内的位置，也叫做(4)，(17)，(10)，(23)等的“相应位置”。这样，就得到了一条规律：数字按走向写，当要写出方阵时，就将该数字写到它的相应位置上。

再一类是 5 和 6,10 和 11,20 和 21，它们在图 1.4 中就不是按走向写的，而且在图 1.5 中，写了 5 以后，如果再按走向写 6,6 就要与 1 重叠，这当然是不允许的。其他 11,21 的情况都是如此。图 1.5 把这些要重叠的数字，都写在前一数字的“下面”两格。这里所说的“下面”是从上往下数，当要超出方阵时，就转到方阵的最上行再往下数。这就是说，方阵的最下行的“下面”就是方阵的最上行，最上行的“上面”就是最下行。如 11 的位置，从 10 往下数一格，已到了方阵的最下一行，再往“下”数，就是第一行。因此，11 应被视为在 10 的“下面”两格。这样，又得到另一条规律：当某数字按走向写要与另一数字重叠时，便将该数字写在前一数字的下面两格。

16 这个数字很奇特。按走向，它应写在△处，这里已在方阵外，似应找出相应位置。但此处不在行或列的延长线上，而是在主对角线的延长线上，按上面的办法，找不到相应位置。这个相应位置是有的，如何找法，以后再说。现在且来看图 1.5 是怎样处理这个问题的。它显然是假设△处已有了数字，因此按上述的第二条规律将 16 写在 15 的下面两格。

						P		
22	47	16	41	10	35	4		
5	23	48	17	42	11	29	(5)	
30	6	24	49	18	36	12	(30)	
13	31	7	25	43	19	37	(13)	K=7
38	14	32	1	26	44	20	(38)	F_c=175
21	39	8	33	2	27	45	(21)	M=25
46	15	40	9	34	3	28	(46)	
(22)	(47)	(16)	(41)	(10)	(35)	(4)	△	

图 1.6

综上所述，方阵的作法如下：先将 1 写在空方中心的下一格，然后按右下斜走向写数：当某数要写到空方之外时，就将该数改写到它的相应位置上；当某数要与另一数重叠时，将该数写到前一数的下面两格；当某数要写到主对角线的延长线上时，也将该数写到前一数的下面两格。如此一直写下去，直到将空方写满。这时 K^2 个数也必定恰好写完，方阵的制作便完成了。这样便不用先经过斜排易位，使制作方阵的过程大为简化了。

图 1.6 就是用简化后的方法作成的七阶普通方阵，它与用斜排易位法作出的七阶方阵完全相同。读者请自行验证。这说明简化后的方法适用于更高奇阶。

§1.4　新概念的建立

用简化后的方法，可以直接编写方阵，但此法每阶也只能作出一个方阵。一个方法要能在一阶中作出多个方阵，这个方法中必须要有可变化的因素。而斜排易位法及其简化法中，将所有的条件都固定死了，毫无变化的余地，当然作不出更多的方阵来，此其一。其次，斜排易位法及其简化法都只告诉我们应该怎样作，但并未告诉我们为什么必须这样作。知其然而不知其所以然，是找不出任何可变因素来的。因此要求我们作进一步的研究，弄清道理，给每个数字必须排在其所在位置的原因，作出统一的、合理的解释。

一、方阵不是平面而是封闭曲面

仍以图 1.5 为例,先讨论相应位置的问题。仍从 3 说起,由于(3)已超出了方阵,自应将其纳入方阵中去。问题是,为什么 3 一定要与(3)同列,而且一定离(3)最远;(3)的相应位置是否符合统一的走向?另外,为什么最下一行的"下面"就是最上一行,最上一行的"上面"就是最下一行?为了回答这些问题,根据(3)在列的延长线上,并且 3 正在(3)的"下面"一格这个情况,我们只能设想:将方阵面向外"卷"起来,使其上下两边相重合,方阵就变成了平放的圆柱体的侧表面。这样,(3)不但到了方阵内,而且恰巧就在 3 的位置。这就解释了为什么 3 必须与(3)同列,而且一定要在离(3)最远的的一格的问题。同时,还解释了方阵最下一行的"下面"是最上一行,最上一行的"上面"是最下一行,从而也解释了 10 的"下面"两格是 11 所在的位置。(20),(7),(24)等的情况与(3)同。同样,根据(4)在第二行的延长线上,且正在 4 的"左面"一格。如果将方阵"卷"起来,使其左右两边重合,方阵变成了直立的圆柱体的侧表面,则(4),(17),(10),(23)等恰好与 4,17,10,23 重合。这不但说明了后者即前者的相应位置,还说明了方阵最左一列的"左边"是方阵的最右一列,而最右一列的"右边"是方阵的最左一列。

再看走向。将方阵卷起来后,还可看到 3 正在 2 的右下角,4 正在 3 的右下角。就是说 2,3,4 的走向也是右下斜的。由于方阵看起来是个平面,这个"右下斜"被掩盖住了。其他 6 和 7,9 和 10,16 和 17,19 和 20,22 和 23,23 和 24 等,都和 2,3,4 一样,全是右下斜的。这就明确地告诉我们,用简化后的斜排易位法所作成的方阵,其走向只有一个,全为右下斜。

将方阵卷起来,不管是上下边重合还是左右边重合,都只能形成圆柱体的侧表面,还缺两个底面,因此,看起来并非封闭表面。但实际上,它是一个立体的封闭表面。至于是什么样的立体的封闭表面,以后再讨论。这里我们就认定它是立体的封闭表面。既然是封闭表面,就没有边界,无始无终,这才是奇阶方阵的本来面貌。我们所见到的奇阶方阵,是一个有边界的平面,这不过是将封闭表面剖开、展平了的表象。

将方阵不视为平面而视为立体的封闭表面,这是从上面的讨论中得到的重要的基本概念。用这概念,不但能解释发现的所有问题,在未来的研究中,离开了这个概念简直就寸步难行。这是即将建立的新方法的基石之一。

在讨论图 1.4.2 时,我们说将三角形 A'平移到 A,这是将方阵视为平面的说法。现在应该说,将图 1.4.2 卷起来,使其方阵区域的上下两边重合,A'就自然与 A 重合了。

二、在作 K 阶方阵之前,必须将数列从始项起均分为 K 段

现在再讨论 5 和 6,10 和 11,15 和 16,20 和 21 以及 25 和 1 等数之间的关系。图 1.1 是五阶原方,由等差数列 1 至 25 等 25 个数组成。在数方中,数列依次分为 5 行,每行 5 个数。如将每行视为一段,每段的第一个数称为首项或段首,最后一个数称为尾项或段尾。则在图 1.5 中,6,11,16,21 分别在 5,10,15,20 的下两格。而 5,10,15,20 均为段尾,6,11,16,21 均为段首。因此,后一段的段首均在相邻的前一段的段尾下面两格。这清楚地告诉我们,作方阵前,应将数列从始项 1 起,均分为 5 段,每段 5 个数。作方阵时,除始项 1 以外,一遇到段尾,下一段的段首就不能按走向写,而应将其写到前段段尾的下面两格。在作图 1.5 时,按走向,16 应写在 Δ 处。因为此处找不到相应位置,只好毫无道理地假设这里已有了数字,才将 16 写在 15 的下面的两格。现在明确了,因为 15 是段尾,所以段首 16 不应按走向写,只应写到 15 的下面两格。当时得不到合理解释的事,现在却顺理成章了。尤其有趣的是:1 是第一段的段首,25

是最后一段的段尾，从图 1.5 中可以看到 1 也在 25 下面两格，仍符合上面的规律。这并非偶然巧合，从图 1.6 中，也可看到第一段的段首 1 在最后一段的段尾 49 的下面两格。这告诉我们，数列的最后一段就是数列第一段的“前”一段。因此，不能将数列视为一条线段，而应视为首尾相接，无始无终的“环”。

将数列分段的情况，在七阶方阵（图 1.6）中也同样表现出来。只是七阶时，数列均分为 7 段，每段中有 7 个数而已。普遍言之，作 K 阶方阵时，要将数列均分为 K 段，每段中必须有 K 个数。实际上，将原数列排成原方时，这个均分工作就自动完成了。

为了避免混淆，我们将数列的第一项称为“始项”，最后一项称为“末项”。而数列中各段的第一项称为“首项”或“段首”，最后一项称为“尾项”或“段尾”。另外要注意的是，虽然数列是一个环，但分段不能从任意一数开始，必须从始项开始。道理以后再讨论。

作 K 阶方阵时，必须将数列均分为 K 段。这是另一个重要的基本概念。

§1.5 预 备 事 项

有了上述两个基本概念，建立制作奇阶方阵的通法就不困难了。但在通法建立之前，还要先讨论一些有关的问题。

一、引入直角坐标系

为了准确地描述方阵，引入直角坐标系。将坐标系的原点〖0,0〗放在方阵的几何中心，x 轴与原点所在的行重合，原点之右为正，左为负；y 轴与原点所在的列重合，原点之上为正，下为负。

坐标系确定后，方阵中每个数都有了固定的坐标值。如图 1.5 中，13 的坐标为〖0,0〗，1 的坐标为〖0，-1〗，22 的坐标为〖2，-1〗等等。

方阵的大小称为“幅宽”，以 F_K 表之。因坐标系的原点在方阵的几何中心，故五阶方阵的 F_K 为 $x=\pm2, y=\pm2$，简写为 $F_K=\pm2$。7 阶的 $F_K=\pm3$，K 阶的 $F_K=\pm(K-1)/2$。

方阵内所有各数的坐标，不论 x,y，其取值范围均为从 $-(K-1)/2$ 起，直至 $(K-1)/2$，即 $|x|,|y|\leqslant(K-1)/2$，因此，三阶的坐标取值为 $-1,0,1$，五阶的为 $-2,-1,0,1,2$，七阶的为 $-3,-2,-1,0,1,2,3$。余类推。如出了这范围，就出了方阵，必须求出其相应位置的坐标，将其纳入方阵之内。

以上这种坐标是不能变动的，称为“固定坐标”，在坐标值外加空心括号，如〖0,0〗。

二、DJ 和 SJ

为了描述段与段、数与数间的相对位置，我们将前一段段尾与相继段段首之间的相对位置，称为“段距”，以 DJ 表之。段距的含义是：将前段段尾所在位置的坐标定为 $(0,0)$，如相继段段首的坐标，对 $(0,0)$ 而言是 (x,y)，则两段之间的距离即为段距 $DJ(x,y)$。例如，相继段的段首在前段段尾的右二格、下一格，则以 $DJ(2,-1)$ 表之，如为左一格、上二格，则以 $DJ(-1,2)$ 表之。余类推。据此，图 1.5 与图 1.6 的段距均为 $DJ(0,-2)$。同一方阵内，所有的 DJ 均应相等。有了段距，只要前段段尾的位置确定了，相继段段首的位置也随之确定了。

同样，将段内相邻二数间的相对位置称为“数距”，以 SJ 表之。以前一数所在位置的坐标为 $(0,0)$，相继数的坐标为 (x,y)，则二数的数距为 $SJ(x,y)$。例如后一数在前一数的左一格、

上一格,即以 $SJ(-1,1)$ 表之。余类推。同一方阵内,SJ 应相同。有了 SJ 后,段内前一数的位置确定了,后一数的位置也随之确定了。根据数距的规定,图 1.5 的数距为 $SJ(1,-1)$。以前用所谓的走向来描述方阵中数的书写方向,SJ 不但可以描述数的走向,还能描述相邻二数间的距离,比走向的含义广泛而且准确。以后我们不再用走向这个词了。

显然,这里的坐标原点(0,0)是不固定的,方阵中任一格均可作为原点,从而方阵中各数的坐标也将随原点的变动而变动。我们将这种坐标称为"非固定坐标",将其加上圆括号,如(0,0)。

DJ 和 SJ 中的 x,y 的取值范围与上面的相同,如超出,也应将它变到范围中去。

三、将坐标值纳入取值范围

如何将取值范围外的坐标纳入取值范围呢?这要分两种情况来讨论:一是将方阵外的数纳入方阵内,这是讨论固定坐标;另一是将 DJ,SJ 中超出取值范围的坐标纳入取值范围内,这是讨论非固定坐标。

1. 固定坐标

图 1.7 表示五阶方阵,原点〖0,0〗在方阵的几何中心。从第一列到第五列,它们的 x 坐标依次为 $-2,-1,0,1,2$,从第一行到第五行,它们的 y 坐标依次为 $2,1,0,-1,-2$。今有方阵外的点 a'〖$-4,2$〗,b'〖$1,3$〗,c'〖$3,3$〗和 d'〖$4,-4$〗,求其在方阵内的相应位置 a,b,c,d。

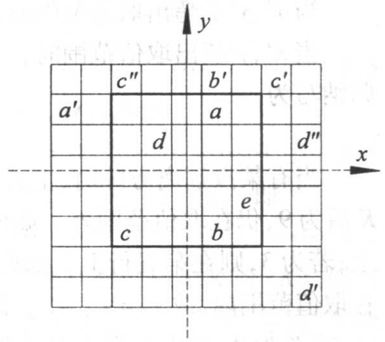


图 1.7

(1)基本方法

a'的 y 坐标为 2,已在取值范围内(即在方阵内),不须变动。将方阵卷起来,使其左右两边重合,则 a'落到了方阵内 a 的位置〖1,2〗,此即 a'的相应位置。

b'的 x 坐标为 1,已在方阵内。将方阵上下两边重合,则 b'落到 b 的位置〖$1,-2$〗,此即 b'的相应位置。

c'的 x,y 坐标均已超出方阵。先重合左右两边,c'落到 c''的位置〖$-2,3$〗。因 $y''=3$,还超出取值范围,仍在方阵外。再重合上下两边,c''落到 c 的位置〖$-2,-2$〗,此即 c'的相应位置。同样可得到 d'的相应位置〖$-1,1$〗。c',d'都在主对角线的延长线上,它们的相应位置也都在主对角线上。

对于 c'和 d',我们都是经过了两次卷方阵才得到结果,其实只用一次即可完成。将方阵卷起来,使右上角的顶点与左下角的顶点重合,则 c'即落在 c 处;将左上角与右下角的顶点重合,则 d'即落到 d 处。这告诉我们,方阵所形成的立体表面,既要两对对边重合,还要四个顶点重合。是什么样的立体表面,才能满足这些要求呢?我们设想,先将方阵上下两边重合(也可先左右两边重合),成为圆柱体的侧表面,再将圆柱体弯曲成环形,使其两端对接。这样,不但左右两边重合,四个顶点也重合在一起了。如图 1.8,其中 abc 曲线即上下两边重合线,dbe 曲线即左右两边重合线,b 点即四个顶点的重合点。因此,这个立体是一个像手镯样的环,方阵即该环的封闭表面。在这个封闭表面上,规律地分布着方阵中的全部数字。方阵中的每一行、每一列都成为一个环,数

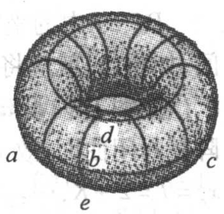


图 1.8

列成为一个螺旋形的环,数列中的各段也各自成环,但是否为螺旋形,要由 DJ、SJ 来决定。我们将图 1.8 这个环称为"奇阶方阵环"。在§1.4 的"一"中,我们曾认定方阵是某种立体的封闭表面,现在清楚了,这个立体就是一个像手镯样的环。这个表面是一个封闭曲面,没有一处是平面,以后就简称为"封闭曲面"。

以上是求相应位置的基本方法,但此法较繁,下面予以简化。

(2)简化方法

由上知:

当 $x'_a=-4$, $y'_a=2$, $x'_b=1$, $y'_b=3$, $x'_c=3$, $y'_c=3$, $x'_d=4$, $y'_d=-4$,

则 $x_a=1$, $y_a=2$, $x_b=1$, $y_b=-2$, $x_c=-2$, $y_c=-2$, $x_d=-1$, $y_d=1$

从这些数据中,可以发现如下关系:

$x_a=x'_a+5$, $y_a=y'_a$, $x_b=x'_b$, $y_b=y'_b-5$, $x_c=x'_c-5$, $y_c=y'_c-5$,

$x_d=x'_d-5$, $y_d=y'_d+5$

这里的"5",恰好相当于五阶方阵的阶数"K"。由此可得:

当 x',y' 不超出取值范围时,$x=x'$,$y=y'$

当 x',y' 超出取值范围时,$x=x'_{(+)}-K$, $x=x'_{(-)}+K$, $y=y'_{(+)}-K$, $y=y'_{(-)}+K$

归纳写为

$$x=x'^{(+)}_{(-)}\mp K, y=y'^{(+)}_{(-)}\mp K$$

当有某点远离方阵时,上式还应加以补充。例如 e'〖2,14〗(图 1.7 中未画出),$y'_e=14$,减 K 后为 9,仍在取值范围外。如何办?设想 y'_e 若为 1,则 e 应在第二行上;若为 2,则在第一行上;若为 3,则在第五行上。如此继续下去,当 y'_e 为 14 时,落到第四行上,故 $y_e=-1$。x'_e 已在取值范围内,故 $x_e=x'_e=2$。即 e' 的相应位置 e 的坐标为〖2,-1〗。再用上面的式子计算,y'_e 减 K 为 9,再减 K 为 4,还在取值范围外,再减 K,得 -1,在取值范围内,故 $y_e=-1$。这个结果与上面逐步推得的完全相同。因此,完整的结论是,x' 或 y' 的值连续加 K 或减 K,当加 K 或减 K 后的值进入取值范围后,就是 x 或 y 的值。因此,以上各式应写成:

$x=x'_{(-)}+nK$, $x=x'_{(+)}-nK$, $y=y'_{(-)}+nK$, $y=y'_{(+)}-nK$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$

归纳写为

$$x=x'^{(+)}_{(-)}\mp nK,\quad y=y'^{(+)}_{(-)}\mp nK \quad\cdots\cdots 1.4$$

这样,我们就可不作图,根据上式直接求得相应位置的坐标。

2. 非固定坐标

DJ、SJ 中的坐标为非固定坐标,其取值范围亦应在 $\pm(K-1)/2$ 之间,如超出,就应将其纳入范围中去。仍以五阶为例,且只讨论 x。

c	d	e	a	b

图 1.9

如图 1.9,设 a 处的 x 坐标为 $x_a=0$。如正向取值,则 $x_b=1$。因为方阵是封闭曲面,故 $x_c=2$,$x_d=3$,$x_e=4$,继续下去,$x_a=5=K$,$x_b=6=1+K$,$x_c=7=2+K$,…。如负向取值,则 $x_e=-1$,$x_d=-2$,$x_c=-3$,$x_b=-4$,继续下去,$x_a=-5=-K$,$x_e=-6=-1-K$,…。可见,同一个 x 就可以取无数多个值,而且每个值都正确地表述了该 x。如不加以限制,势必造成混乱,使研究无法进行。因此,我们规定:所有 x 的正值不能大于 $(K-1)/2$,负值不能小于 $-(K-1)/2$。这样,上面各 x 所能取的值只能是 $x_a=0$,$x_b=1$,$x_c=2$,$x_d=-2$,$x_e=-1$。这种值叫规定值。这就是为什么 DJ、SJ 的坐标取值亦应在 $\pm(K-1)/2$ 之间的原因。这里要注意的是,取值范围并非方

阵范围。将方阵视为封闭曲面时，根本谈不上什么范围，一谈方阵范围，就是将方阵视为有限平面。如此，图 1.9 中的 $x_c=2$，就已超出了方阵范围，但却在取值范围内。因为这是非固定坐标，如将 x_b 定为 0，则 $x_c=1$ 已超出方阵范围了。

将取值范围外的坐标纳入取值范围内，就是将坐标的非规定值变成规定值。如何变呢？由上面各 x 的式子即可得到答案。如 $x_b=6=1+K, x_c=7=2+K$，只要各自减 K，就得到规定值 1 和 2。又如 $x_b=-4, x_c=-3$，只要各自加 K，也可得到规定值 1 和 2。由此得出结论：当 x 为正值时，减 K，负值时，加 K，就可将非规定值变成规定值。全面讲，应加或减 nK。y 与 x 同，写成式子，取值范围内的 x,y 等于取值范围外的 $x_{\binom{+}{-}}, y_{\binom{+}{-}} \mp nK$.

这个式子和式 1.4 完全一样，以后就通用式 1.4。

3. K 的二重性

不论坐标 x,y 为何值，当乘以 K 时，其积为 0。如图 1.9，令 $x_a=0$，则 $x_b=1$。以整数乘 x_b，得 $2x_b=2=x_c, 3x_b=3=x_d, 4x_b=4=x_e$，而 $5x_b=Kx_b=5=x_a=0$。又 $x_c=2, 2x_c=4=x_e, 3x_c=6=x_b, 4x_c=8=x_d$，而 $5x_c=Kx_c=10=x_a=0$。其余的 x，均可仿上求得同样结果。因此，无论 x 为何值，当乘以 K 时，其积为 0。y 与 x 同。故

$$Kx=0, Ky=0 \quad \cdots\cdots 1.5$$

我们规定：以自然数 n 乘 DJ, SJ 时，$nDJ=nX_D, nY_D, nSJ=nX_S, nY_S$，所以

$$KDJ=KX_D, KY_D=0, KSJ=KX_S, KY_S=0 \quad \cdots\cdots 1.6$$

又，由图 1.9 知：$x_a \pm 5=x_a, x_a \pm 10=x_a, x_b \pm 5=x_b, x_b \pm 10=x_b, \cdots$。$y$ 与 x 同。即

$$x \pm nK=x, y \pm nK=y \quad \cdots\cdots 1.7$$

由上知，当 K（或 nK）与坐标 x,y 联系在一起时，可视为 0（反之 0 亦可视为 K 或 nK），但当 K 作为阶数时，当然不能视为 0。这就是 K 的二重性。这种 K 的加、减、乘的过程，称为“K 处理”。

§1.6 段 距 法

经过前面的讨论，对斜排易位法的改进主要有两点：一是将数列分段，另一是建立了描述段与段、数与数的相对位置的 DJ 和 SJ，并规定在同一方阵中，各 DJ 相等，各 SJ 也相等。因此，我们将改进后的这个方法，称为“分段等距法”，简称“段距法”。

段距法可简单概括为：“制作方阵时，段间按 DJ，段内按 SJ。”

一、用段距法在同一阶中作多图

我们要求，段距法在同一阶中应能作出多个图来，这只要变动 DJ, SJ 即可办到。在图 1.5 中，始项 1 的坐标为〖0，−1〗，段距为 $DJ(0,-2)$，数距为 $SJ(1,-1)$。现将始项 1 的坐标改为〖0,1〗，段距和数距改为 $DJ(0,-1)$，$SJ(1,1)$，作得图 1.10。作此图的过程简述如下（参阅图 1.10）：

	(12)	(19)		(3)	(10)	$DJ(0,-1)$
11	18	25	2	9		$SJ(1,1)$
17	24	1	8	15	(17)	$F_c=65$
23	5	7	14	16	(23)	$M=13$
4	6	13	20	22	(4)	
10	12	19	21	3		
(11)						

图 1.10

规定，在以下叙述中，以“D”表示按 DJ 写，以“S”表示按 SJ 写，以(3)→3 表示将(3)写在其相应位置 3 处。写的具体过程如下：将始项 1 写在〖0,1〗处，“S”：2，(3)→3，(4)→4，5；

“D”:6,“S”:7,8,9,(10)→10(参阅图 1.7);“D”:(11)→11,“S”:(12)→12,13,14,15;“D”:16,“S”:(17)→17,18,(19)→19,20;“D”:21,“S”:22,(23)→23,24,25。至此,方阵就作完了。

图 1.10 与图 1.5 显然不同,用斜排易位法作不出这种图。如果再改变 DJ,SJ,还可作出另外的图来。这说明用段距法在一阶中可以作出多个图,从而达到了建立段距法时在这方面的要求。

此图各行、各列均为 F_c,但二主对角线却非 F_c,看来好似只是数方而非方阵。但是通过 M 的两条副对角线均为 F_c。如果能将 M 移到方阵中心,使通过 M 的两条副对角线变成主对角线,而且不改变各行、各列的值(即各数之和),此图即可变成方阵。将 M 移到方阵中心的方法,就叫“移 M”,以后要专门讨论。这里,我们就认定图 1.10 是方阵。

用段距法作奇阶方阵的步骤:

1)确定阶数 K,从而确定数列的项数 K^2。

2)确定数列的始项 a、公差 d,我们目前所用的都是 $a=1,d=1$ 的原数列。

3)计算出 F_c,M。

4)排基方,因为目前用的都是原方,可以不排,只须确定各段的段首、段尾。

5)确定 DJ 和 SJ。

6)确定始项 a 在方阵中的位置。

7)按段距法作方阵。

8)检验。

二、段距法适用于所有奇阶举例

建立段距法时,我们还要求此法能适用于各奇阶。五、七两阶已作过了,下面再适当作一些其他奇阶,以说明段距法是能满足这要求的。如图 1.11 至图 1.11.4。其中图 1.11.1 与图 1.11.2 也需要移 M。请注意这些图的 K 既有质数、也有合数,这些图的 DJ,SJ 各不相同。由这些图可以知道,用段距法可以这样一直作下去,十七阶、十九阶,以及我们所需要作的任一奇阶。而且 DJ,SJ 可以变化,阶愈高,变化愈多。这就给我们提供了进一步研究的可能性。

三、当基方为原方时,用段距法作的方阵的特点

1)方阵内所有的数,在段内按 SJ 相连,段间按 DJ 相连,同一段的段尾和段首亦按 SJ 相连,因此,一段也可以视为一个环。数列的末项与始项亦按 DJ 相连,因此可以将数列也视为一个环。

2)同一段的数字在方阵中既不同行、也不同列,不同段的对应数字,如各段的首项或尾项,也是既不同行、也不同列,我们将这叫做“均匀分布”。如不均匀分布,该图即非方阵,而是数方。这种由段距法作成的数方和方阵总称为“段距图”。

3)M 应在方阵的几何中心,如不在,可以移 M。M 在中心时,以 M 为中心的对称二数之和为 $2M$。

4)数列的始项到 M 的距离等于 M 到末项的距离。如在图 1.10 中,1 到 13 的距离为(0,-2),13 到 25 的距离亦为(0,-2)。其他各图,莫不皆然。

由上可知,用段距法作成的方阵,是一个和谐的统一体,其中各数的位置,无论从整个数列或是从每段来看,都是有序分布、有序联系的。