



2009 知识树考研

全国硕士研究生入学统一考试

考研数学

数学二

10年真题点评

✿ 文登培训学校策划 ✿

陈文灯 / 主 编

陈启浩 / 副主编



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



2009 知识树考研

全国硕士研究生入学统一考试

考研数学

数学二

10年真题点评

陈文灯 / 主 编
陈启浩 / 副主编



北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

数学10年真题点评. 2 / 陈文灯主编. —2版. —北京:
北京理工大学出版社, 2008.3(2008.4重印)
(知识树考研)
ISBN 978-7-5640-0712-6

I. 数... II. 陈... III. 高等数学 - 研究生 - 入学
考试 - 自学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第024487号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街5号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京国马印刷厂

开 本 / 787毫米×1092毫米 1/16

印 张 / 12

字 数 / 280千字

版 次 / 2008年3月第2版 2008年4月第8次印刷

定 价 / 19.80元

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书出现印装质量问题,本社负责调换

前 言

一年一度的硕士研究生入学统一考试已经举行了十几届,积累了近百份数学试卷,这既是众多命题专家智慧和劳动的结晶,也是广大考研学子的宝贵财富。

历届的考研真题,除其内容外,还包含诸多有价值的信息,例如试题的形式、涵盖面、难度及试题所蕴涵的规律性。为了使考生在考研真题中汲取更多知识、掌握更多解题方法,我们将 1998 年~2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题作了精心的解析,编写成《考研数学·10 年真题点评》系列丛书,奉献给广大考研朋友,书中对每道真题通过“分析”、“详解”和“评注”三部分进行点评。在“分析”中用简明语言给出解题思路;在“详解”中用简捷、新颖方法给出详细解答;在“评注”中强调与真题有关的知识点及题解中使用的技巧。

我们希望读者在使用本书时,不要輕易地翻阅真题的解答,只有当百思不得其解时才查阅解答;而且每做完一道真题,应回过头来仔细阅读书中有关这道真题的分析、详解和评注,进行比对和总结。如果能如此下功夫做完最近十年的数学考研真题,读完全书,我们深信读者在考研数学的基本概念和基本理论的理解上,在计算方法和计算技巧的掌握上都将获得一个飞跃,而且在解题能力和应考水平上也将有一个较大幅度的提高,从而更加从容地面对研究生入学考试。

这套系列丛书自去年问世以来,深得广大考研学子的喜爱。今年在此基础上,作了认真的修订,增加了新的内容(如写了附录),使得它更适合广大考研朋友复习时使用。

由于成书时间仓促,书中疏漏之处在所难免,恳请广大读者和同仁指正。

编 者

2008 年 1 月

目 录

近 10 年真题集

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	1
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	4
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	7
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	10
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	13
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	16
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	19
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	22
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	25
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	28

近 10 年真题分析、详解及评注

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注	31
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注	44
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注	59
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注	71
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注	83
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注	95
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注	106
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注	117
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注	129
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注	140
附录 研究生入学考试中常见三个问题解析	151
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	167
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注	170

2007 年全国硕士研究生入学统一考试 数学二试题

一、选择题(本题共 10 小题,每小题 4 分,满分 40 分,在每小题给的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

- (A) $1 - e^{\sqrt{x}}$. (B) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$. (C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$. (D) $1 - \cos \sqrt{x}$.

【 】

(2) 函数 $f(x) = \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的第一类间断点是 $x =$

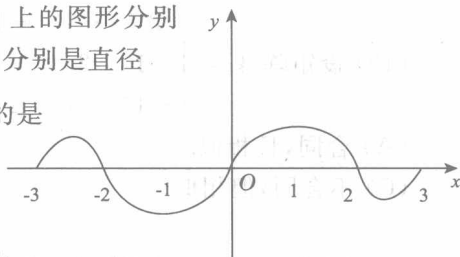
- (A) 0. (B) 1. (C) $-\frac{\pi}{2}$. (D) $\frac{\pi}{2}$.

【 】

(3) 如图,连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2]$, $[2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周,在区间 $[-2, 0]$, $[0, 2]$ 上的图形分别是直径为 2 的上、下半圆周,设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$,则下列结论正确的是

- (A) $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$. (B) $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$.

- (C) $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$. (D) $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$.



【 】

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,下列命题错误的是

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0) = 0$. (B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0) = 0$.

- (C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在. (D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在.

【 】

(5) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$,渐近线的条数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

【 】

(6) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有二阶导数,且 $f''(x) > 0$,令 $u_n = f(n) = 1, 2, \dots, n$. 则下列结论正确的是

- (A) 若 $u_1 > u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛. (B) 若 $u_1 > u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散.
(C) 若 $u_1 < u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛. (D) 若 $u_1 < u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散.

【 】

(7) 二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的一个充分条件是

(A) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0.$

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$

(C) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} [f'_x(x, 0) - f'_x(0, 0)] = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} [f'_y(0, y) - f'_y(0, 0)] = 0.$

(8) 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$ 等于

(A) $\int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx.$

(B) $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx.$

(C) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx.$

(D) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx.$

(9) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是

(A) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1.$

(B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1.$

(C) $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1.$

(D) $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1.$

(10) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B

(A) 合同, 且相似.

(B) 合同, 但不相似.

(C) 不合同, 但相似.

(D) 既不合同, 也不相似.

二、填空题(11—16 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上)

(11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(12) 曲线 $\begin{cases} x = \cos t + \cos^2 t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$ 上对应于 $t = \frac{\pi}{4}$ 的点处的法线斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(13) 设函数 $y = \frac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(14) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

(15) 设 $f(u, v)$ 为二元可微函数, $z = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(16) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题(17—24 小题,共 86 分,请将解答写在答题纸指定位置上,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(17)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上的单调、可导函数,且满足

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = \int_0^x t \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt,$$

其中 $f^{-1}(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数,求 $f(x)$.

(18)(本题满分 11 分)

设 D 是位于曲线 $y = \sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}$ ($a > 1, 0 \leq x < +\infty$) 下方 x 轴上方的无界区域.

(I) 求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$;

(II) 当 a 为何值时, $V(a)$ 最小?并求此最小值.

(19)(本题满分 10 分)

求微分方程 $y''(x + y'^2) = y'$ 满足初始条件 $y(1) = y'(1) = 1$ 的特解.

(20)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数,且 $f'(0) = 1$, 函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^{y-1} = 1$ 所确定. 设 $z = f(\ln y - \sin x)$, 求 $\frac{dz}{dx} \Big|_{x=0}, \frac{d^2z}{dx^2} \Big|_{x=0}$.

(21)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

(22)(本题满分 11 分)

设二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 \leq |x| + |y| \leq 2 \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 2\}$.

(23)(本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \quad (2)$$

有公共解,求 a 的值及所有公共解.

(24) 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2, \alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量. 记 $BA^5 - 4A^3 + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量,并求 B 的全部特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 B .

3

2006 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题

一、填空题: 本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中横线上.

(1) 曲线 $y = \frac{x + 4\sin x}{5x - 2\cos x}$ 的水平渐近线方程为 _____.

(2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin t^2 dt, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

(3) 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} =$ _____.

(4) 微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是 _____.

(5) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = 1 - xe^y$ 确定, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$ _____.

(6) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, E 为 2 阶单位矩阵, 矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$, 则 $|B| =$ _____.

二、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.

(7) 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$. Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x > 0$, 则

(A) $0 < dy < \Delta y$.

(B) $0 < \Delta y < dy$.

(C) $\Delta y < dy < 0$.

(D) $dy < \Delta y < 0$.

【 】

(8) 设 $f(x)$ 是奇函数, 除 $x = 0$ 外处处连续, $x = 0$ 是其第一类间断点, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 是

(A) 连续的奇函数.

(B) 连续的偶函数.

(C) 在 $x = 0$ 间断的奇函数.

(D) 在 $x = 0$ 间断的偶函数.

【 】

(9) 设函数 $g(x)$ 可微, $h(x) = e^{1+g(x)}$, $h'(1) = 1$, $g'(1) = 2$, 则 $g(1)$ 等于

(A) $\ln 3 - 1$.

(B) $-\ln 3 - 1$.

(C) $-\ln 2 - 1$.

(D) $\ln 2 - 1$.

【 】

(10) 函数 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x e^x$ 满足的一个微分方程是

(A) $y'' - y' - 2y = 3x e^x$.

(B) $y'' - y' - 2y = 3e^x$.

(C) $y'' + y' - 2y = 3x e^x$.

(D) $y'' + y' - 2y = 3e^x$.

【 】

(11) 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 等于

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$.

(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$.

4

$$(C) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$(D) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx. \quad \text{【 】}$$

(12) 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$, 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是

(A) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

(B) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

(C) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

(D) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$. 【 】

(13) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是

(A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.

(B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关.

(C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.

(D) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关. 【 】

(14) 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B , 再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得

$$C, \text{ 记 } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则}$$

$$(A) C = P^{-1}AP.$$

$$(B) C = PAP^{-1}.$$

$$(C) C = P^TAP.$$

$$(D) C = PAP^T. \quad \text{【 】}$$

三、解答题: 本题共 9 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

试确定常数 A, B, C 的值, 使得

$$e^x(1 + Bx + Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3),$$

其中 $o(x^3)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

(16) (本题满分 10 分)

$$\text{求 } \int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx.$$

(17) (本题满分 10 分)

设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 计算二重积分

$$I = \iint_D \frac{1 + xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy.$$

(18) (本题满分 12 分)

设数列 $|x_n|$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1, 2, \dots)$.

(I) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限;

(II) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}.$

(19)(本题满分 10 分)

证明:当 $0 < a < b < \pi$ 时,

$$b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a.$$

(20)(本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数,且 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

(I) 验证 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$;(II) 若 $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

(21)(本题满分 12 分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 4t - t^2, \end{cases} (t \geq 0),$ (I) 讨论 L 的凹凸性;(II) 过点 $(-1, 0)$ 引 L 的切线,求切点 (x_0, y_0) ,并写出切线的方程;(III) 求此切线与 L (对应于 $x \leq x_0$ 的部分) 及 x 轴所围成的平面图形的面积.

(22)(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = -1 \end{cases}$$

有 3 个线性无关的解.

(I) 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$;(II) 求 a, b 的值及方程组的通解.

(23)(本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T, \alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.(I) 求 A 的特征值与特征向量;(II) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

2005 年全国硕士研究生入学统一考试 数学二试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 设 $y = (1 + \sin x)^x$, 则 $dy \Big|_{x=\pi} =$ _____.

(2) 曲线 $y = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为 _____.

(3) $\int_0^1 \frac{x dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} =$ _____.

(4) 微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解为 _____.

(5) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x) = kx^2$ 与 $\beta(x) = \sqrt{1 + x} \arcsin x - \sqrt{\cos x}$ 的等价无穷小, 则 $k =$ _____.

(6) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, 记矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3).$$

如果 $|A| = 1$, 那么 $|B| =$ _____.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内

(A) 处处可导.

(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.

(D) 至少有三个不可导点. 【 】

(8) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ”表示“ M 的充分必要条件是 N ”, 则必有

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数. 【 】

(9) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y = y(x)$ 在 $x = 3$ 处的法线与 x 轴

交点的横坐标是

(A) $\frac{1}{8} \ln 2 + 3.$

(B) $-\frac{1}{8} \ln 2 + 3.$

(C) $-8 \ln 2 + 3.$

(D) $8 \ln 2 + 3.$ 【 】

(10) 设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数, a, b 为常数,

则 $\iint_D \frac{a \sqrt{f(x)} + b \sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma =$

(A) $ab\pi.$

(B) $\frac{ab}{2} \pi.$

(C) $(a+b)\pi.$

(D) $\frac{a+b}{2} \pi.$ 【 】

(11) 设函数 $u(x, y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t) dt$, 其中函数 φ 具有二阶导数, ψ 具有一阶导数, 则必有

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

【 】

(12) 设函数 $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1}$, 则

(A) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

【 】

(13) 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为 α_1, α_2 , 则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是

(A) $\lambda_1 \neq 0$.

(B) $\lambda_2 \neq 0$.

(C) $\lambda_1 = 0$.

(D) $\lambda_2 = 0$.

【 】

(14) 设 A 为 n ($n \geq 2$) 阶可逆矩阵, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 则

(A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^* .

(B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^* .

(C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$.

(D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$.

【 】

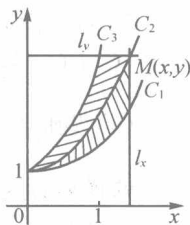
三、(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt}$.

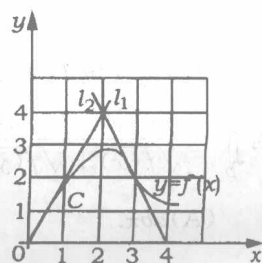
(16) (本题满分 11 分)

如图, C_1 和 C_2 分别是 $y = \frac{1}{2}(1+e^x)$ 和 $y = e^x$ 的图像, 过点 $(0, 1)$ 的曲线 C_3 是一单调增函数的图像. 过 C_2 上任一点 $M(x, y)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y , 记 C_1, C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$; C_2, C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$. 如果总有 $S_1(x) = S_2(y)$, 求曲线 C_3 的方程 $x = \varphi(y)$.



(17) (本题满分 11 分)

如图, 曲线 C 的方程为 $y = f(x)$, 点 $(3, 2)$ 是它的一个拐点, 直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0, 0)$ 与 $(3, 2)$ 处的切线, 其交点为 $(2, 4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数, 计算定积分 $\int_0^3 (x^2 + x)f'''(x)dx$.



(18)(本题满分 12 分)

用变量代换 $x = \cos t (0 < t < \pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$, 并求其满足 $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 2$ 的特解.

(19)(本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;

(II) 存在两个不同的点 $\eta, \xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\xi) = 1$.

(20)(本题满分 10 分)

已知函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = 2xdx - 2ydy$, 并且 $f(1, 1) = 2$. 求 $f(x, y)$ 在椭圆域

$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ 上的最大值和最小值.

(21)(本题满分 9 分)

计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

(22)(本题满分 9 分)

确定常数 a , 使向量组 $\alpha_1 = (1, 1, a)^T, \alpha_2 = (1, a, 1)^T, \alpha_3 = (a, 1, 1)^T$ 可由向量组 $\beta_1 = (1, 1, a)^T, \beta_2 = (-2, a, 4)^T, \beta_3 = (-2, a, a)^T$ 线性表示, 但向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(23)(本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵 A 的第一行是 (a, b, c) , a, b, c 不全为零, 矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$ (k 为常数), 且

$AB = 0$, 求线性方程组 $Ax = 0$ 的通解.

2004 年全国硕士研究生入学统一考试 数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x}{nx^2+1}$, 则 $f(x)$ 的间断点为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^3+3t+1, \\ y=t^3-3t+1 \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 取值范围
为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(3) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 确定, 则 $3\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 微分方程 $(y+x^3)dx-2xdy=0$ 满足 $y|_{x=1} = \frac{6}{5}$ 的特解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(6) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cot t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 排列起来, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列次序是

(A) α, β, γ . (B) α, γ, β . (C) β, α, γ . (D) β, γ, α . 【 】

(8) 设 $f(x) = |x(1-x)|$, 则

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 【 】

(9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \left(1+\frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$ 等于

(A) $\int_1^2 \ln^2 x dx$.

(B) $2 \int_1^2 \ln x dx$.

(C) $2 \int_1^2 \ln(1+x) dx$.

(D) $\int_1^2 \ln^2(1+x) dx$. 【 】

(10) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得

10

- (A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加.
 (B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少.
 (C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$.
 (D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$. 【 】

(11) 微分方程 $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$ 的特解形式可设为

- (A) $y^* = ax^2 + bx + c + x(Asinx + Bcosx)$.
 (B) $y^* = x(ax^2 + bx + c + Asinx + Bcosx)$.
 (C) $y^* = ax^2 + bx + c + Asinx$.
 (D) $y^* = ax^2 + bx + c + Acosx$. 【 】

(12) 设函数 $f(u)$ 连续, 区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2y\}$, 则 $\iint_D f(xy) dx dy$ 等于

- (A) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(xy) dy$. (B) $2 \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(xy) dx$.
 (C) $\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta \cos\theta) r dr$. (D) $\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta \cos\theta) r dr$. 【 】

(13) 设 A 是 3 阶方阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B , 再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C , 则满足 $AQ = C$ 的可逆矩阵 Q 为

- (A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 【 】

(14) 设 A, B 为满足 $AB = 0$ 的任意两个非零矩阵, 则必有

- (A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.
 (B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.
 (C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.
 (D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关. 【 】

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$.

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 在区间 $[0, 2]$ 上, $f(x) = x(x^2 - 4)$, 若对任意的 x 都满足 $f(x) = kf(x+2)$, 其中 k 为常数.

- (I) 写出 $f(x)$ 在 $[-2, 0)$ 上的表达式;
 (II) 问 k 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(17) (本题满分 11 分)

设 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$,