新课标·名师导学

高中数学解题宝典

&考点解密

李正兴 著

直击考点命脉

剖析解题策略

荟萃新题亮点

传授高分秘诀

上海科学普及出版社

聚焦考点网络·聚焦课程体系·聚焦三维目标·聚焦解题策略·聚焦数学思想

高中数学解题宝典

& 考点解密

李正兴 著

上海科学普及出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学解题宝典 & 考点解密/李正兴著. —上海:上海科学普及出版社,2008.1

ISBN 978-7-5427-3943-8

Ⅰ. 高… Ⅱ. 李… Ⅲ. 数学课—高中—解题 Ⅳ. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 172342 号

责任编辑 张建青

高中数学解题宝典 & 考点解密

李正兴 著

上海科学普及出版社出版发行

(上海中山北路 832 号 邮政编码 200070)

http://www.pspsh.com

各地新华书店经销 上海中华印刷有限公司印刷

开本 890×1240 1/32 印张 22 字数 885000

2008 年 1 月第 1 版 2008 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5427-3943-8/G·243 定价:35.00 元

序

随着教育改革的深入,全国中学数学教育已经进入了一纲多本的时代,高考也已全面实行省市自主命题.但是这个“纲”也就是新课程标准还是相当一致的,都希望“人人学有价值的数学,人人都能获得必需的数学”,都要求通过学习数学“获得必要的数学基础知识和基本技能,理解基本的数学概念、数学结论的本质,了解概念、结论等产生的背景、应用,体会其中所蕴藏的数学思想和方法.”这一数学改革的方向必然会在高考命题中反映出来,进入高三总复习,势必需要一本能使自己成绩巩固、提高的教辅书。本书就是遵循突出新课标理念、传授获取高分策略的原则下撰写的,以引领高中学生进行一次对高中数学包括知识、目标、方法、技巧、思想全面的巡视,可以适合不同省、市学生的需要.

一、本书的基本框架

本书按知识板块分为十五章,每章分为两部分:

第一部分:本章综述.(一)聚焦考点网络:高中数学的每一章是由众多的考点构成的,而考点与考点之间是紧密相联的,构筑考点网络也就“抓住了数学知识的主干部分”,从而不仅对本章的考点了如指掌,又可建构知识组块,总结和提炼重要的、基本的数学解题方法.(二)聚焦课程体系:阐述本章主要内容,在高中数学中的位置以及复习时在整体上如何把握,如何抓住重点、化解难点.(三)聚焦三维目标:按照课程标准,针对本章阐明学习目标、能力要求,把握好复习方向.

第二部分:专题精讲,分为若干讲,每讲又分为四个小部分.(一)聚焦知识要点:通过梳理知识、构建知识链,使数学概念在大脑中清晰起来.(二)基础问题导引:剖析覆盖知识点的基本题型,一般每题给出“聚焦解题策略”,为学生提供有特色的思考方法,重在使学生举一反三,由领会一道题到能解决一批题.给出解答后“聚焦数学思想”,从更高的层面加以归纳总结.(三)新题探究与能力突破:所举例题一是题型新,大多是近年高考题、新概念题、新情景题;二是综合性强,在知识的交汇点处命制,更能体现能力要求,每题给出“思考与探究”及“解答”,这是探索创新的沃土,是提高解题能力的原动力.每讲配备巩固练习:精选习题,题量小(16题)、类型全、难度适中.

二、本书的写作特色

本书的特色之一是对学生在复习过程中可能碰到的问题,从知识、思想、能力诸方面进行剖析,重在为学生指路.

本书的特色之二是每一讲的典型例题是通过小专题(题组)的形式出现的,这

里显然是教师的归纳,也为引导学生学会归纳提供了案例.

本书的特色之三是所举例题以及巩固练习题的编排讲究层次性,这是因为每个人在接纳知识的过程中,总是梯度发展从而逐级提高的.同时也为层次不同的学校或不同层面的学生提供了选择.

本书的特色之四是题型新,近三年高考中的重要题型,特别是2007年的高考题型也在本书中反映出来了,能较完整地体现当前高考命题的方向.

三、数学高复过程的宏观与微观

在数学高复过程中要宏观把握整体.高三数学复习归结到最后是怎样解一份高考试卷.但是我们还可以把这一阶段看作学习高等数学的准备,研究其他学科的前奏.因为数学已融合在学科的群山之中,即使是高中数学的十五个章节,章与章、节与节之间有密切联系,知识板块之间交汇、交叉、结合是高考命题的热点.把握整体你就掌握了复习好数学的主动权,你的复习效果将会更明显.

在数学高复过程中还要微观注重细节,即注重每一章、每一节、每一个知识点、每一道典型例题、每一种解题方法.我倡导"立足课本、适度深化、突破弱点、培养能力"的教育理念,推行"梳理知识、夯实基础、掌握方法、触类旁通"的递进式数学教学法。学生在接受知识的过程中总会碰到这样那样的问题,如何解决这些问题呢?首先应当把知识点梳理清楚,把知识链构建起来.在高考复习过程中,仅靠大量做题,而却缺乏对基础知识的把握,这是舍本求末的做法,解题能力很难提高.

所以只有宏观地把握整体又微观地注重细节才能做到举一反三、触类旁通,从而提升解题能力;只有明确了高三复习的目标,掌握了正确的复习方法,你才会感到充实,才会有豁然开朗、左右逢源的感觉.祝你成功!

本人从事高中数学教育工作33年,执教了18届高三毕业班,所带上海市区重点学校基础一般的学生高考均分多次达134分,多次超上海市重点学校均分10分.曾出版过数学高复专著多部,达几百万字.本书就是在教学实践中编写出来的一部新著.在此我要感谢我的妻子杨蕙芬,没有她的支持,这些成果是不可能取得的.

限于本人水平,疏漏之处在所难免,欢迎读者批评指正.

为便于与读者交流,附作者 E-mail:

li_zhengxing@yahoo.com.cn;

li_zhengxing@hotmail.com.

李正兴

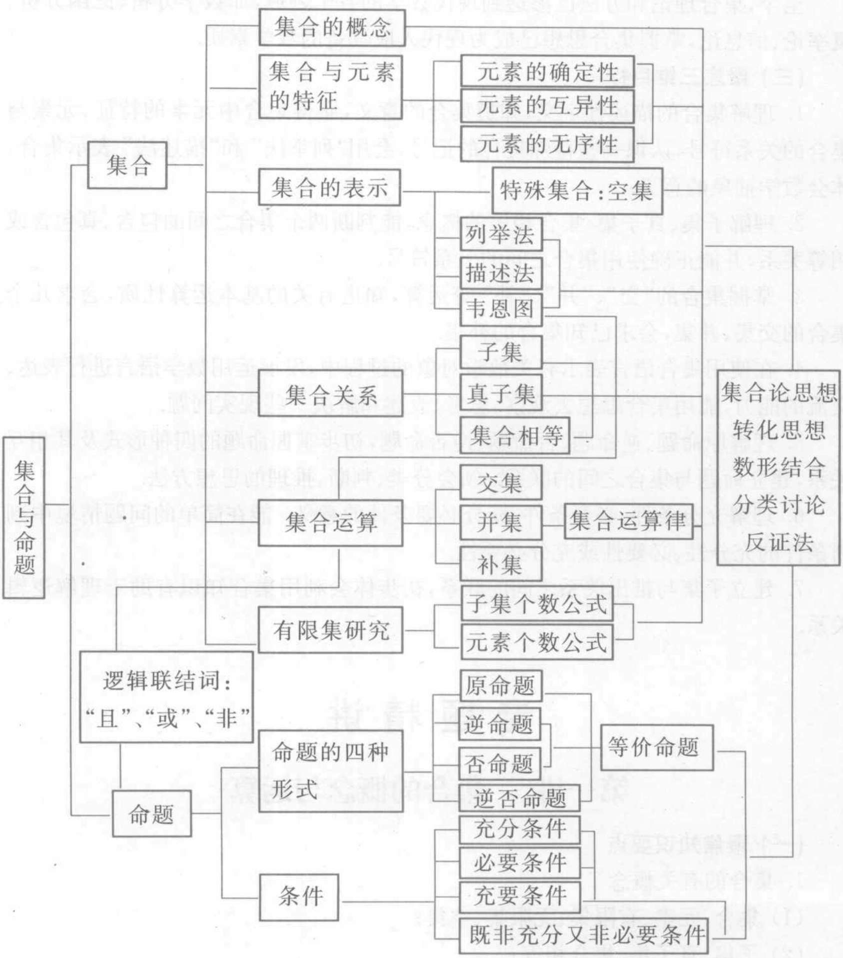
2007年10月

目录

第一章 集合与命题

本章综述

(一) 聚焦考点网络



（二）聚焦课程体系

高中数学课程以“集合和命题”为开端是非常必要的，集合论是现代数学的基础；集合作为一种语言，将贯穿在整个高中数学内容中，而集合与命题之间的联系，基本的逻辑关系在数学表达和论证中起到十分重要的作用.

本章复习集合的一些初步知识、命题与条件．集合的初步知识包括：集合的有关概念、集合的表示及集合与集合之间的关系、集合的运算和对有限集的进一步研究．命题与条件主要复习：命题的基本知识、四种命题形式及其相互关系、条件的判别等等.

至今，集合理论和方法已渗透到现代数学的各个领域，如数学分析、泛函分析、概率论、信息论，掌握集合思想已成为现代人应具备的数学素质.

（三）聚焦三维目标

1. 理解集合的描述性定义，知道集合的意义，懂得集合中元素的特征、元素与集合的关系符号，认识一些特殊集合的记号，会用“列举法”和“描述法”表示集合，体会数学抽象的意义.

2. 理解子集、真子集、集合相等的概念，能判断两个集合之间的包含、真包含或相等关系，并能正确使用集合之间的关系符号.

3. 掌握集合的“交”、“并”、“补”等运算，知道有关的基本运算性质，会求几个集合的交集、并集，会求已知集合的补集.

4. 在使用集合语言表示有关数学对象的过程中，发展运用数学语言进行表达、交流的能力，能用集合思想去观察、思考、表述和解决一些现实问题.

5. 理解原命题、逆命题、否命题、逆否命题，初步掌握命题的四种形式及其相互关系，建立命题与集合之间的联系．领会分类、判断、推理的思想方法.

6. 理解充分条件、必要条件、充分必要条件的意义．能在简单的问题情境中判断条件的充分性、必要性或充分必要性.

7. 建立子集与推出关系之间的联系，初步体会利用集合知识有助于理解逻辑关系.

专题精讲

第一讲　集合的概念与运算

（一）聚焦知识要点

1. 集合的有关概念

（1）集合、元素、有限集、无限集、空集；

（2）子集、真子集、集合相等；

（3）集合元素的特征：确定性、无异性、无序性.

2. 表示集合的方法：列举法、描述法.

3. 集合运算：交集、并集、补集(全集).

4. 有限集的子集个数公式：

对于有限集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，A 的子集个数为 2^n 个，真子集的个数为 2^n-1 个，非空真子集的个数为 2^n-2 个.

5. 两个有限集的并集的元素个数公式：

$\text{card}(A\cup B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A\cap B)$；

$\text{card}[\complement_U(A\cup B)]=\text{card}(U)-\text{card}(A)-\text{card}(B)+\text{card}(A\cap B)$.

(二) 基础问题导引

1. 集合及其表示方法

例 1 已知 $A=\{1,1+d,1+2d\}$，$B=\{1,r,r^2\}$. 其中 $d\neq 0$，$r\neq 1$，若 $A=B$，试求集合 A.

聚焦解题策略：两集合相等即为其中元素对应相等，而集合中的元素具有无序性，本题中元素的对应所以有两种形式，又集合中的元素具有互异性，因此对求出的 r、d 必须验证.

解：若 $\begin{cases}1+d=r, & ①\\ 1+2d=r^2, & ②\end{cases}$

① 代入 ② 得

$1+2d=(1+d)^2$，解得 $d=0$ 与条件 $d\neq 0$ 矛盾.

$\therefore \begin{cases}1+d=r^2, & ③\\ 1+2d=r. & ④\end{cases}$

④ 代入 ③ 得

$1+d=(1+2d)^2$，$\therefore d=0$(舍) 或 $d=-\dfrac{3}{4}$，

$\therefore r=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore A=B=\left\{1,\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{2}\right\}$.

聚焦数学思想：对于两个集合相等的问题，无限集应根据定义判断，而有限集，特别是当元素个数较少时应直接分析元素对应相同，再由集合元素的特征加以取舍.

集合中元素的三大特征及集合相等关系对元素起到限制作用. 可见，数学概念是数学的核心，学习数学做到“概念清”十分重要. 抓住了数学概念也就抓住了解题的根本.

例 2 已知集合 $A=\{x\mid (a^2-1)x^2+2(a+1)x+1=0,x、a\in\mathbf{R}\}$.

(1) 若 A 是空集，求 a 的取值范围；

(2) 若 A 是单元素集，求 a 的值；

(3) 若 A 中至多只有一个元素，求 a 的取值范围.

聚焦解题策略： 形如二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的问题应注意二次项系数 a 能否为0，只有当 $a\neq 0$ 时才能利用其判别式 Δ 来判定实根情况. 另外，还要特别重视理解空集的意义和它的记号，空集是一个特殊的集合，它不含任何元素，一个方程的解集是空集，也就是说这个方程无实数解.

解： 若 $a^2-1=0$，则 $a=1$ 或 $a=-1$.

当 $a=1$ 时，$A=\{x\mid 4x+1=0, x\in\mathbf{R}\}=\left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$；

当 $a=-1$ 时，$A=\{x\mid 0\cdot x+1=0, x\in\mathbf{R}\}=\varnothing$.

(1) 若 A 是空集，则 $a=-1$；

或 $\begin{cases}a^2-1\neq 0,\\ \Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=8a+8<0,\end{cases}$

$\therefore a<-1$.

$\therefore a\leqslant -1$.

(2) 若 A 是单元素集，则 $a=1$ 或 $\begin{cases}a^2-1\neq 0,\\ \Delta=0,\end{cases}$ $\therefore a=1$；

(3) A 至多只有一个元素，即 A 为空集或单元素集，

$\therefore a\leqslant -1$ 或 $a=1$.

聚焦数学思想： 数学概念是严密的，必须仔细把握，要特别重视理解空集的意义和它的记号 $\varnothing$，空集是一个特殊的集合，它不含有任何元素，分清 $\varnothing$ 与 $\{\varnothing\}$ 的关系，$\{\varnothing\}$ 是只含有一个元素 $\varnothing$ 的单元素集，虽然 $\varnothing$ 中没有元素，但作为集合 $\{\varnothing\}$ 是含有一个元素 $\varnothing$ 的，所以 $\varnothing\in\{\varnothing\}$，其次，按规定“空集是任何集合的子集”. 所以 $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$，$\{\varnothing\}$ 是非空集合，根据“空集是任何非空集合的真子集”，又可得 $\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$.

2. 集合之间的关系

例3 若 $A=\{x\mid x=a^2+2a+4, a\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=b^2-4b+3, b\in\mathbf{R}\}$，试确定集合 A、B 的关系.

聚焦解题策略： 先求函数 $x=a^2+2a+4$，$(a\in\mathbf{R})$ 的值域，再求函数 $y=b^2-4b+3$，$(b\in\mathbf{R})$ 的值域，然后讨论两集合之间的关系. 特别提醒：集合与它代表的元素所采用的字母名称无关！

解： $A=\{x\mid x=a^2+2a+4,\quad a\in\mathbf{R}\}$

$=\{x\mid x=(a+1)^2+3,\quad a\in\mathbf{R}\}$

$=\{x\mid x\geqslant 3,\quad x\in\mathbf{R}\}$.

$B=\{y \mid y=b^2-4b+3,\quad b\in\mathbf{R}\}$
$\quad=\{y \mid y=(b-2)^2-1,\ b\in\mathbf{R}\}$
$\quad=\{y \mid y\geqslant -1,\quad y\in\mathbf{R}\}$.
$\therefore A\subsetneqq B$.

聚焦数学思想： 研究问题要抓住问题的本质. 集合 A 的本质就是以 a 为自变量，定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数的值域. 集合 B 的本质就是以 b 为自变量，定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数的值域，抓住了本质，问题就迎刃而解了.

例 4 已知集合 $A=\{y \mid y=x^2+1, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x \mid y=\sqrt{4-x^2}, x\in\mathbf{R}\}$，$C=\{y \mid y=4-x^2, x\in\mathbf{R}\}$，$D=\{(x,y) \mid y=x^2+1; x\in\mathbf{R}\}$. 求：

(1) $A\cap B$；(2) $A\cup C$；(3) 若集合 M、N 满足 $M\subsetneqq D\subsetneqq N$，请用列举法写出一个集合 M，用描述法写出一个集合 N.

聚焦解题策略： 集合 A、C 是求相应函数值域所构成的数集. B 是求函数的定义域所构成的数集. 集合 A、B、C 中的元素都是实数，集合 D 表示的是点集，它的元素是直角坐标系中抛物线 $y=x^2+1$ 上的点，因而求 $A\cap B$，$A\cup C$ 时可借用数轴，集合 D 中元素是有序实数对 (x,y)，即直角坐标平面上点的坐标.

解： (1) $\because\ y=x^2+1\geqslant 1$，
$\therefore A=\{y \mid y\geqslant 1\}$.
$\because$ 函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域为 $[-2,2]$，
$\therefore B=\{x \mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$.
$\therefore A\cap B=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$.
(2) $C=\{y \mid y=4-x^2, x\in\mathbf{R}\}=\{y \mid y\leqslant 4\}$.
$\therefore A\cup C=\{y \mid y\geqslant 1\}\cup\{y \mid y\leqslant 4\}=\mathbf{R}$.
(3) $M=\{(0,1),(1,2),(2,5)\}$，
$N=\{(x,y) \mid (y-x)(y-x^2-1)=0, (x,y)\in\mathbf{R}\}$.
(开放性问题，答案不唯一)

聚焦数学思想： 集合的符号是一种语言文化，首先要搞清楚所给集合的含意，特别是所给集合是用描述法表示时，要搞清楚所给集合的元素是什么？是数？是点？或是其他什么？(注意：集合的对象是广泛的！) 进一步还要搞清楚这些元素具备什么性质，这是解决与集合有关问题的先决条件.

第(3)小题中要求用列举法写出一个符合集合间关系的集合 M 以及用描述法写出一个集合 N. 答案是完全开放的. 求集合 N 需要运用构造法思想.

例 5 (1) 设 $A=\{x \mid x^2-5x-6=0, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x \mid ax^2-x+6=0, x\in\mathbf{R}\}$ 且 $B\subseteq A$，求实数 a 的值；

(2) 集合 $A=\{x \mid x^2-(a+1)^2x+2a^3+2a\leqslant 0\}$，$B=\{x \mid x^2-3(a+1)x+6a+2\leqslant 0\}$，求使 $A\subseteq B$ 成立的实数 a 的取值范围.

聚焦解题策略：对于(1)，讨论两个方程解集之间的关系．由$B\subseteq A$，应对B可能的情况逐个加以讨论，排除不可能的取值．对于(2)，讨论两个不等式解集之间的关系，B中不等式$x^2-3(a+1)x+6a+2\leqslant 0$左端因式分解后得$(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant 0$，则必须对$3a+1$与$2$的大小关系进行分类讨论，再结合$A\subseteq B$这一关系式求出实数$a$的取值范围．

解：(1) 由已知，得$A=\{-1,6\}$．

$\because B\subseteq A$，$\therefore B=\varnothing$或$B=\{-1\}$或$B=\{6\}$或$B=\{-1,6\}$．

若$B=\varnothing$，则$a\neq 0$，且$\Delta=(-1)^2-4\cdot a\cdot 6<0$，解不等式，得$a>\dfrac{1}{24}$．

若$B=\{-1\}$，则$a(-1)^2-(-1)+6=0$，

解方程，得$a=-7(\neq 0)$．代入得$-7x^2-x+6=0$，

即$B=\left\{-1,\dfrac{6}{7}\right\}$，矛盾．

若$B=\{6\}$，则$a\cdot 6^2-6+6=0$，解方程，得$a=0$，

则$B=\{x\mid -x+6=0,x\in\mathbf{R}\}=\{6\}$，$\therefore a=0$．

若$B=\{-1,6\}$，则$a\cdot(-1)^2-(-1)+6=0$且$a\cdot 6^2-6+6=0$，

解方程，得$a=-7$，且$a=0$，矛盾．

$\therefore a>\dfrac{1}{24}$或$a=0$．

(2) $A=\{x\mid 2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$(当且仅当$a=1$时，$A=\{2\}$)．

当$3a+1>2$，即$a>\dfrac{1}{3}$时，$B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$．

$\because A\subseteq B$，$\therefore 2a\geqslant 2$，且$a^2+1\leqslant 3a+1$，

$\therefore a\geqslant 1$且$0\leqslant a\leqslant 3$，$\therefore a\in[1,3]$．

当$a=\dfrac{1}{3}$时，$A=\left\{x\mid \dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{10}{9}\right\}$，$B=\{2\}$，

$\therefore A\subseteq B$不可能．

当$3a+1<2$，即$a<\dfrac{1}{3}$时，$B=\{x\mid 3a+1\leqslant x\leqslant 2\}$．

$\because A\subseteq B$，$\therefore 3a+1\leqslant 2a$，且$a^2+1\leqslant 2$，

$\therefore a\leqslant -1$且$-1\leqslant a\leqslant 1$，$\therefore a=-1$．

所以所求实数a的取值范围是$a=-1$或$1\leqslant a\leqslant 3$．

聚焦数学思想：1．关于子集有如下重要命题：

(1) 任何一个集合是它本身的子集，即$A\subseteq A$．

(2) 空集是任何集合的子集，即$\varnothing\subseteq A$．

(3) 空集是任何非空集合的真子集，即$\varnothing\subsetneqq A$，其中A是非空集合．

(4) 对于集合A、B、C，若$A\subseteq B$、$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$．

(5) 对于集合 A、B、C，若 $A \subsetneqq B$，$B \subsetneqq C$，则 $A \subsetneqq C$.

2. 分类讨论是一种十分重要的数学思想方法，原则是：

合理分类，不重复、不遗漏.

例6 已知集合 $M=\left\{x \mid x=m+\frac{1}{6}, m \in \mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x \mid x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3}, n \in \mathbf{Z}\right\}$，$P=\left\{x \mid x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6}, p \in \mathbf{Z}\right\}$，则 M、N、P 满足关系(　　).

A. $M=N \subsetneqq P$　　B. $M \subsetneqq N=P$　　C. $M \subsetneqq N \subsetneqq P$　　D. $N \subsetneqq P \subsetneqq M$

聚焦解题策略： 把集合中的元素的表达结构统一化是解此类题的一般方法.

解： 对于集合 M：$x=\frac{6m+1}{6}$，$(m \in \mathbf{Z})$；

对于集合 N：$x=\frac{3n-2}{6}=\frac{3(n-1)+1}{6}$，$(n \in \mathbf{Z})$；

对于集合 P：$x=\frac{3p+1}{6}$，$(p \in \mathbf{Z})$.

由于 $3(n-1)+1$ 和 $3p+1$ 都表示被 3 除余 1 的数，而 $6m+1$ 表示被 6 除余 1 的数，所以

$M \subsetneqq N=P$，故选 B.

聚焦数学思想： 作为选择题，也可采用赋值法分别写出集合 M、N、P 的一组元素，再进行观察、比较、判断，但这个方法不能用于解非选择题，因为赋值法只停留在归纳阶段，未从理论上彻底解决问题.

例7 已知集合 $M=\{x \mid f(x)-x=0, x \in \mathbf{R}\}$ 与集合 $N=\{x \mid f[f(x)]-x=0, x \in \mathbf{R}\}$，其中 $f(x)$ 是一个二次项系数为 1 的二次函数.

(1) 判断 M 与 N 的关系；

(2) 若 M 是单元素集合，求证：$M=N$.

聚焦解题策略： 从子集的定义出发去进行推理、判断.

(1) **解：** 设 $x_0 \in M$，则 $f(x_0)=x_0$，于是

$f[f(x_0)]=f(x_0)=x_0$，这表明 $x_0 \in \mathbf{N}$. 所以 $M \subseteq N$.

(2) **证明：** 由题意，可设 $M=\{a\}(a \in \mathbf{R})$. 则关于 x 的一元二次方程 $f(x)-x=0$ 有两个相同的实根. 即有 $f(x)-x=(x-a)^2$，由此得表达式

$f(x)=(x-a^2)+x$，

再由方程 $f[f(x)]-x=0$，得

$x=\{[(x-a)^2+x]-a\}^2+[(x-a)^2+x]$.

整理，得$[(x-a)^2+(x-a)]^2+(x-a)^2=0$，

即$(x-a)^2[(x-a+1)^2+1]=0$，

因为 x、$a\in\mathbf{R}$，所以 $(x-a+1)^2+1\neq 0$，

于是 $x=a$，这表明方程 $f[f(x)]-x=0$ 也仅有一实根 a，即 $N=\{a\}$，所以 $M=N$.

聚焦数学思想： 关于两个集合相等的证明通常依据 $\begin{cases}A\subseteq B,\\ B\subseteq A\end{cases}\Leftrightarrow A=B$ 进行. 本题由于 M 是单元素集合，可以进行直接证明，即求出集合的元素从而获证. 可见，题型不同处理方法也可不同，只要“合理”不必讲究“通法”.

3. 集合的运算

例 8 （2001 年上海市春季高考题）已知全集为 $\mathbf{R}$，$A=\{x\mid \log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant -2\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{5}{x+2}\geqslant 1\right\}$. 求 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$.

聚焦解题策略： 本题考查集合的表示，集合的运算，对数不等式、分式不等式的解法等数学基础知识和基本解题技能. 解答时应通过求解不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant -2$ 及 $\dfrac{5}{x+2}\geqslant 1$ 得到集合 A,B. 在进行集合的运算时通常借助数轴，这样可以直观地获得结果.

解： 由 $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant -2$，

$\therefore \begin{cases}3-x\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2},\\ 3-x>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\geqslant -1,\\ x<3,\end{cases}$ $\therefore -1\leqslant x<3$.

$\therefore A=\{x\mid -1\leqslant x<3\}$.

$\therefore \complement_{\mathbf{R}}A=\{x\mid x\geqslant 3$ 或 $x<-1\}$.

由 $\dfrac{5}{x+2}\geqslant 1$，即 $\dfrac{x-3}{x+2}\leqslant 0$，解得 $-2<x\leqslant 3$.

$\therefore B=\{x\mid -2<x\leqslant 3\}$，如图 1-1 所示得

$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{x\mid -2<x<-1$ 或 $x=3\}$.

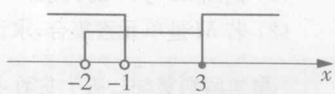


图 1-1

聚焦数学思想： 例 8、例 9 两题都是集合的运算，例 8 是数集运算. 在解不等式时必须注意思维的严谨性. 比如解对数不等式应“抓住单调性，不忘定义域”. 本题中 $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)<-2$ 与 $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant -2$ 的解集是仅当全集为 $\{x\mid x<3\}$ 时的互补集合. 例 9 中若把集合 A、B 看作是二元方程的解集，从而把 $A\cap B=\varnothing$ 转化为一个二元方程组无解的问题是解决此题的出发点. 若把 A、B 看作是坐标平面上的点集，把问题转化为解析几何中直线问题求解. 这是解决这一问题的另一视角，从中可以发现，对同一问题观察的视角不同，解题的出发点也就不同，解法自然也就不同.

例 9 已知集合 $A=\left\{(x,y)\mid \dfrac{y-3}{x-2}=a+1\right\}$，集合 $B=$

$\{(x,y)\mid(a^2-1)x+(a-1)y=30\}$. 若 $A\cap B=\varnothing$,求实数 a 的值.

解:由 $A\cap B=\varnothing$,即方程组 $\begin{cases}\dfrac{y-3}{x-2}=a+1,\\(a^2-1)x+(a-1)y=30,\end{cases}$ 无解.

即方程组 $\begin{cases}y-3=(a+1)(x-2)\quad\cdots①,\\(a^2-1)x+(a-1)y=30\cdots②,\\x\neq 2,\end{cases}$ 无解.

由 ① 得 $y=(a+1)(x-2)+3$ 代入 ② 并整理得

$2(a^2-1)x=2a^2-3a+31\cdots③$.

当 $a^2-1=0$,即 $a=\pm1$ 时,方程 ③ 无解;

当 $a^2-1\neq0$ 时,$x=\dfrac{2a^2-3a+31}{2(a^2-1)}$.

令 $\dfrac{2a^2-3a+31}{2(a^2-1)}=2$,解得 $a=-5,\dfrac{7}{2}$.

故所求 a 的值为 $\pm1,-5,\dfrac{7}{2}$.

评析引申:集合的运算是集合的重点和难点,也是高考的热点之一,必须加以重视. 在进行集合的"交"与"并"的运算时,必须正确理解 $A\cap B=\{x\mid x\in \mathbf{R}$ 且 $x\in B\}$、$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 中逻辑关系词"且"、"或",并掌握交集和并集的以下性质:

(1) $A\cap A=A,A\cap\varnothing=\varnothing,A\cup A=A,A\cup\varnothing=A$;

(2) $A\cap B\subseteq A,A\cap B\subseteq B$;

(3) $A\cap B=B\cap A,A\cup B=B\cup A$;

(4) $A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A,A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$;

(5) $A\subseteq(A\cup B),B\subseteq(A\cup B),(A\cap B)\subseteq(A\cup B)$;当 $A=B$ 时,$A\cap B=A\cup B$,反之也真;

(6) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C),(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

(7) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

在进行集合的"补"(逻辑关系词"非")的运算时,首先要理解补集的概念,补集是相对全集而言的,其中子集 A 的补集记号及其意义为:

$\complement_UA=\{x\mid x\in U$ 且 $x\notin A\}$. 逻辑关系词"且"不能省略,并掌握补集的以下性质:

(1) $(\complement_UA)\cup A=U,(\complement_UA)\cap A=\varnothing$;(2) $\complement_U(\complement_UA)=A$;

(3) $\complement_U(A\cap B)=(\complement_UA)\cup(\complement_UB)$;(4) $\complement_U(A\cup B)=(\complement_UA)\cap(\complement_UB)$.

其中(3)、(4)两条性质是著名的摩根定理(德·摩根,De. Morgan,1806—1871),在进行集合运算时用得较广泛.