高职高专规划教材

高等数学

下册

全国机械职教基础课教学指导委员会数学学科组 组编
张圣勤 王昆仑 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高 职 高 专 规 划 教 材

高等数学

下 册

全国机械职教基础课教学指导委员会数学学科组 组编

主 编 张圣勤 王昆仑
副主编 王振加 段 瑞

机 械 工 业 出 版 社

本书共分上、下两册。本册是下册，共分七章，分别介绍了向量与空间解析几何，多元函数微积分初步，线性代数，概率，数理统计基础，数学建模，Mathematica软件的应用（下）等内容。

本书可作为招收高中毕业生的三年制高职学校和招收中职毕业生的二、三年制的高职学校的学生及高等专科学生的高等数学、工程数学课程教材，也可供一般工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/张圣勤，王昆仑主编；全国机械职教基础课教学指导委员会数学学科组组编．—北京：机械工业出版社，2003.7

高职高专规划教材

ISBN 7-111-12274-7

Ⅰ．高…　Ⅱ．①张…②王…③全…　Ⅲ．高等数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第039978号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码　100037）
责任编辑：郑　丹　郑　玫　版式设计：冉晓华　责任校对：申春香
封面设计：陈　沛　责任印制：施　红

北京铭成印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2003年8月第1版·第1次印刷
1000mm×1400mm B5·8印张·309千字
定价：20.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话(010)68993821、88379646
封面无防伪标均为盗版

前　言

本书是根据教育部现行全日制普通高级中学数学教学大纲和三年制高等职业教育数学教学大纲、教学基本要求，由机械行业部分高等职业技术院校中长期从事高职数学教学的资深教师编写的。主要适用于招收高中毕业生的三年制高职工科学校和招收中等职业教育毕业生的二年制或三年制的高职工科学校的学生，也可作为高职成人教育教材和自学考试学生的课外教材，同时也供做一般工程技术人员参考。

作者本着为我国的制造业逐步构建一套适合于机械高职教育的公共课程体系的指导思想，以“符合大纲要求，加强实际应用，增加知识容量，优化结构体系”为原则，以新世纪社会主义市场经济形势下制造业对人才素质的要求为前提，以高职数学在高职教育中的功能定位和作用为基础，在内容上删去了一些繁琐的推理和证明，比传统数学教材增加了一些实际应用的内容，力求把数学内容讲得简单易懂，重点是让学生接受高等数学的思想方法和思维习惯；在习题的编排上加入了大量的例题和习题，并照顾到高职工科多专业的特点，力求做到习题难易搭配适当，知识与应用结合紧密，掌握理论与培养能力相得益彰；在结构的处理上注意与现行高中及中职教学内容相衔接，同时注意吸收国内外高职教材的优点，照顾到机械行业高职各专业的特点和需要，适当精简结构，使之更趋合理。为跟上当今计算机应用的发展步伐，本书特意增加了 Mathematica 软件的应用及数学建模的内容。书中带 * 号的内容为选学内容。

本书共分上、下两册。本册为下册，内容包括向量与空间解析几何，多元函数微积分初步，线性代数，概率，数理统计基础，数学建模，Mathematica 软件的应用（下）等。

本册由上海电机技术高等专科学校张圣勤副教授，福建工业职业技术学院王昆仑担任主编，辽宁机电职业技术学院王振加、陕西工业职业技术学院段瑞担任副主编，张圣勤负责最后统稿。参加本册编写的有：福建工业职业技术学院王昆仑（第十、十一章），陕西工业职业技术学院段瑞（第十二章），上海电机技术高等专科学校解永跃（第十三章），湖南工业职业技术学院邓新春（第十四章），上海电机技术高等专科学校王杰（第十五章），河南工业职业技术学院吕保献（第十六章）。

本书在编写过程中，得到了各参编院校领导的关心和支持，同时也得到了无锡机械职业技术学院原副院长谈兴华、原教务处长夏明汉两位副教授的支持和帮

助。编写中还参阅了有关的文献和资料，在此一并表示衷心的感谢。

由于时间仓促，加之水平有限，书中疏漏之处在所难免，恳请读者多提宝贵意见。

编　者

目　录

第十章　空间解析几何

本章将为学习多元微积分提供一些空间解析几何的基本知识．先建立空间直角坐标系，然后引进有广泛应用的向量概念，再以向量为工具，讨论空间的平面方程和直线方程，最后介绍一些常见的二次曲面的方程和图像．

第一节　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

空间解析几何学是用代数方法研究空间几何图形的科学．首先要解决的基本问题，就是空间位置．在平面解析几何中，应用平面直角坐标系，将平面上的点 M 与有序数对 (x,y) 建立一一对应关系，由此将平面曲线与二元方程建立一一对应关系．为了建立空间图形与方程的联系，需要建立空间的点与有序数组间的一一对应，这种对应关系是通过建立空间直角坐标系来实现的．

在空间任意取一定点 O，过 O 点作三条两两互相垂直的直线 Ox，Oy，Oz，并在各直线上确定出正方向，再取定单位长度．这样就确定了一个直角坐标系 $O-xyz$，如图 10-1．点 O 称为坐标系的原点，三条直线 Ox，Oy，Oz 叫做**坐标轴**，它们依次叫做 **x 轴（横轴），y 轴（纵轴）**与 **z 轴（竖轴）**．三个坐标轴的正向构成右手系，即用右手握着 z 轴，当右手四指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向．如图 10-1 所示．

在空间直角坐标系中，通过每两条坐标轴的平面叫做**坐标平面**．分别叫做 **xOy 平面，yOz 平面，zOx 平面**．三个坐标面把空间分为八个部分，每一部分叫做一个**卦限**，其顺序规定如图 10-2 所示．

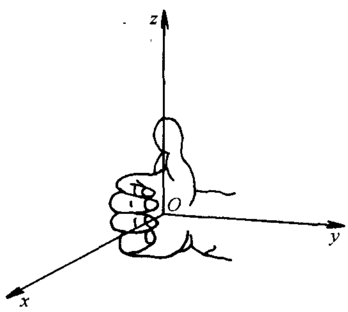

图　10-1

设 P 为空间坐标系中的任意一点，过 P 点分别作三个坐标轴的垂直平面，分别与 Ox，Oy 和 Oz 轴相交于点 A，B 和 C．它们各自在轴上的坐标依次为 x，y 和 z．于是空间一点 P 就唯一确定了一组有序数 x，y，z，如图 10-3．反之，对任意一组有序实数 x，y，z，可依次在 x 轴，y 轴和 z 轴上分别取坐标为 x，y 和 z 的点 A，B，C，过 A，B，C 分别作垂直于 x 轴，y 轴和 z 轴的平面，这三个平面相交于

唯一的一点 P，可见任何一组有序实数 x，y 和 z 唯一确定空间一点 P．所以通过空间直角坐标系，建立了空间的点 P 与一组有序实数 x，y 和 z 之间的一一对应关系．称 x，y 和 z 为点 P 的坐标，通常记为 $P(x, y, z)$．x，y 和 z 依次称为点 P 的**横坐标，纵坐标和竖坐标**．

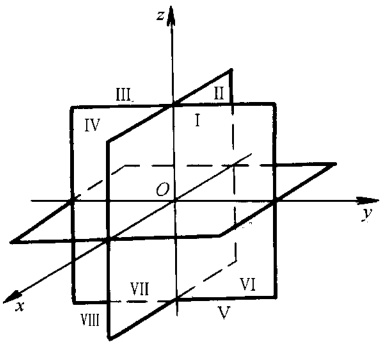

图　10-2

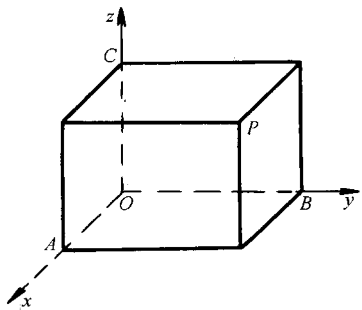

图　10-3

坐标轴上和坐标面上的点，其坐标各有一定的特征．显然，原点的坐标为(0，0，0)；在 x 轴、y 轴、z 轴上的点坐标分别是$(x, 0, 0)$，$(0, y, 0)$，$(0, 0, z)$；在坐标面 xOy，yOz，zOx 上的坐标分别是$(x, y, 0)$，$(0, y, z)$，$(x, 0, z)$．

二、空间两点间的距离公式和线段的中点坐标公式

和平面解析几何一样，可以用坐标来计算空间中两点之间的距离和线段的中点坐标．

1．两点间的距离

设 P_1 和 P_2 两点的坐标分别是(x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2)，求 P_1 和 P_2 之间的距离．

过 P_1 和 P_2 分别作平行于坐标平面的平面，如图 10-4 所示．它们构成一个长方体，P_1P_2 是长方体的一条对角线，因为 P_1BP_2 是直角三角形，所以

$$P_1P_2^2 = P_1B^2 + BP_2^2$$

又 P_1AB 也是直角三角形，所以

$$P_1B^2 = P_1A^2 + AB^2$$

则

$$P_1P_2 = \sqrt{P_1A^2 + AB^2 + BP_2^2}$$

其中

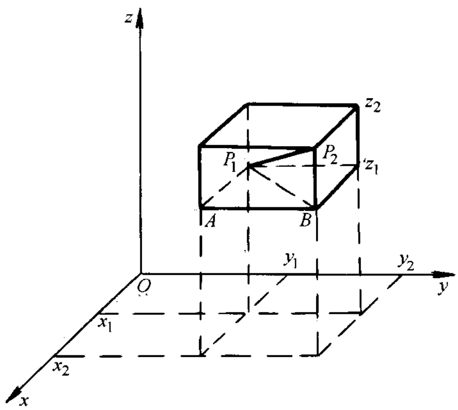

图　10-4

$$P_1A = x_2 - x_1,\ AB = y_2 - y_1,\ BP_2 = z_2 - z_1$$

则
$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{10-1}$$
这就是空间中**两点间的距离公式**．

特例，从原点 $O(0, 0, 0)$ 到任意一点 $M(x, y, z)$ 的距离 OM 为
$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{10-2}$$

例 1 求点 $P_1(1, 2, 2)$ 和点 $P_2(-1, 0, 1)$ 间的距离．

解 根据两点间的距离公式得
$$P_1P_2 = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-2)^2 + (1-2)^2} = 3$$

2．线段的中点坐标

设空间中两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$，点 $P(x, y, z)$ 为 P_1 和 P_2 中点，就有线段 P_1P_2 的**中点坐标计算公式**
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2} \tag{10-3}$$

例 2 M 为两点 $A(1, 2, 3)$ 和 $B(-1, 2, 3)$ 所连结成的线段的中点，求点 M 的坐标．

解 设 $M(x, y, z)$，$x_1 = 1$，$y_1 = 2$，$z_1 = 3$，$x_2 = -1$，$y_2 = 2$，$z_2 = 3$

因此
$$x = \frac{1-1}{2} = 0,\ y = \frac{2+2}{2} = 2,\ z = \frac{3+3}{2} = 3$$

所以点 M 的坐标为 $(0, 2, 3)$．

习题 10－1

1．在空间直角坐标系中描出下列各点：

$A(-1, 2, 3)$ $B(6, 2, -4)$ $C(-2, -6, 3)$

2．指出点 $P_1(1, -1, -1)$，$P_2(-2, 3, -4)$，$P_3(-1, -3, 4)$ 所在的卦限．

3．求定点 $M(4, -3, 5)$ 到原点与各坐标轴的距离．

4．设 $A(4, -7, 1)$，$B(6, 2, x)$ 且 $AB = 11$，求点 B 的未知坐标．

5．设线段 AC 的中点坐标 $B(1, -2, 4)$，其中 $C(3, 0, 5)$，求 A 的坐标．

第二节 空间向量

一、向量的概念及其表示法

在自然科学和工程技术中经常会遇到一类既有大小又有方向的量，例如力、加速度、位移、电场强度等，这种既有大小又有方向的量叫做**向量**(或**矢量**)；另一类只有大小的量，如长度、质量、温度、面积等，这种只有大小的量叫做**常量**(或**标量**)．

空间中的一条线段，以它的一个端点为起点，另一端点为终点，并规定以起点指向终点为线段的方向，这样规定了方向的线段叫做**有向线段**．在数学上常用有向线段表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向．如 M 为起点，N 为终点的有向线段表示的向量，记为$\overrightarrow{MN}$．如图 10-5 所示，或用小写粗体字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 等表示．

向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小叫做向量的**模**(或向量的长度)，记为 $|\boldsymbol{a}|$．模为1的向量叫做**单位向量**．模为零的向量叫做**零向量**，记为$\mathbf{0}$，零向量没有确定的方向．例如，几个力的和为零时，它们的合力就是零向量．

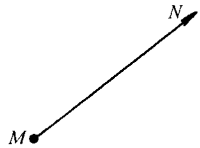

图 10-5

在许多实际问题中，有些向量与其起点有关，有些向量与起点无关，对于起点可以任意选取的向量，称为**自由向量**．在日常实际问题中，存在着大小相等方向相同的向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，则称这两个向量**相等**，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$．即向量在空间经过平移后所得的向量与原向量是相等的．和向量 $\boldsymbol{a}$ 长度相等方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的**反向量**，记为 $-\boldsymbol{a}$．也称 $-\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**．

二、向量的运算

1．向量的加法与减法

由力学知道，如果有两个力 F_1 和 F_2 作用在同一质点上，那么它们的合力 F 可按平行四边形法则求得．仿此，对向量加法定义如下：

定义　把两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起，以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形，那么从起点到平行四边形的对角顶点的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(如图 10-6)．

这种求向量和的方法称为**平行四边形法则**．由于向量可以平行移动，所以，如果把向量 $\boldsymbol{b}$ 平行移动，使其起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，那么从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量即为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，这种求和方法称为向量加法的**三角形法则**，如图 10-7．

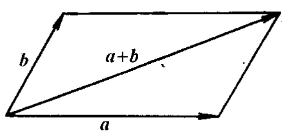

图 10-6

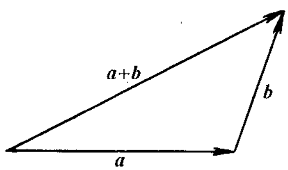

图 10-7

向量的减法可定义为：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$（如图 10-8 所示）．

2．向量与数的乘法

定义　向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，规定向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$．在 $\boldsymbol{a}$ 不为零向量时，当 $\lambda>0$ 时，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向，当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$

与 $\boldsymbol{a}$ 反方向；当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，方向不确定．称向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与数 λ 的乘积．

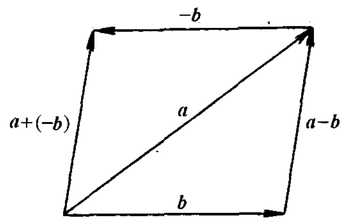

图 10-8

向量的加法与数乘满足如下规律：

(1) 交换律 $\quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(2) 结合律 $\quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

$\qquad\qquad \lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$

(3) 分配律 $\quad (\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

$\qquad\qquad \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

从数与向量乘法的定义可以得到：两非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\lambda\neq 0)$.

把与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，称为 **$\boldsymbol{a}$ 的单位向量**，记为 $\boldsymbol{a}^0$. 显然有

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \text{ 或 } \boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0 \tag{10-4}$$

三、向量的坐标表示式

设空间直角坐标 $O-xyz$ 中有一个向量 $\boldsymbol{a}$，由于向量可以平行移动，把向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点移到坐标原点 O，假设 M 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点，其坐标为 (a_x, a_y, a_z)，则 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$，如图 10-9 所示．显然向量 $\boldsymbol{a}$ 与数组 (a_x, a_y, a_z) 之间具有一一对应的关系．称 (a_x, a_y, a_z) 为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标**(有时也称 a_x, a_y, a_z 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的分量)，记为

$$\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\} \tag{10-5}$$

这就是向量的坐标表示式．a_x，a_y，a_z 也称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的**投影**．为了便于计算，在 x，y，z 轴分别取单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，称它们为这一坐标系的**基本单位向量**，如图 10-9 所示．

由向量加法的三角形法则(图 10-9)有

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{Ox}+\overrightarrow{xP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{Ox}+\overrightarrow{Oy}+\overrightarrow{Oz}$$

即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{10-6}$$

上式就是 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的**分解式**．

例 1 设向量 $\boldsymbol{a}=\{8,-2,6\}$，$\boldsymbol{b}=\{10,4,-4\}$，求 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{a}$.

解 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(8\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k})-(10\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})$

$\qquad=(8-10)\boldsymbol{i}+(-2-4)\boldsymbol{j}+[(6-(-4)]\boldsymbol{k}=-2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}$

$3\boldsymbol{a}=3(8\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k})=24\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+18\boldsymbol{k}$

在空间直角坐标系中有以 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 为起点，$M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$(图 10-10)，则有向量的减法，得

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})$$

即

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\\&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{10-7}$$

其中，$a_x = x_2 - x_1$，$a_y = y_2 - y_1$，$a_z = z_2 - z_1$

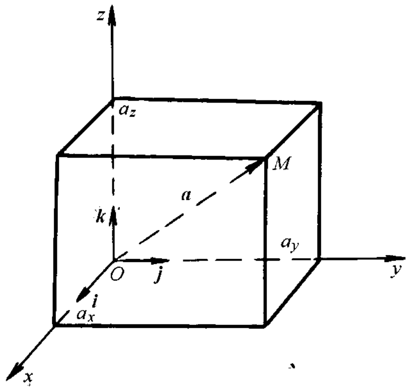

图 10-9

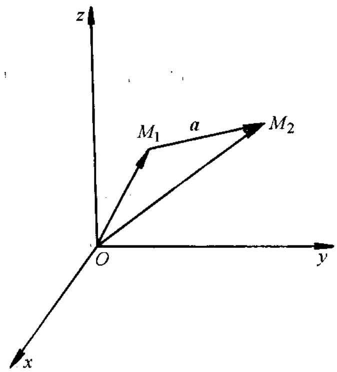

图 10-10

例 2 设 $M_1(5, 1, -2)$，$M_2(-4, 0, 3)$ 为已知两点，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$.

解 由式 10-7 得

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (-4-5)\boldsymbol{i} + (0-1)\boldsymbol{j} + (3+2)\boldsymbol{k} = -9\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$$

四、向量的模和方向余弦

向量有二个特征：大小和方向，而向量的大小又叫做**向量的模**，向量的模可以用向量的坐标表示．由式 10-7 得向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模为：

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2} \qquad (10\text{-}8)$$

式 10-8 也是空间两点之间的**距离公式**．

为了表示向量的方向，设向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角分别为 α，β，γ，如图 10-11 所示，称 α，β 和 γ 为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的**方向角**，规定 $0 \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant \pi$．一个向量的三个方向角确定了，则其方向也就确定了．方向角的余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的**方向余弦**．它们同样可确定向量的方向．

由图 10-11 得

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x_2 - x_1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|} \\ \cos\beta = \dfrac{y_2 - y_1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|} \\ \cos\beta = \dfrac{z_2 - z_1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|} \end{cases} \qquad (10\text{-}9)$$

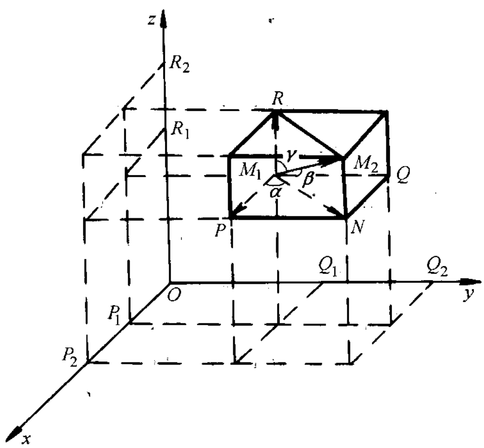

图 10-11

且 $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{10-10}$$

例 3 已知：三力 $F_1 = -i + 2k$，$F_2 = i + 3j - 2k$，$F_3 = 3i + j$ 作用于同一点，求合力的大小及方向余弦．

解 合力 $F = F_1 + F_2 + F_3 = (-i + 2k) + (i + 3j - 2k) + (3i + j)$

$$= 3i + 4j$$

所以合力大小 $$|F| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5$$

其方向余弦为 $$\cos\alpha = \frac{3}{5},\ \cos\beta = \frac{4}{5},\ \cos\gamma = 0$$

例 4 设向量 a 的方向余弦 $\cos\alpha = \frac{1}{3}$，$\cos\beta = \frac{2}{3}$，且 $|a| = 3$，求 a

解 由式 10-10 得 $\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = 1 - \frac{1}{9} - \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$

所以 $$\cos\gamma = \pm\frac{2}{3}$$

设向量 a 的坐标为 $\{a_x, a_y, a_z\}$，由式 10-9，得

$$a_x = |a|\cos\alpha = 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

$$a_y = |a|\cos\beta = 3 \times \frac{2}{3} = 2$$

$$a_z = |a|\cos\gamma = 3 \times \left(\pm\frac{2}{3}\right)$$

所以 $a = \{1, 2, 2\}$ 或 $a = \{1, 2, -2\}$

例 5 一船欲从河的南岸驶向北岸，已知水速从东向西 6m/min，问船应以多大的速率并与河岸成多大的角度航行，才能使船的实际航行方向垂直于河岸，且前进速度 8m/min?

解 取船的出发点为坐标原点，x 轴与河的南岸叠合(图 10-12)，设水速为 v_0，船速为 v_1，船的实际航行速度为 v，则按题意得：$v = 8j$，$v_0 = -6i$，$v = v_0 + v_1$，所以 $v_1 = v - v_0 = 8j + 6i = \{6, 8, 0\}$，$|v_1| = \sqrt{6^2 + 8^2 + 0^2} = 10(\text{m/min})$，$\cos\alpha = 0.6$，$\alpha = \arccos 0.6 \approx 53°7'48''$

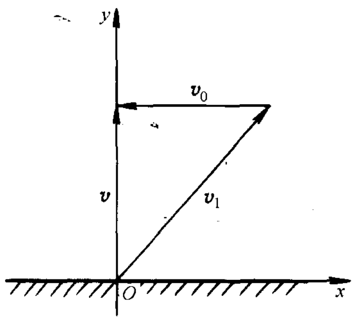

图 10-12

习题 10－2

1. 已知：$P_1(1, -2, 3)$ 和 $P_2(4, -2, 1)$ 两点，求 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的模和方向余弦．
2. 向量 a 与三个坐标轴的夹角相等，求它的方向余弦和方向角．
3. 求平行于向量 $a = 6i + 7j - 6k$ 的单位向量．

4. 已知：$a = mi + 5j - k$ 与 $b = 3i + j + nk$ 平行，求 m，n.

5. 已知：向量 a 的起点为 $(2, 0, -1)$，$|a| = 3$，a 的方向余弦 $\cos\alpha = \frac{1}{2}$，$\cos\beta = \frac{1}{2}$ 试求 a 的坐标表示式及终点坐标 .

6. 已知向量 $a = \{3, -1, 2\}$，它的起点坐标为 $(2, 0, -5)$，求它的终点坐标 .

7. 从点 $M(2, -1, 7)$ 沿向量 $a = 8i + 9j - 12k$ 的方向取线段长 $|MN| = 34$，求点 N 的坐标 .

第三节　向量的数量积与向量积

一、两向量的数量积

1. 向量数量积的概念

设物体受重力 G 作用沿斜面下滑(图 10-13)，重力的方向是垂直向下的，而物体位移 s 的方向与斜面平行，重力方向与位移方向之间的夹角为 θ，由力学知道，力 G 所做的功为

$$W = |G||s|\cos\theta$$

这里功 W 是一个数量，这个数量称为力 G 和位移 s 的数量积，在电学和其它科学中也会经常遇到类似的结果，由此有如下两个向量的数量积概念：

定义　设 a，b 为任意两向量(图 10-14)，它们的夹角为 θ，称 $|a||b|\cos\theta$ 为向量 a 与 b 的**数量积** . 它是一个数量，用 $a \cdot b$ 表示，即

$$a \cdot b = |a||b|\cos\theta \tag{10-11}$$

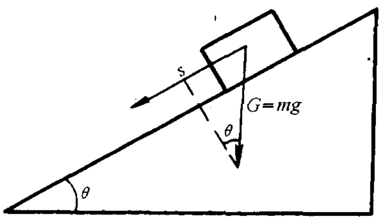

图　10-13

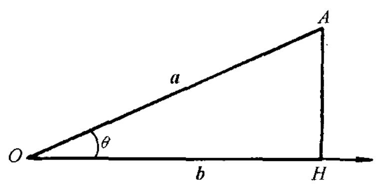

图　10-14

由此定义，在上面常力做功问题中，$W = G \cdot s$

向量的数量积满足以下运算规律：

(1) 交换律　$a \cdot b = b \cdot a$

(2) 结合律　$\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$

(3) 分配律　$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

由向量积的定义还可得到如下结果：

(1) $a \cdot a = |a|^2$

(2) 对两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,如果 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$;反之,如果 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ 则 $\cos\theta = 0$,得 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$. 所以两非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

(3) 对基本单位向量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 有

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1$$

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0,\ \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = 0$$

2. 两向量数量积的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$,按数量积的运算规律,得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) \cdot (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \\ &= a_x\boldsymbol{i} \cdot (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) + a_y\boldsymbol{j} \cdot (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) + \\ &\quad a_z\boldsymbol{k} \cdot (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \\ &= a_xb_x\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} + a_xb_y\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{j} + a_xb_z\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} + a_yb_x\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i} + a_yb_y\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} + a_yb_z\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} \\ &\quad + a_zb_x\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} + a_zb_y\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{j} + a_zb_z\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \tag{10-12}$$

这就是数量积的坐标表示式.

当 θ 为不为零的两向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角时,由数量积的定义,得

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} \tag{10-13}$$

从式 10-12 推出,两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是

$$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0 \tag{10-14}$$

例 1 设三点 $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 1)$, $C(2, 1, 2)$,求 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 的夹角 θ.

解 $\overrightarrow{AB} = \{1, 1, 0\}$, $\overrightarrow{AC} = \{1, 0, 1\}$

因为 $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{2}$

所以 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

例 2 在 xOy 平面上,求一单位向量与已知向量 $\boldsymbol{p}\{-4, 3, 7\}$ 垂直.

解 因为向量在 xOy 平面上,所以所求向量可设为 $\{a, b, 0\}$,它又与向量 p 垂直,并且是单位向量,所以有

$$\begin{cases} -4a + 3b = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

解此方程组得 $a = \dfrac{3}{5}$, $b = \dfrac{4}{5}$ 或 $a = -\dfrac{3}{5}$, $b = -\dfrac{4}{5}$

故所求的向量 $\left\{\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}, 0\right\}$ 或 $\left\{-\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}, 0\right\}$

二、两向量的向量积

1. 两向量的向量积概念

由物理学知,力 F 对某中心 O 的力矩是一向量 M(图 10-15),它的模为

$$|\boldsymbol{M}| = |\overrightarrow{OA}||\boldsymbol{F}|\sin\theta$$

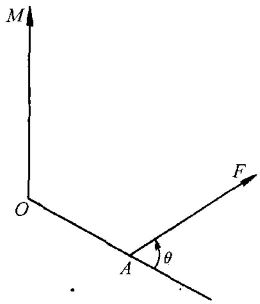

图 10-15

其中 θ 是向量 $\overrightarrow{OA}$ 与力 $\boldsymbol{F}$ 的夹角，向量 $\boldsymbol{M}$ 同时垂直于 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\boldsymbol{F}$，向量 $\boldsymbol{M}$ 的方向使 $\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 的正向符合右手规则，这是两向量进行运算确定另一向量的实例，由此可抽象出两向量的向量积概念．

定义　给定两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，它们的夹角为 $\theta(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$，向量 $\boldsymbol{c}$ 满足下列条件．

(1) $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$

(2) $\boldsymbol{c}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 成右手系(图 10-16)

则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**，记为 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

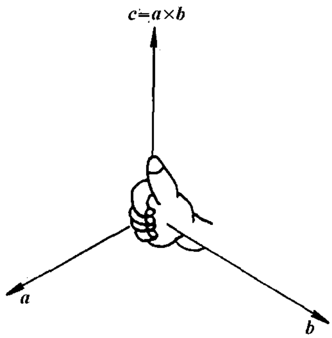

图 10-16

按上述定义，力 $\boldsymbol{F}$ 对 O 点的力矩 $\boldsymbol{M}$ 可表示为

$$\boldsymbol{M} = |\overrightarrow{OA}| \times \boldsymbol{F}$$

向量积的几何意义是：两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量积仍然是一个向量，它的大小 $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ 是以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积，它的方向垂直平行四边形所在平面，并按右手法则决定正向(图 10-17)．

由 $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，可得到下列结果：

(1) 两非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0 \qquad (10\text{-}15)$$

(2) 对于基本单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 有

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0$$

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$$

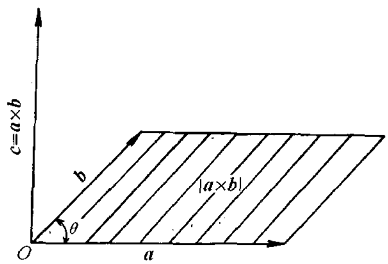

图 10-17

向量积的运算满足下列规律：

(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

(2) $\lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\lambda\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\lambda\boldsymbol{b})$

(3) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$

2. 向量积的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$，$b = \{b_x, b_y, b_z\}$．那么

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) \times (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \\ &= a_x\boldsymbol{i} \times (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) + a_y\boldsymbol{j} \times (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) + \\ &\quad\ a_z\boldsymbol{k} \times (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \\ &= (a_yb_z - a_zb_y)\boldsymbol{i} - (a_xb_z - a_zb_x)\boldsymbol{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

这就是向量积的计算公式．