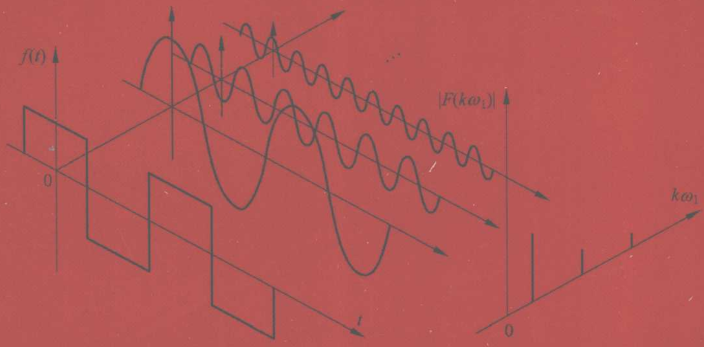
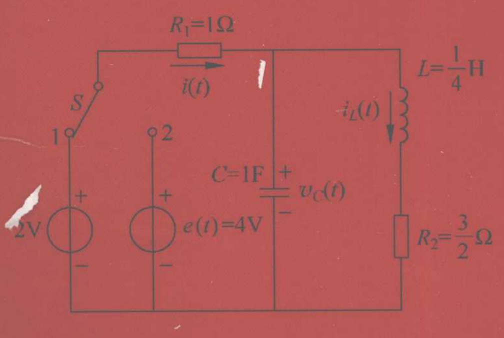
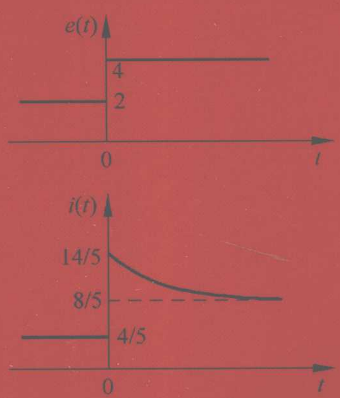


刘卫东 编著

信号与系统分析基础





清华大学出版社

刘卫东 编著

信号与系统分析基础

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是学习信号与系统课程的入门教材，重点介绍了基本信号变换的原理、物理意义、相互差别和联系，便于初学者理解. 全书包含11章：信号与系统的基本概念，线性时不变连续时间系统的时域分析，线性时不变离散时间系统的时域分析，连续周期信号的傅里叶级数，连续信号的傅里叶变换，拉普拉斯变换，离散周期信号的傅里叶级数，离散非周期信号的离散时间傅里叶变换，Z变换，离散傅里叶变换和快速傅里叶变换，模拟和数字滤波器.

本书可作为高等院校本科生和研究生信号与系统课程的教材和教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统分析基础/刘卫东编著. —北京：清华大学出版社，2008.2
ISBN 978-7-302-16977-2

Ⅰ. 信… Ⅱ. 刘… Ⅲ. ①信号分析 ②信号系统—系统分析 Ⅳ. TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第016839号

责任编辑：石 磊 王海燕
责任校对：赵丽敏
责任印制：孟凡玉
出版发行：清华大学出版社 **地 址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn **邮 编**：100084
c—service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175 **邮购热线**：010-62786544
投稿咨询：010-62772015 **客户服务**：010-62776969
印 装 者：清华大学印刷厂
经 销：全国新华书店
开 本：185×230 **印 张**：13 **字 数**：264千字
版 次：2008年2月第1版 **印 次**：2008年2月第1次印刷
印 数：1～4000
定 价：22.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103 产品编号：028084—01

前　　言

回想我自己刚开始学习信号与系统课程时的情形，学习了一个变换又一个变换，但对一些变换的物理意义、它们之间的差别和联系、为什么是这样的计算式等，难以全面深入理解，通过了较长一段时间的反复学习和琢磨后才理出头绪. 例如，刚学习完这门课程时，仍旧说不清楚离散时间傅里叶变换(DTFT)和离散傅里叶变换(DFT)概念之间的差别.

我现在从事本科生“信号与系统”课程的教学. 当初我在学习中遇到的问题，现在的初学者也同样地遇到. 因此，我在教学中注重了各种信号变换的原理、物理意义和相互关系的介绍，突出描述了离散信号变换和连续信号变换的对应关系. 在此把这几年教学的成果总结为此教材，期望能给初学者以帮助.

本书是信号与系统学习的入门教材，包含信号与系统分析的最基础的内容，适合安排 48 或 64 学时.

本书编写过程中参考了郑君里、应启珩、杨为理三位老师合著的《信号与系统》(高等教育出版社，2000 年 5 月第二版)和姜建国、曹建中、高玉明三位老师合著的《信号与系统分析基础》(清华大学出版社，1994 年 2 月第一版). 姜建国老师帮助审阅了本书的第 1 章至第 6 章. 对于以上所得到的各种帮助，在此致以衷心的感谢.

由于编者水平有限，书中一定有错误之处，恳请读者指正.

清华大学电机工程与应用电子技术系
刘卫东
2008 年 1 月

目　　录

第1章　信号与系统的基本概念

1.1　引言

系统是一个广泛使用的概念，指由多个元件组成的相互作用、相互依存的整体. 我们学习过“电路分析原理”的课程，电路是典型的系统，由电阻、电容、电感和电源等元件组成. 我们还熟悉汽车在路面运动的过程，汽车、路面、空气组成一个力学系统. 更为复杂一些的系统如电力系统，它包括若干发电厂、变电站、输电网和电力用户等，大的电网可以跨越数千公里.

我们在观察、分析和描述一个系统时，总要借助于对系统中一些元件状态的观测和分析. 例如，在分析一个电路时，会计算或测量电路中一些位置的电压和电流随时间的变化；在分析一个汽车的运动时，会计算或观测驱动力、阻力、位置、速度和加速度等状态变量随时间的变化. 系统状态变量随时间变化的关系称为信号，包含了系统变化的信息.

很多实际系统的状态变量是非电的，我们经常使用各种各样的传感器，把非电的状态变量转换为电的变量，得到便于测量的电信号.

隐去不同信号所代表的具体物理意义，信号就可以抽象为函数，即变量随时间变化的关系. 信号用函数表示，可以是数学表达式，或是波形，或是数据列表. 在本课程中，信号和函数的表述经常不加区分.

信号和系统分析的最基本的任务是获得信号的特点和系统的特性. 系统的分析和描述借助于建立系统输入信号和输出信号之间关系，因此信号分析和系统分析是密切相关的.

系统的特性千变万化，其中最重要的区别是线性和非线性、时不变和时变. 这些区别导致分析方法的重要差别. 本课程的内容限于线性时不变系统.

我们最熟悉的信号和系统分析方法是时域分析，即分析信号随时间变化的时域波形. 例如，对于一个电压测量系统，要判断测量的准确度，可以直接分析比较被测的电压波形（系统输入信号）和测量得到的波形（系统输出信号），观察它们之间的相似程度. 为了充分地和规范地描述测量系统的特性，经常给系统输入一个阶跃电压信号，得到系统的阶跃响应，图 1-1 所示是典型的波形，通过阶跃响应的电压上升时间（电压从 10%上升至 90%的时间）和过冲（百分比）等特征量，表述测量系统的特性，上升时间和过冲越小，系统特性越

好.其中电压上升时间反映了系统的响应速度,小的上升时间对应快的响应速度.如果被测电压快速变化,而测量系统的响应特性相对较慢,则必然产生较大的测量误差.

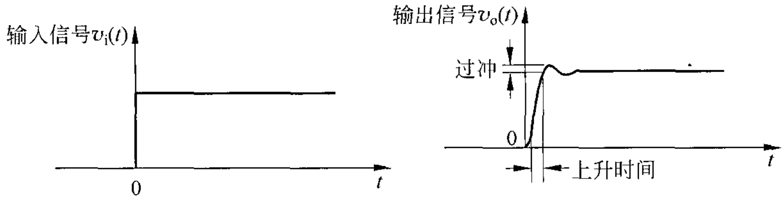


图 1-1　典型电压测量系统的输入和输出波形

信号与系统分析的另一种方法是频域分析.信号频域分析的基本原理是把信号分解为不同频率三角信号的叠加,观察信号所包含的各频率分量的幅值和相位,得到信号的频谱特性.图 1-2 所示是从时域和频域观察一个周期矩形波信号的示意图,由此可以看到信号频域和时域的关系.系统的频域分析是观察系统对不同频率激励信号的响应,得到系统的频率响应特性.频域分析的重要优点包括:(1)对信号变化的快慢和系统的响应速度给出定量的描述.例如,当我们要用一个示波器观察一个信号时,需要了解信号的频谱特性和示波器的模拟带宽,当示波器的模拟带宽能够覆盖被测信号的频率范围时,可以保证测量的准确.(2)为线性系统分析提供了一种简化的方法,在时域分析中需要进行的微分或积分运算,在频域分析中简化成了代数运算.

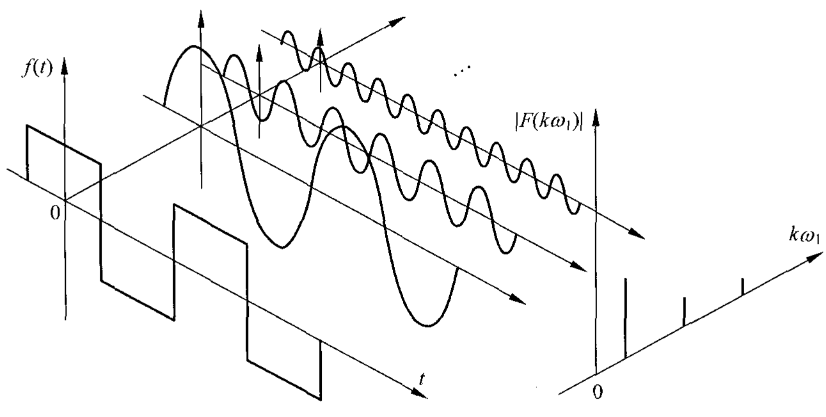


图 1-2　周期矩形波信号的时域和频域

信号和系统分析还有复频域分析的方法,对于连续信号和系统,基于拉普拉斯变换,称为 s 域分析;对于离散信号和系统,基于 Z 变换,称为 z 域分析.基于复频域分析,能够得到信号和系统响应的特征参数,即频率和衰减,分析系统的频率响应特性和系统稳定性等;复频域分析也能简化系统分析,将在时域分析中需要进行的微分或积分运算简化为

复频域中的代数运算.

本课程将学习信号和系统分析的基本方法和原理,包括时域分析、频域分析和复频域分析.随着计算机技术和数字信号处理技术的发展和应用,离散信号和离散系统的分析方法具有非常广泛的实际应用.本课程在深入学习连续信号和系统的分析方法的基础上,进一步学习离散信号和系统的分析方法.信号和系统分析的重要工具是信号变换,本课程依据信号变换方法的内在联系,将依次介绍连续周期信号傅里叶级数(FS)、连续信号傅里叶变换(FT)、拉普拉斯变换、离散周期信号傅里叶级数(DFS)、离散时间傅里叶变换(DTFT)、Z 变换,以及用于计算机计算的离散傅里叶变换(DFT)和快速傅里叶变换(FFT).

1.2　信号的分类

1.2.1　连续时间信号和离散时间信号

连续时间信号简称为连续信号,在所讨论的信号时间区间内,除了若干不连续点之外,任意时间都有确定的信号取值.连续信号的符号表示为 $f(t)$,t 为时间,连续取值.当需要区分连续信号和离散信号时,以下标 a 表示连续信号,表示为 $f_a(t)$.图 1-3 是一个连续信号的示意图.

连续信号可分为非奇异信号和奇异信号.当信号和信号的各阶导数在整个时间区间都是连续时,称为非奇异信号;当信号或信号的某阶导数存在不连续点(跳变点)时,称为奇异信号.注意,如果一个信号本身是连续的,但若干次求导以后的导函数存在不连续点,则是奇异信号.一个非奇异信号和一个奇异信号相加或相乘,其结果通常仍为一个奇异信号.

离散时间信号简称为离散信号,在所讨论的信号时间区间内,信号只在一些离散时间点取值,其他时间无定义.离散信号的符号表示为 $f_d(n)$,n 为离散点序数,取整数值.这里用下标 d 表示离散信号,以区别于连续信号.图 1-4 是一个离散信号的示意图.注意,在离散点之间,信号无定义,不要理解为信号取零值.

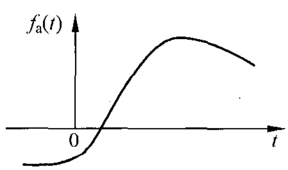


图 1-3　连续信号

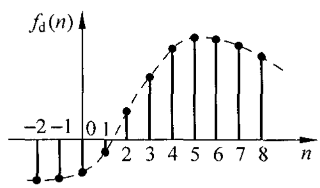


图 1-4　离散信号

离散信号通常来自于对连续信号的抽样，并且经常是等间隔抽样. 相邻两个抽样点之间的时间间隔称为抽样周期或抽样间隔，用 T_s 表示；单位时间的抽样点数称为抽样率，用 f_s 表示，有 $f_s=1/T_s$. 信号抽样满足关系 $f_d(n)=f_a(nT_s)$. 在离散信号分析中，经常隐去时间的概念，因此也称为离散序列.

实际中还经常用到模拟信号和数字信号的概念. 所谓模拟信号，信号的时间和幅值都连续取值. 本课程中不区分模拟信号和连续信号. 所谓数字信号，信号的时间和幅值都离散取值. 实际中的信号抽样，由于模数转换器（A/D 转换器）的位数限制，抽样得到的离散点的信号幅值都是离散的，所以是数字信号.

1.2.2 周期信号和非周期信号

周期信号是以一定时间间隔周期重复的信号，无始无终.

连续周期信号满足关系

$$f_a(t)=f_a(t+T), \tag{1.1}$$

其中 T 称为连续周期信号的周期.

离散周期信号满足关系

$$f_d(n)=f_d(n+N), \tag{1.2}$$

N 取正整数，称为离散周期信号的周期.

1.2.3 能量有限信号和能量无限信号

一个连续信号 $f_a(t)$ 的能量定义为

$$E_a=\int_{-\infty}^{\infty}|f_a(t)|^2\mathrm{d}t, \tag{1.3}$$

当 $f_a(t)$ 为复信号时，$|f_a(t)|^2=f_a(t)f_a^*(t)$. 信号 $f_a(t)$ 的能量可理解为：假设 $f_a(t)$ 是一个电压信号或电流信号，它作用在一个 1Ω 电阻上时所消耗的能量为信号能量.

一个离散信号 $f_d(n)$ 的能量定义为

$$E_d=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f_d(n)|^2, \tag{1.4}$$

当 $f_d(n)$ 为复信号时，$|f_d(n)|^2=f_d(n)f_d^*(n)$.

对于连续信号和离散信号，当信号的能量为有限值时称为能量有限信号，否则称为能量无限信号. 式(1.3)和式(1.4)中取信号的绝对值，表示信号能量的定义对复信号也成立.

1.3 典型信号

1.3.1 典型连续非奇异信号

1. 三角信号

三角信号有正弦和余弦两种表示形式，为方便起见，本教材选择余弦函数的表示方式. 三角信号的一般表达式为

$$f(t) = M\cos(\omega t + \phi), \tag{1.5}$$

式中 M 为信号幅值，ω 为角频率，ϕ 为初始相位. 以后在提到三角信号的初始相位时，均指余弦表示方式下的初始相位. 三角信号的角频率 ω、频率 f 和周期 T 满足关系：$T=1/f=2\pi/\omega$. 当三角信号的角频率 $\omega=0$ 时为直流信号，直流信号是三角信号的一个特例. 图 1-5 是一个三角信号的典型波形.

2. 指数信号

指数信号的表达式为

$$f(t) = Ae^{at}, \tag{1.6}$$

式中 A 和 a 均为实数，A 为 $t=0$ 时的信号幅值，a 为衰减系数，当 $a>0$ 时，$|f(t)|$ 随时间增大而增加；当 $a<0$ 时，$|f(t)|$ 随时间增大而减小. 图 1-6 是指数信号的典型波形.

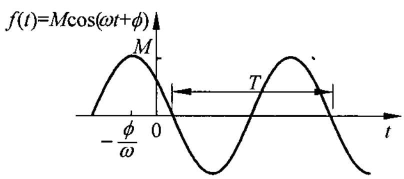


图 1-5　三角信号波形

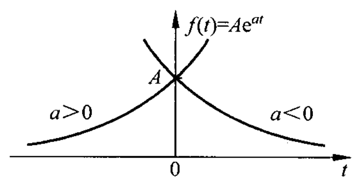


图 1-6　指数信号波形

3. 复指数信号

复指数信号的表达式为

$$f(t) = Ae^{at}, \tag{1.7}$$

式中 A 和 a 既可为实数也可为复数，有以下几种情况.

(1) 当 A 和 a 都为实数时，$f(t)$ 就是一个指数信号. 指数信号是复指数信号的一个特例.

(2) 当 A 为实数，a 为复数时，设

$$a=\sigma+\mathrm{j}\omega, \tag{1.8}$$

有

$$f(t)=A\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}, \tag{1.9}$$

根据欧拉公式

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=\cos\omega t+\mathrm{j}\sin\omega t,\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}=\cos\omega t-\mathrm{j}\sin\omega t,\end{cases} \tag{1.10a}$$

$$\begin{cases}\cos\omega t=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}),\\ \sin\omega t=\dfrac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}),\end{cases} \tag{1.10b}$$

于是有

$$f(t)=A\mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t+\mathrm{j}A\mathrm{e}^{\sigma t}\sin\omega t, \tag{1.11}$$

此时 $f(t)$ 的实部和虚部都是一个指数包络的三角函数，复数 a 的实部和虚部分别表示衰减系数和角频率. 当 $\sigma=0$ 时，有

$$f(t)=A\cos\omega t+\mathrm{j}A\sin\omega t, \tag{1.12}$$

它的实部和虚部都是无衰减的三角函数.

(3) 如果 A 和 a 都为复数，设

$$\begin{cases}A=R+\mathrm{j}I=|A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi},\\ a=\sigma+\mathrm{j}\omega,\end{cases} \tag{1.13}$$

则有

$$\begin{aligned}f(t)&=|A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}\\ &=|A|\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t+\phi)+\mathrm{j}|A|\mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t+\phi),\end{aligned} \tag{1.14}$$

其实部和虚部分别是一个指数包络的三角函数，复数 A 的模和辐角分别表示指数包络三角函数的幅值和初始相位，复数 a 的实部和虚部分别表示衰减系数和角频率.

复指数信号是一个抽象的信号，实际物理过程中并不存在复指数信号，但借助于复指数信号，可以表示指数信号、三角信号和指数包络三角信号，描述了幅值、衰减、频率和相位等特征量.

4. 三角信号的复指数表示

一个三角信号可以用一对共轭复指数信号表示，根据欧拉公式，它们满足关系

$$\begin{aligned}f(t)&=M\cos(\omega t+\phi)=\frac{M}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t+\phi)}]\\ &=\frac{M}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\frac{M}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}=A_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+A_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}.\end{aligned} \tag{1.15}$$

图 1-7 显示了在复平面上一对共轭复指数信号叠加为一个实三角信号的关系. 在复平面上，共轭复函数 $e^{j\omega t}$ 和 $e^{-j\omega t}$ 是一对旋转的单位向量，向量始端在原点，长度为 1，分别以 ω 和 $-\omega$ 的角速度旋转. 在 $t=0$ 时，两个旋转向量的起始位置在正实轴，即初始相位均为零；在任意时间 t，两个单位旋转向量与实轴的夹角分别为 ωt 和 $-\omega t$. 两个向量在实轴上的投影都是 $\cos\omega t$，在虚轴上的投影分别为 $j\sin\omega t$ 和 $-j\sin\omega t$. $e^{j\omega t}$ 和 $e^{-j\omega t}$ 始终关于实轴对称，两个向量叠加得到向量 $2\cos\omega t$，始终在实轴上变化，是一个实函数，最大幅值为 2.

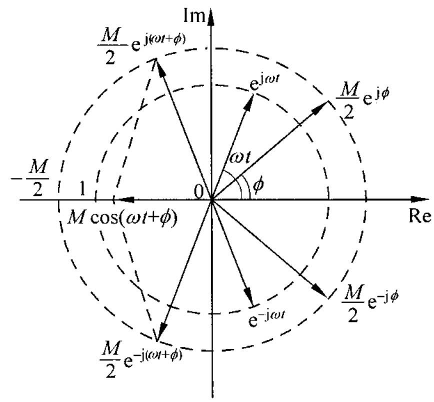


图 1-7 三角信号和复指数信号的关系

式(1.15)中的共轭复数 $A_1=Me^{j\phi}/2$ 和 $A_2=Me^{-j\phi}/2$ 是复平面上两个关于实轴对称的固定向量，向量始端在原点，长度为 $M/2$，辐角分别为 ϕ 和 $-\phi$.

复数 A_1 和 A_2 与复函数 $e^{j\omega t}$ 和 $e^{-j\omega t}$ 分别相乘，得 $\frac{M}{2}e^{j\phi}e^{j\omega t}$ 和 $\frac{M}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega t}$，它们也是复平面上一对旋转的共轭向量，始端在原点，长度为 $\frac{M}{2}$，分别以角速度 ω 和 $-\omega$ 旋转，初始相位分别为 ϕ 和 $-\phi$. 在任意时间 t，两个向量与实轴的夹角分别为 $\omega t+\phi$ 和 $-(\omega t+\phi)$. 这两个向量在实轴上的投影均为 $\frac{M}{2}\cos(\omega t+\phi)$，在虚轴上的投影分别为 $\frac{jM}{2}\sin(\omega t+\phi)$ 和 $-\frac{jM}{2}\sin(\omega t+\phi)$. 两个向量始终关于实轴对称，叠加得向量 $M\cos(\omega t+\phi)$，始终在实轴上变化，最大幅值为 M.

由此可见，一对任意幅值和初始相位的共轭复指数信号的叠加是一个实三角信号. 反过来，任意幅值和初始相位的三角信号可分解为两个共轭复指数信号的叠加. 共轭复数 $A_1=Me^{j\phi}/2$ 和 $A_2=Me^{-j\phi}/2$ 的模和辐角对应于三角信号 $M\cos(\omega t+\phi)$ 的幅值和初始相位，单位共轭复函数 $e^{j\omega t}$ 和 $e^{-j\omega t}$ 的角频率对应于三角信号的角频率.

一个实三角信号分解为正、负两个频率的复指数信号的叠加，引出了负频率的概念，这个负频率的物理意义表示的还是实际的相同数值的正频率.

信号的复指数表示把指数信号、三角信号和指数包络三角信号统一到了同一个形式，同时包含了幅值、衰减、频率和相位等特征量，给信号和系统分析带来了很大方便，因此得到了大量使用.

5. 抽样信号

抽样信号的表达式为

$$\mathrm{Sa}(t)=\frac{\sin t}{t},\tag{1.16}$$

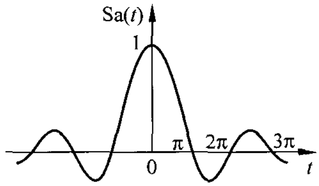


图 1-8　抽样信号波形

其波形如图 1-8 所示. 在 $t=0$ 时刻,抽样信号取值为

$$\mathrm{Sa}(t)\big|_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.\tag{1.17}$$

抽样信号满足以下关系

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(t)\mathrm{d}t=\pi.\tag{1.18}$$

1.3.2　典型奇异信号

1. 单位阶跃信号

单位阶跃信号的定义为

$$u(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t<0,\end{cases}\tag{1.19}$$

$$u(t-t_0)=\begin{cases}1, & t>t_0,\\ 0, & t<t_0.\end{cases}\tag{1.20}$$

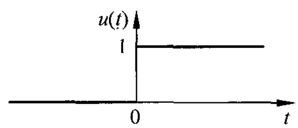


图 1-9　单位阶跃信号

图 1-9 是单位阶跃信号的波形,在 $t=0$ 处信号跳变.

2. 单位冲激信号

单位冲激信号的定义为

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0,\\ 0, & t\neq 0,\end{cases}\quad 和\quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1,\tag{1.21}$$

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty, & t=t_0,\\ 0, & t\neq t_0,\end{cases}\quad 和\quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=1.\tag{1.22}$$

图 1-10 是单位冲激信号的图形表示.

直观地理解,单位冲激信号具有两个基本特点:其一,信号在一个无穷小时间区间里取非零值,其他区间为零或无穷小;其二,信号波形的净面积为 1. 因为信号在无穷小区间内的净面积是 1,所以信号的幅值必然是无穷大.

图 1-11 所示是用矩形脉冲取极限得单位冲激信号的情况. 设矩形脉冲的宽度为 τ,面积为 1,则高度为 $1/\tau$. 压缩脉冲的宽度,保持其面积不变,则脉冲的高度增加. 当矩形脉冲宽度 $\tau\to 0$ 时,矩形脉冲高度 $\frac{1}{\tau}\to\infty$,矩形脉冲趋于单位冲激脉冲,即