普通高等教育"十一五"规划教材

复变函数与积分变换

冯复科 主编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"规划教材

复变函数与积分变换

冯复科　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是根据教育部工科数学课程教学指导委员会最新修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求(修订稿)”的精神和原则,结合多年的教学实践与研究而编写的.主要内容包括:复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、解析函数的级数表示、留数定理及其应用、共形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换等.每章后配有例题和习题,以便学生掌握所学,提高分析问题的能力.全书兼顾不同层次、专业的需要,具有启发性、趣味性和可读性,语言通俗易懂、简洁流畅.

本书可供高等工科院校电类及其相关专业选用,也可作为工程技术人员学习复变函数与积分变换的自学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/冯复科主编.—北京:科学出版社,2008
普通高等教育“十一五”规划教材
ISBN 978-7-03-022079-0

Ⅰ.复… Ⅱ.冯… Ⅲ.①复变函数-高等学校-教材 ②积分变换-高等学校-教材 Ⅳ.O174.5 O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 076261 号

责任编辑:赵 靖 李晓鹏 / 责任校对:刘小梅
责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2008 年 7 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2008 年 7 月第一次印刷 印张:16 1/2
印数:1—4 000 字数:314 000

定价:27.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新蕾〉)

前　　言

“复变函数与积分变换”是工科高等院校学生继“高等数学”课程后又一门重要的数学基础课.复变函数起源于力学、数学、物理等理论与实际问题，伴随着流体力学、电学和空气动力学的研究而发展，并为这些学科提供理论与方法上的支持，促进了工程技术的快速发展.以复变函数理论为基础建立起来的积分变换，通过特定的积分形式，建立了函数之间的对应关系，在现代工程技术领域有广泛的应用.

为了培养基础扎实、富有创新意识的人才和适应现代科学技术的发展及相关专业的要求，根据教育部工科数学课程教学指导委员会最新修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求(修订稿)”的精神和原则，结合多年的教学实践与研究，我们编写了这本《复变函数与积分变换》教材.

在本教材编写过程中有以下几点考虑：

(1) 考虑到工科院校教学的实际情况，兼顾不同层次、不同专业的不同需要，对基本概念的引入尽量联系实际，对基本理论的推导深入浅出，循序渐进；对基本方法阐述多富启发性，使学生能够在学习中融会贯通，举一反三，达到既掌握知识，又培养能力的目的.

(2) 将复变函数与积分变换有机地联系在一起，既便于教学质量的提高，又使学生在学习过程中能将两者相融合，更好的掌握本课程的内容和方法.

(3) 为提高本书的趣味性和可读性，力求语言通俗易懂、简洁流畅.在每个章节，配有较多的例题和习题，以便学生掌握所学能容，提高分析问题解决问题的能力.

(4) 在积分变换部分，增写了多维傅氏变换及 Z 变换的内容，并用“*”标出，供有关专业选用.

参加本书编写的有李晓莉(第1章)、刘元会(第2章)、何文(第3章)、冯复科(第4～6章)、刘小云(第7、8章).冯复科任主编，负责总体方案设计、具体内容编排及全书的统稿工作.

在本书编写过程中，作者参阅了大量国内外同类教材，得到了有益的启迪和教益，谨向有关作者表示谢意！在本书的编写过程中，长安大学理学院的有关领导、

数学与信息科学系的诸多老师对本书的编写与出版给予了热情指导和支持. 马江洪教授、魏广生教授审阅了全书，任功全副教授、张俊祖副教授阅读了书稿并提出了有益的建议，在此一并表示衷心的感谢！

由于作者水平有限，加之时间仓促，书中缺点、疏漏在所难免，敬请读者不吝赐教.

编　者

2008 年 3 月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　　录

第 1 章　复数与复变函数

把自变量为复数的函数称为复变函数，它是本课程的研究对象. 本章将对中学阶段学习的内容进行简要的复习和补充，并在此基础上进一步介绍复平面上的区域、复变函数的极限及复变函数的连续性等概念，为后面各章更深入地学习解析函数的理论和方法奠定基础.

1.1　复数及其代数运算

一、复数的概念

形如

$$z = x + \mathrm{i}y \text{ 或 } z = x + y\mathrm{i}$$

的数称为复数，其中，x 和 y 是任意的实数，分别称为复数 z 的实部和虚部，记作 $x=\mathrm{Re}(z)$ 和 $y=\mathrm{Im}(z)$；i 称为虚数单位，并规定 $\mathrm{i}^2=-1$.

虚部为零的复数就可以看作实数，即 $x+\mathrm{i}\cdot 0=x$；可见，全体实数是全体复数的一部分.

实部为零的复数称为纯虚数.

两个复数相等，必须且只需实部和虚部分别相等，即 $x_1+\mathrm{i}y_1=x_2+\mathrm{i}y_2$ 必须且只需 $x_1=x_2, y_1=y_2$.

一般说来，两个复数不能比较大小.

二、复数的代数运算

由复数的定义可见，实数是复数的特例. 因此定义复数的运算法则，应该与实数运算法则相一致，满足实数代数运算的一般定律.

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的加法，减法和乘法运算律定义如下：

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) \pm (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2), \quad (1.1.1)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_2 y_1 + x_1 y_2), \quad (1.1.2)$$

并称 z_1+z_2 为复数 z_1 与 z_2 的和，z_1-z_2 为复数 z_1 与 z_2 的差，z_1z_2 为复数 z_1 与 z_2 的积.

定义满足 $z_2z=z_1(z_2\neq 0)$ 的复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 为 z_1 与 z_2 的商，记作 $z=\dfrac{z_1}{z_2}$. 由积

的定义可以推得

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \tag{1.1.3}$$

容易证明,复数的代数运算也满足交换律、结合律和分配律:

$$z_1+z_2=z_2+z_1,\quad z_1z_2=z_2z_1;$$
$$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3,\quad z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3;$$
$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

称复数 $x+\mathrm{i}y$ 和 $x-\mathrm{i}y$ 互为共轭复数,复数 z 的共轭复数记为 $\bar{z}$. 如果 $z=x+\mathrm{i}y$,则 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$. 容易证明共轭复数具有下列性质:

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$,$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$,$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;

(2) $\bar{\bar{z}}=z$;

(3) $z\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$;

(4) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)$,$z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$.

有了共轭复数的性质(3),以后在计算$\frac{z_1}{z_2}$时,就可以分子分母同乘以$\overline{z_2}$,可求得其商,即式(1.1.3).

三、复数的几何表示

1. 复平面

任意一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 都与一对有序实数(x,y)对应,而任意一对有序实数(x,y)都与坐标平面上的一个点对应,全体复数就与坐标平面上的全体点之间成一一对应. 因此,复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 就可以用坐标平面上以(x,y)为坐标的点来表示. 称 x 轴为实轴,y 轴为虚轴,实轴和虚轴所在的平面称为复平面或 z 平面,并把以(x,y)为坐标的点“z”作为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的同义词,这样就可以借助几何语言把研究形的方法应用于研究复变函数的问题,同时也为复变函数的应用奠定了基础.

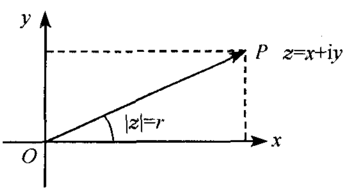

图 1.1

同样,复数 z 还与复平面上从原点到点 $z=x+\mathrm{i}y$平面向量一一对应,如图 1.1 所示. 复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 也可以用向量$\overrightarrow{OP}$来表示. 该向量的长度称为复数 $z=x+\mathrm{i}y$的模或长度,记作

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1.1.4}$$

对于复数的模,容易证明有下列关系式成立:

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|,\quad |z|\leqslant|x|+|y|,\quad z\bar{z}=|z|^2=|z^2|.$$

由图 1.2,图 1.3 可以看出,$|z_1-z_2|$表示复平面上点 z_1 与 z_2 间的距离,记为 $\rho(z_1,z_2)$,即有 $\rho(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$,并且可以得到下列不等式:

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\quad ||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|.$$

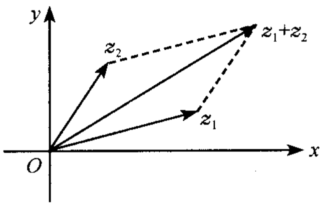

图 1.2

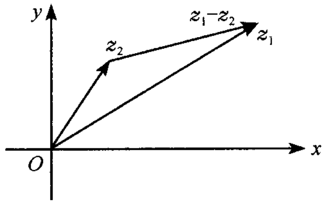

图 1.3

当 $z\neq0$ 时,由正实轴到复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 所对应的向量$\overrightarrow{OP}$的夹角 $\theta=\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$,称为复数 z 的辐角,记作

$$\theta=\mathrm{Arg}z.$$

可见,对于任一复数 $z\neq0$ 都有无穷多个辐角,称在区间$(-\pi,\pi]$内的辐角为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值,或称为主辐角,记作 $\arg z$,即$-\pi<\arg z\leqslant\pi$. 于是有

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

当 $z=0$ 时,其模$|z|=0$,而辐角不确定.

辐角主值 $\arg z(z\neq0)$可以由反正切 $\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$ 的主值 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 按下列关系确定:

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0,y\geqslant0\text{ 或 }y\leqslant0,\\ \pm\dfrac{\pi}{2}, & x=0,y>0\text{ 或 }y<0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}\pm\pi, & x<0,y>0\text{ 或 }y<0,\\ \pi, & x<0,y=0,\end{cases}$$

其中,$-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}$.

利用直角坐标与极坐标的关系

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

还可以用复数的模与辐角来表示非零复数 z,即 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$.

再利用欧拉(Euler)公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,又可以把复数 z 表示成

$$z = re^{i\theta},$$

这种形式称为复数的指数表示式.

显然,复数的各种表示可以互相转换,以方便解决不同问题的需要.

特别地,当 $r=|z|=1$,即 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,或 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$时,称 z 为单位复数.容易验证

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)},\quad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}.$$

例 1.1.1 将下列复数化为三角表示式与指数表示式:

(1) $z=-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$; (2) $z=\sin\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5}$.

解 (1) 显然 $r=|z|=\sqrt{12+4}=4$.因为 z 在第三象限,所以

$$\theta=\arctan\left(\frac{-2}{-\sqrt{12}}\right)-\pi=\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}-\pi=-\frac{5\pi}{6}.$$

因此,z 的三角表示式为

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)\right],$$

z 的指数表示式为

$$z=4\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}.$$

(2) 显然 $r=|z|=1$.又因为

$$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3\pi}{10},$$

$$\cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{3\pi}{10},$$

因此,z 的三角表示式为

$$z=\cos\frac{3\pi}{10}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{10},$$

z 的指数表示式为

$$z=\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{10}\mathrm{i}}.$$

例 1.1.2 设 z_1,z_2 是两个任意复数,证明:

(1) $|z_1\overline{z_2}|=|z_1||z_2|$; (2) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

证 (1) $|z_1\overline{z_2}|=\sqrt{(z_1\overline{z_2})\overline{(z_1\overline{z_2})}}=\sqrt{(z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2})}=|z_1||z_2|$.

(2)

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})$$

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

$$= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}$$
$$= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + |z_2|^2.$$

因为$\overline{z_1\overline{z_2}} = z_2\overline{z_1}$,所以

$$z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}).$$

从而有

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + |z_2|^2\\ &= |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2\\ &\leqslant |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2\\ &= |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2\\ &= (|z_1| + |z_2|)^2.\end{aligned}$$

对上式两边开方,就得到所要证明的不等式.

2. 复球面

除了用平面上的点和向量来表示复数外,还可以用球面上的点来表示复数.取一个与复平面 z 在原点 O 相切的球面,过 O 点作一条垂直于 z 平面的直线,交球面于 N 点,称 N 点为北极,O 点为南极(图 1.4).用直线把 N 与复平面上的点 z 相连结,该直线一定与球面交于异于 N 的一点 P,这样一来,球面上的点(除北极 N 以外)都与复平面上的点之间建立了一一对应关系.已经知道,复数与复平面上的点一一对应,因此除北极 N 以外,球面上的点也与复数一一对应,因而可以用球面上的点来表示复数.

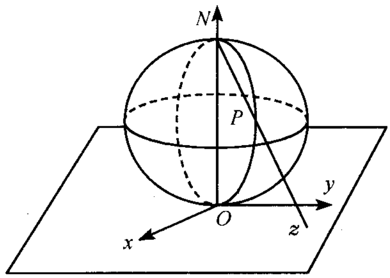

图 1.4

由上面的对应关系可以看出,z 点离 O 点越远,其对应点 P 就离北极 N 越近.但是,复平面内没有与北极 N 对应的点存在.因此规定:复平面上有唯一的一个"无穷远点"存在,该点与北极 N 对应,并把这个假想的"无穷远点"记作∞.同时,把与该点对应的复数称之为"无穷大",也记作∞.复平面加上点∞后称为扩充复平面,与它对应的整个球面称为复球面.可见,复球面上的每一个点都有唯一的一个复数与之对应.

为了与扩充复平面区分开来,把不包括无穷远点在内的复平面称为有限复平面,或者就称为复平面.无穷远点对应的复数∞,其实部、虚部与辐角的概念均无意义,但是规定它的模为正无穷大,即$|\infty| = +\infty$.

为了便于后面的计算,对复数∞的四则运算作如下规定:

(1) $a \pm \infty = \infty \pm a = \infty, a \neq \infty$;

(2) $a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty, a\neq 0$;

(3) $\frac{a}{\infty}=0, \frac{\infty}{a}=\infty, a\neq\infty$; $\frac{a}{0}=\infty, a\neq 0$;

(4) $\infty\pm\infty, 0\cdot\infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$均无意义.

四、复数的幂与方根

1. 复数的积与商

设有两个复数 $z_1=r_1e^{i\theta_1}, z_2=r_2e^{i\theta_2}$,那么

$$z_1\cdot z_2=r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

所以

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|, \tag{1.1.5}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad z_2\neq 0, \tag{1.1.6}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2, \tag{1.1.7}$$

$$\mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2. \tag{1.1.8}$$

从而有下面的定理:

定理 1.1.1　两个复数乘积的模等于它们模的乘积;两个复数乘积的辐角等于它们辐角的和.

定理 1.1.2　两个复数商的模等于它们模的商;两个复数商的辐角等于它们辐角的差.

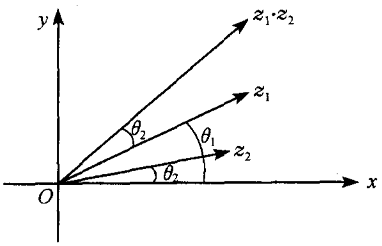

图 1.5

如果用向量来表示复数,则表示乘积 z_1z_2 的向量是从表示 z_1 的向量旋转一个角度 $\arg z_2$,并伸长(缩短)$|z_2|$倍得到的,如图 1.5 所示.特别地,当$|z_2|=1$ 时,z_1z_2 只是表示对 z_1 旋转 $\arg z_2$.例如,iz 表示对 z 逆时针旋转 90°;$-z$ 表示对 z 逆时针旋转 180°.当 $\arg z_2=0$ 时,z_1z_2 只是表示对 z_1 伸长(缩短)$|z_2|$倍.例如,$2z$ 就表示把 z 伸长到原来的 2 倍.

由于辐角的多值性,式(1.1.7),式(1.1.8)的两端都是由无穷多个数构成的数集,两端相等是指两端表示的集合相等．也就是说,对于左端的任一值,右端必有一个值和它相等,反之亦然.例如,设 $z_1=-1, z_2=i$,则 $z_1z_2=-i$.

$$\operatorname{Arg} z_1 = \pi + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

$$\operatorname{Arg} z_2 = \frac{\pi}{2} + 2m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

$$\operatorname{Arg} z_1 z_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

代入式(1.1.7)得

$$\frac{3\pi}{2} + 2(m+n)\pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

对于任意整数 m,n,总可以找到整数 $k=m+n+1$,使得上式成立,反之亦然.例如,若取 $m=n=0$,则取 $k=1$;若取 $k=-1$,则可取 $m=0,n=-2$ 或 $m=-2$,$n=0$或 $m=1,n=-3$ 等.

对于等式(1.1.8)的理解也是一样的.

定理 1.1.1 的结论可以推广到有限个复数的乘积.如果

$$z_k = r_k e^{i\theta_k} = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k), \quad k = 1,2,\cdots,n,$$

那么

$$\begin{aligned} z_1 z_2 \cdots z_n &= r_1 r_2 \cdots r_n e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)} \\ &= r_1 r_2 \cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]. \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

例 1.1.3 已知正三角形的两个顶点分别是 $z_1=1$与 $z_2=2+i$,求它的另一个顶点.

解 如图 1.6 所示,将向量 z_2-z_1 围绕 z_1 旋转$\frac{\pi}{3}\left(\text{或}-\frac{\pi}{3}\right)$就得到了另一个向量,它的终点即为所求的顶点 z_3(或 z_3').根据复数的乘法,用复数 $e^{\frac{\pi}{3}i}$(或 $e^{-\frac{\pi}{3}i}$)乘以 z_2-z_1 就可以得到另一向量 z_3-z_1(或 $z_3'-z_1$),即有

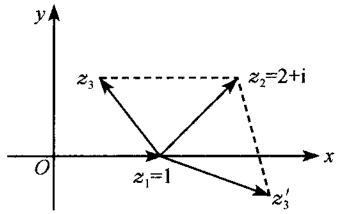

图 1.6

$$z_3 - z_1 = e^{\frac{\pi}{3}i}(z_2-z_1) = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i) = \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i,$$

所以

$$z_3 = z_1 + \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i = \frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i.$$

同理可得

$$z_3' = \frac{3+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i.$$

2. 复数的幂与方根

n 个相同复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂,记作 z^n,即 $z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot z\cdots z}_{n个}$.

如果在式(1.1.9)中,令 $z_1=z_2=\cdots=z_n=z$,而 $z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$,则

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta). \tag{1.1.10}$$

如果定义 $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$,那么当 n 为负整数时式(1.1.10)仍然成立. 特别地,当取 z 的模 $r=1$ 时,由式(1.1.10)可得

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \tag{1.1.11}$$

这就是棣莫弗(De Moivre)公式.

要求复数 z 的 n 次方根,也就是要从方程 $w^n=z$ 中解出 w.

当 $z\neq 0$(当 $z=0$ 时,解显然为 0)时,就有 n 个不同的 w 值与之对应,每一个 w 都称为 z 的 n 次方根,记作$\sqrt[n]{z}$,即 $w=\sqrt[n]{z}$. 为了求出 w,令 $z=re^{i\theta}$,$w=\rho e^{i\varphi}$,代入方程 $w^n=z$ 可得

$$\rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta},$$

从而得两个方程 $\rho^n=r$,$n\varphi=\theta+2k\pi$,$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 解之得 $\rho=\sqrt[n]{r}$(取算术根),$\varphi=\dfrac{\theta+2k\pi}{n}$,所以,$z$ 的 $n(n\geqslant 2)$次方根为

$$w_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta}{n}}.$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时,就得到了 n 个相异的根:

$$w_0=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta}{n}},\quad w_1=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+2\pi}{n}},\quad w_2=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+4\pi}{n}},\quad\cdots,\quad w_{n-1}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}}.$$

当 k 取其他整数时,所得到的根就和这些根重复了. 例如,k 取到 n 时,w_n 就和 w_0 重复了. 由此可见,非零复数 z 的 n 次方根共有 n 个.

如果记 $w_0=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta}{n}}$,则 $w_k=(\sqrt[n]{z})_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}w_0$,由复数乘积的意义知,$z$ 的 n 次方根$\sqrt[n]{z}$可由 w_0 依次旋转$\dfrac{2\pi}{n}$,$2\cdot\dfrac{2\pi}{n}$,$3\cdot\dfrac{2\pi}{n}$,$\cdots$,$(n-1)\cdot\dfrac{2\pi}{n}$而得到,它们在以原点为圆心,以$\sqrt[n]{r}$为半径的圆周上均匀的分布着.

例 1.1.4　求 $\sqrt[4]{1+i}$.

解　因为 $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$,所以 $\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}}$,$k=0,1,2,3$,即

$$w_0=\sqrt[8]{2}e^{i\frac{\pi}{16}},\quad w_1=\sqrt[8]{2}e^{i\frac{9\pi}{16}},\quad w_2=\sqrt[8]{2}e^{i\frac{17\pi}{16}},\quad w_3=\sqrt[8]{2}e^{i\frac{25\pi}{16}}.$$

这 4 个根位于以原点为圆心，以$\sqrt[8]{2}$为半径的圆内接正方形的 4 个顶点，并且 $w_1=\mathrm{i}w_0, w_2=-w_0, w_3=-\mathrm{i}w_0$.

例 1.1.5 把 $\cos3\theta$ 和 $\sin3\theta$ 用 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 表示出来.

解 由棣莫弗公式知

$$\begin{aligned}\cos3\theta+\mathrm{i}\sin3\theta &= (\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^3\\ &= \cos^3\theta+3\mathrm{i}\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-\mathrm{i}\sin^3\theta,\end{aligned}$$

比较等式两边的实部和虚部可得

$$\cos3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta,$$
$$\sin3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta.$$

例 1.1.6 求$\sqrt[3]{-8}$的所有方根.

解 因为$-8=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$，所以 $w_k=(\sqrt[3]{-8})_k=\sqrt[3]{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{3}}, k=0,1,2$，即

$$w_0=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=1+\sqrt{3}\mathrm{i},$$
$$w_1=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+2\pi}{3}}=2(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=-2,$$
$$w_2=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+4\pi}{3}}=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

注 1.1.1 在实数域中，-8 的三次方根为-2，而在复数域中，-8 的三次方根有 3 个，它们分别为 $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，-2 与 $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$.

1.2 复平面上的点集

一、基本概念

定义 1.2.1 由不等式$|z-z_0|<\rho$所确定的平面点集，称为点 z_0 的 ρ 邻域，记作 $N_\rho(z_0)$.

定义 1.2.2 对于点集 E，若平面上一点 z_0（不必属于 E）的任一邻域都含有 E 的无穷多个点，则称 z_0 为 E 的聚点；若 z_0 属于 E，但又不是 E 的聚点，则称 z_0 为 E 的孤立点；若 z_0 不属于 E，又不是 E 的聚点，则称 z_0 为 E 的外点.

定义 1.2.3 若点集 E 的每一个聚点都属于 E，则称 E 为闭集.

定义 1.2.4 若点集 E 的点 z_0 有一邻域全含于 E 内，则称 z_0 为 E 的内点；E 的异于内点的聚点及 E 的孤立点称为 E 的界点；E 的全部界点称为 E 的边界.

注 1.2.1 E 的边界必是闭集.

定义 1.2.5 若点集 E 的点皆为内点，则称 E 为开集.

定义 1.2.6 若有一正数 M 存在，对于点集 E 内的点 z，皆有$|z|\leqslant M$ 成立，

则称 E 为有界集，否则称 E 为无界集.

二、区域与若尔当(Jordan)曲线

研究复变数的问题和研究实变数的问题一样，每一个复变数也都有自己的变化范围，这些变化范围是用区域来描述的.

定义 1.2.7　设 D 是一个非空的点集，如果

(1) D 为开集，

(2) D 是连通的，即 D 中的任意两点都可以用完全属于 D 的折线连接起来(图 1.7)，则称 D 为区域.

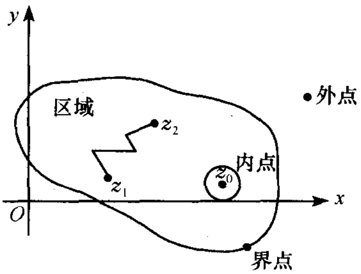

图 1.7

定义 1.2.8　区域 D 加上它的边界 B 称为闭区域，记作 $\overline{D}=D+B$.

复平面上的区域有时用关于复数的不等式来描述是很方便的.

例 1.2.1　z 平面上以原点为圆心，以 R 为半径的圆(即圆形区域)，可表示为 $|z|<R$；z 平面上以原点为圆心，以 R 为半径的闭圆(即圆形闭区域)，可表示为 $|z|\leqslant R$；z 平面上以原点 z_0 为圆心，以 R 为半径的圆，可表示为 $|z-z_0|<R$.

例 1.2.2　上半 z 平面可表示为 $\mathrm{Im}z>0$. 左半 z 平面可表示为 $\mathrm{Re}z<0$.

例 1.2.3　图 1.8 所示的环形区域可表示为 $r<|z|<R$；图 1.9 所示的带形区域可表示为 $y_1<\mathrm{Im}z<y_2$；图 1.10 所示的角形区域可表示为 $\varphi_1<\arg\varphi<\varphi_2$.

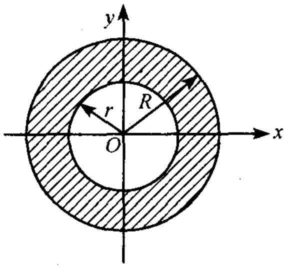

图 1.8

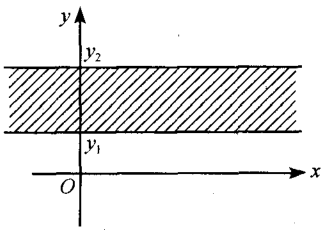

图 1.9

复变函数的另一个基本概念是曲线.

定义 1.2.9　设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个实变数的实值连续函数，且当 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 时有意义，则由方程

$$z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$$

所决定的点集 C 称为 z 平面上的一条连续曲线，上述方程称为曲线 C 的参数方程，$z(\alpha)$ 和 $z(\beta)$ 分别称为曲线的起点

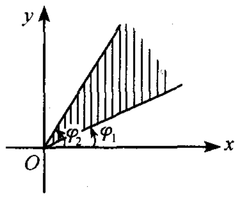

图 1.10

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com