

陈家琅 刘永建 岳湘安 编著

钻井液流动原理

石油工业出版社



4058.
CJL
74.77

钻井液流动原理

陈家琅 刘永建 岳湘安 编著

石油工业出版社

内 容 提 要

本书是为油田生产和石油高校的教学及科研需要而编写的,其内容主要包括钻井液流动的基本方程,圆管、同心环空、偏心环空中钻井液轴向层流、螺旋流层流和紊流的流动规律,钻井液流动状态的判别,钻井液—水泥浆的两相流动,钻井液携屑的液—固两相流动,钻井液流过钻头喷嘴的射流,钻井液在井底的流动和非牛顿流体流动的数值模拟。

本书可供从事钻井液流动理论研究的教学和科研人员及石油钻井现场广大技术人员学习和参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

钻井液流动原理/陈家琅等编著.

北京:石油工业出版社,1997.4

ISBN7-5021-1624-9

I. 钻…

II. 陈…

III. 钻井泥浆—液体流动—基础理论

IV. TE 254

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (95) 第 20342 号

石油工业出版社出版

(100011 北京安定门外安华里 2 区 1 号楼)

石油工业出版社印刷厂排版印刷

新华书店北京发行所发行

*

787×1092 毫米 16 开 31½ 印张 794 千字 印 1—1000

1997 年 4 月北京第 1 版 1997 年 4 月北京第 1 次印刷

ISBN7-5021-1624-9/TE·1386.

定价: 49.00 元

前 言

随着钻井技术的发展,钻井液流动原理的研究日益引起人们的重视。同时,由于石油、化工、生物工程等多方面的需要,促进了非牛顿流体力学的发展,也使得钻井液的流动规律逐渐为人们所认识。

本书是为了油田的生产和石油高校的教学需要而编写的。内容包括钻井液流动的基本方程,圆管、同心环空、偏心环空中钻井液的轴向层流、螺旋流层流和紊流的流动规律,钻井液流动状态的判别,钻井液—水泥浆液的两相流动,钻井液携屑的液—固两相流动,钻井液流过钻头喷嘴的射流,钻井液在井底的流动和非牛顿流体流动数值模拟的基础知识。

由于这方面的科技图书目前还不多见,所以编著者希望本书能对石油生产现场有关工程技术人员和高校有关专业的高年级学生和研究生有所裨益。

本书由陈家琅组织和制订编写大纲,第一章至第十章由刘永建编写,第十一章至第十四章由岳湘安编写,全书由陈家琅总成。由于编著者水平有限,书中的缺点和错误在所难免,希望读者给予指出,以便进一步修订。

编著者

一九九四年七月

目 录

绪论	(1)
第一节 钻井液的定义	(1)
第二节 钻井工程中的钻井液流动	(1)
第三节 本书的主要内容及其特点	(2)
第一章 钻井液流动的基本方程	(4)
第一节 流体的本构方程	(4)
第二节 连续性方程	(14)
第三节 运动方程	(15)
参考文献	(17)
第二章 圆管中钻井液轴向层流	(18)
第一节 圆管中钻井液轴向层流的一般方程	(18)
第二节 圆管中牛顿流体轴向层流	(21)
第三节 圆管中幂律流体轴向层流	(24)
第四节 圆管中宾汉流体轴向层流	(31)
第五节 圆管中卡森流体轴向层流	(35)
参考文献	(40)
第三章 同心环空中钻井液轴向层流	(41)
第一节 同心环空中钻井液轴向层流的动量平衡方程	(41)
第二节 同心环空中牛顿流体轴向层流	(42)
第三节 同心环空中幂律流体轴向层流	(47)
第四节 同心环空中宾汉流体轴向层流	(56)
第五节 同心环空中卡森流体轴向层流	(62)
参考文献	(76)
第四章 偏心环空中钻井液轴向层流	(77)
第一节 偏心环空中牛顿流体轴向层流	(77)
第二节 偏心环空中幂律流体轴向层流	(93)
第三节 偏心环空中宾汉流体轴向层流	(105)
第四节 偏心环空中卡森流体轴向层流	(122)
参考文献	(129)
第五章 钻井液流动状态的判别方法	(131)
第一节 两种流动状态	(131)
第二节 稳定性参数 Z	(132)
第三节 汉克斯稳定性参数 H	(141)
第四节 广义稳定性参数 Z	(142)
参考文献	(178)

第六章 圆管及环空中钻井液紊流	(179)
第一节 紊流特性.....	(179)
第二节 圆管中牛顿流体紊流.....	(181)
第三节 圆管中幂律流体紊流.....	(195)
第四节 圆管中宾汉流体紊流.....	(208)
第五节 圆管中卡森流体紊流.....	(214)
第六节 环空中钻井液紊流.....	(221)
参考文献.....	(224)
第七章 圆管中钻井液螺旋流	(225)
第一节 螺旋流的基本方程.....	(225)
第二节 圆管中幂律流体螺旋流.....	(229)
第三节 圆管中宾汉流体螺旋流.....	(240)
第四节 圆管中卡森流体螺旋流.....	(246)
第五节 圆管中赫—巴流体螺旋流.....	(253)
参考文献.....	(263)
第八章 同心环空中钻井液螺旋流	(265)
第一节 同心环空中幂律流体螺旋流.....	(265)
第二节 同心环空中宾汉流体螺旋流.....	(279)
第三节 同心环空中赫—巴流体螺旋流.....	(286)
参考文献.....	(291)
第九章 偏心环空中钻井液螺旋流	(293)
第一节 偏心环空螺旋流的基本方程.....	(293)
第二节 偏心环空中幂律流体螺旋流.....	(297)
第三节 偏心环空中宾汉流体螺旋流.....	(318)
第四节 偏心环空中卡森流体螺旋流.....	(325)
参考文献.....	(331)
第十章 钻井液—水泥浆两相流动	(332)
第一节 影响“替净”的因素.....	(332)
第二节 偏心环空中钻井液与水泥浆的顶替流动.....	(336)
第三节 钻井液—水泥浆两相流动的自流效应理论.....	(341)
参考文献.....	(351)
第十一章 钻井液携屑的液—固两相流动	(352)
第一节 基本概念.....	(352)
第二节 岩屑在钻井液中的阻力与沉速.....	(362)
第三节 钻井液—岩屑两相流动的理论基础.....	(374)
第四节 钻井液的环空上返速度.....	(384)
第五节 大斜度及水平井中岩屑的运移.....	(390)
参考文献.....	(399)
第十二章 钻井液流过钻头喷嘴的射流	(400)
第一节 基本概念.....	(400)

第二节	紊流射流的基本方程及求解	(403)
第三节	淹没射流	(409)
第四节	喷嘴的结构及其水力特性	(421)
	参考文献	(429)
第十三章	钻井液在井底的流动	(430)
第一节	钻井液在井底流动的实验研究	(430)
第二节	射流对井底的净化作用	(439)
第三节	井底流场特性的近似分析	(444)
	参考文献	(448)
第十四章	非牛顿流体流动的数值模拟基础	(449)
第一节	非牛顿流体动力学方程及本构方程	(449)
第二节	有限差分法基础	(454)
第三节	非牛顿流体流动的有限差分模拟	(458)
第四节	有限元法基础	(474)
第五节	非牛顿流体流动的有限元计算	(485)
	参考文献	(496)

绪 论

第一节 钻井液的定义

钻井液是石油钻井工程中的洗井液。钻井液在钻井工程中的主要功用是：①清洗井底，携带岩屑；②冷却和润滑钻头及钻柱；③形成泥饼，保护井壁；④控制与平衡地层压力；⑤悬浮岩屑和加重剂；⑥在地面上沉降岩屑；⑦提供所钻地层的有关资料；⑧将地面的水功率传输到钻头等。很显然，上述这些功能多半是通过钻井液流动之后才能真正实现的，因此，人们又常常俗称钻井液是石油钻井工程的血液。

钻井中最常用的钻井液是由粘土、水以及各种处理剂与加重剂组成的溶胶及悬浮体的混合体系。这种混合体系是人们在长期的生产实践中不断总结、更新和完善而得来的。在初期，人们认识到为了应付各种施工条件，采用钻井液比清水好；粗分散体系较细分散体系好。又经过实践，觉得钻井液中粘土含量多了不如少了好，甚至钻井液中有粘土不如无粘土好。当然，现在使用的无固相钻井液决不是最原始的清水，而是复杂的高分子聚合物溶液。比较确切的钻井液定义可以说成：钻井液是具有各种各样功能以满足钻井工程需要的循环流体。

第二节 钻井工程中的 钻井液流动

在石油钻井工程中，钻井液的循环流动过程（如图 0—1）为：当钻头靠钻柱（包括钻杆、钻铤及接头等）向井底加压和旋转时，钻井液在钻柱内向下流动；从钻头喷嘴流出后，产生了冲洗井底及辅助破岩的高速射流；进而钻井液又从井底开始，经过井壁与钻柱构成的环形空间作上返流动。

钻头破碎下来的岩屑经高速钻井液射流的冲蚀作用而脱离井底后，被环空中上返的流动钻井液携带到地面。当井中上返的钻井液流过地面的振动筛时，把岩屑留在筛布上，从而岩屑便从钻井液中分离出来。然后，无岩屑颗粒的钻井液流

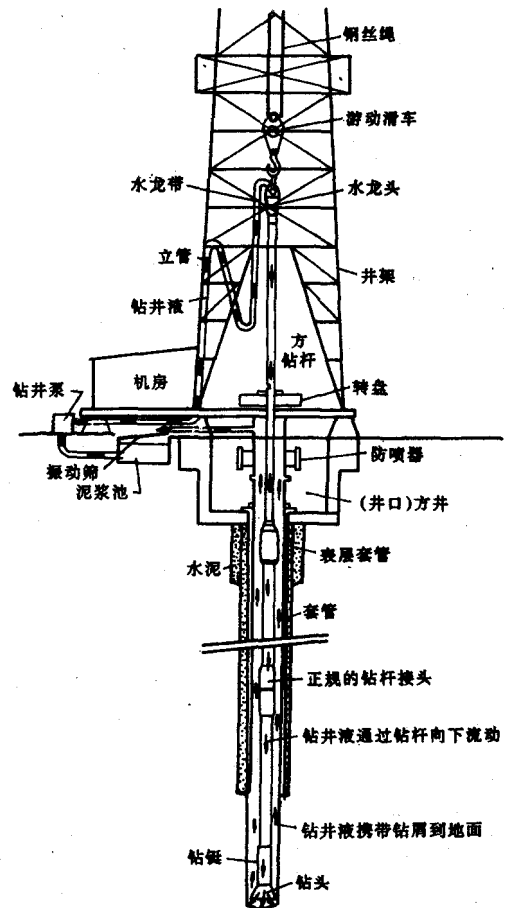


图 0—1 钻井液的循环流动

经钻井液槽返回到钻井液池中。地面上的钻井泵将钻井液池中的钻井液重新泵入钻柱内，进而钻井液再沿着钻柱向下流动。这种钻井液循环流动的不断往返，伴随于一口井的整个钻进过程。

钻井实践表明，要钻成一口油井，需要依赖钻井机械能量和水力能量的有机配合。钻井机械能量一般用钻压（ W ）、转速（ N ）之积来表示，即 $W \cdot N$ ；水力能量便只能靠流动着的钻井液来提供。一般认为，钻井机械能量的用途是破碎地下岩石产生岩屑，而水力能量的主要作用是把这些岩屑从钻头下面清除出来并携带到地面，从而形成井眼，这两者缺一不可。所以，对于钻井工程来说，研究钻井液流动，以便在钻井中最大限度的发挥水力能量，是非常重要而且具有实用价值的。

第三节 本书的主要内容及其特点

本书旨在研究钻井液的流动问题，着重于介绍钻井液流动原理，详细阐述并分析钻井液流动问题的计算方法，探讨这些方法在钻井工程中的应用。希望本书能为钻井工程的水力计算提供必要的理论基础。

在研究钻井液流动问题时，本书有如下几点基本假设：①连续介质假设，即认为流体是充满所在空间的，钻井液是内部无任何空隙的连续体。因此，钻井液的力学性质在空间内连续分布。②均质性和各向同性假设。均质性即指钻井液的任一部位的性质均相同；各向同性即指钻井液的诸性质与方向无关。如果从原子和分子的规模来看，连续介质和均质性的假设是不符合实际的。但工程中我们所研究的是宏观的力学性质，其尺度和规模远比原子和分子的尺度和规模要大，因此这种假设是完全许可的。③不可压缩性假设。钻井液是液体，液体的压缩性很小，一般情况下是可以认为钻井液在流动过程中体积不变，密度为常数。④钻井液沿流程是等温的，流动是定常的。其它一些为了简化运算所做的假设，将在有关章节中叙述。

为了在一定的理论高度、应用广度和较新成果诸方面，系统地向读者介绍钻井液流动原理和计算方法，本书在编写过程中注意了物理概念的阐述，着重于数学分析方法的介绍，遵循理论与实践相结合的原则，力求对钻井液流动问题进行较严密的分析。本书尽可能地吸取了当前关于钻井液流动原理与计算方法的新成果，以及易于被钻井现场应用的典型方法。本书的许多内容是作者本人多年来从事钻井液流动研究以及指导历届本科生和研究生工作的部分成果。

本书就其内容而言，基本上由钻井液流动的基本方程、管路水力学、井底（或钻头）水力学及钻井液流动的数值模拟等四部分组成。本书首先论述了求任何一个具体钻井液流动问题的解所必需的三组方程，即连续性方程、运动方程和本构方程。简单介绍了钻井液流变参数的测量原理。在管路水力学部分，详细介绍了固井和钻进过程中钻井液的轴向流和螺旋流问题。为使读者了解管路水力学的全貌，书中针对钻井现场常见的钻井液流型，分别列专章论述了圆管中、同心环空及偏心环空中钻井液的层流与紊流、流动状态的判别等流动问题。在井底水力学部分，论述了钻井液射流与井底流场分布规律，介绍了国内外较新的井底流场实验测定方法等。本书在论述管路及井底水力学问题时，注意与目前常用的喷射钻井技术相联系，讨论了如何充分利用水力能量和充分发挥钻井液射流清岩和破岩效率等问题。本书最后介绍了研究非牛顿流体流动问题的数值模拟方法，为读者应用现代计算机技术解决钻井现

场的复杂钻井液流动问题，提供了理论基础以及分析与解决问题的思路。

全书不仅论述了钻井液的流动原理，而且通过理论分析和若干实例计算，较全面地介绍了依据这些原理解决实际问题的方法，加强了理论与应用的结合，从而使全书内容更加丰富。

第一章 钻井液流动的基本方程

对任何一个具体流动问题进行理论分析,至少同时需要三组方程,有时常需要四组方程,即本构方程、连续性方程、运动方程及能量方程。讨论钻井液流动问题主要应用本构方程、连续性方程和运动方程。连续性方程和运动方程是自然界中物体运动共同遵守的普遍规律,决定于流动的方式而与流体性质无关,而本构方程只决定于流体的性质。

第一节 流体的本构方程

描述流体切应力与速度梯度之间的关系方程式,叫做流体的本构方程(或称为本构关系)。流体的本构方程是研究流动问题的前提条件,其对流动问题的解具有实质性的影响。

钻井液是一种流体,依据钻井液的力学性质来区分,钻井液多半属于纯粘性非牛顿流体,个别情况下也可将钻井液当做牛顿流体。

一、流体流动与变形的空间描述

在连续介质假设下,流体以物质质点的连续集合体而存在,其在空间所占的区域称为构形。描述连续介质的流动与变形有两种方法,一是物质描述方法(或称为拉格朗日方法),一是空间描述方法(或称为欧拉方法)。研究纯粘性流体流动问题通常采用空间描述方法。

采用空间描述方法研究流体的流动和变形时,将空间坐标 x_j 和时间坐标 t 看作独立的变量。流体的瞬时运动以速度矢量场给出;

$$u_i = u_i(x_j, t) \quad (1-1)$$

式中 x_j ($j=1, 2, 3,$) 是空间点的坐标, t 是时间变量,而 u_i 是流体质点的运动速度,这个流体质点在时刻 t 位于空间坐标 x_j 处。在采用空间描述方法研究流体运动时,要注意区分坐标为 x_j 的空间的点和位于该空间点处的流体质点。

设在时间间隔 dt 内,流体质点位移为 dX_j ,相应的速度改变为 du_i , du_i 主要来自两部分:一是当地速度随时间的变化 $\frac{\partial u_i}{\partial t}(x_j, t) \cdot dt$;另一则是空间位置改变带来的速度变化 $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x_j, t) \cdot dx_j (= \frac{du_i}{dx_1} dx_1 + \frac{du_i}{dx_2} dx_2 + \frac{du_i}{dx_3} dx_3)$ 。今约定,角标重复表示求和,除非另作说明。所以有

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} dt + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1-2)$$

因为这里的 dx_j 是 dt 时间内同一流体质点的位移所引起的,故有 $dx_j = dX_j$, 所以有

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} dt + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dX_j \quad (1-3)$$

取直角坐标系，则

$$dX_j = u_j dt \quad (1-4)$$

故流体质点的加速度 a_i 为

$$a_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{Du_i}{Dt} \quad (1-5)$$

这里，

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (1-6)$$

称为物质导数算子。

在式 (1-5) 中， $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 称为速度梯度，它是一个很重要的量。如图 1—1 所示，如果知道 P_0 点附近的速度梯度场，那么位于 P_0 点的一个流体微元的转动和变形就完全确定了。

流体在流动时，两个相邻流体质点一般发生相对位移，因而同一组质点构成的几何图形在流动过程中不断变化。现考察相邻两点之间的速度关系，设速度场为 $\{u_i(x_j, t)\}$ ，相邻两点 $P(x_j), Q(x_j + dx_j)$ 的速度差为：

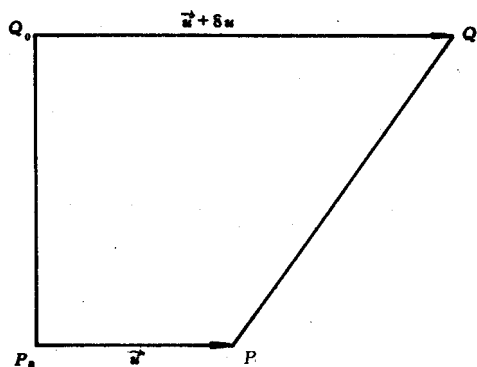


图 1—1 相邻两质点的速度关系

$$\delta u_i = u_i(x_j + dx_j) - u_i(x_j) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$$

即

$$\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \quad (1-7)$$

可以证明，速度梯度 $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 是二阶张量，可将 $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 分解为对称部分和反对称部分；

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1-8)$$

由式 (1—8) 定义应变率张量 e_{ij} 和旋率张量 ω_{ij} 如下:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1-9)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1-10)$$

应变率张量 e_{ij} 是一个对称张量, 它的三个对角线分量 $e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ 、 $e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$ 、 $e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ 分别是瞬时平行于 x_1 、 x_2 、 x_3 轴的三个线元的伸长度的速率, 另外三个分量 $e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$ 、 $e_{23} = e_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)$ 、 $e_{13} = e_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)$ 分别是三对坐标轴方向线元之间的角变形速度。而 ω_{ij} 实际上是一个矢量, $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{u}$, $\nabla \times \vec{u}$ 是涡量, $\vec{\omega}$ 就是在点 P 处的流体微元绕着过点 P 的轴做刚体转动的角速度。

在研究钻井液流动问题时, 常常要用到一阶里夫林—埃里克森 (Rivlin—Ericksen) 张量 A_{ij} 及其第二不变量 Π 。 A_{ij} 的定义是

$$A_{ij} = 2e_{ij} \quad (1-11)$$

如果将 A_{ij} 、 e_{ij} 分别用张量的符号表示法记为 A_1 及 D , 则式 (1—11) 又常写作

$$A_1 = 2D \quad (1-12)$$

A_1 的第二不变量 Π 定义为

$$\Pi = \left[\frac{1}{2} \text{tr} A_1^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1-13)$$

至于 A_1 的第一不变量 ($\text{tr} A_1$)、第三不变量 ($\det A_1$) 则很少用到。

二、应力与应力张量

钻井液这类流体和其它流体一样, 在连续介质假设下考虑其流动时, 其内部各点都处于不同的受力状态。若在其中任取一分离面, 则分离面一侧的介质对另一侧的介质有一作用力, 而另一侧的介质也给对方施加一个大小相等、方向相反的作用力。若分离面的单位法向量为 $\vec{n}$, 以向外为正, 并规定正面介质对反面介质的作用为正, 反面介质对正面介质的作用则为反作用。

取固定于空间的坐标系 $\{x_i\}$, 取分离面为 S , 正面介质对另一面的介质作用力为 $\vec{f}^*$,

其分量为 f_i 。若

$${}^*F_i = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{f_i}{S} \quad (1-14)$$

存在, 则称 $\vec{F} (F_1, F_2, F_3)$ 为空间任意一点上、任意一时刻的应力。

取分离体 V 如图 1—2。界面为 S 。 V 内任一点 P 处的加速度为 $\vec{a} = \{a_i\}$, P 点邻近的微元体 dV 内介质的质量为 ρdV , ρ 是密度。由力平衡条件 (忽略体积力) 知

$$\int_V \rho a_i dV = \oint_S F_i dS \quad (1-15)$$

若分离体特征尺度为 l , 则 V 的量级为 l^3 , S 的量级为 l^2 。所以

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{l^2} \oint_S F_i dS = 0 \quad (1-16)$$

式 (1—16) 说明流体流动时, 内部各点的应力永远局部地保持平衡。

式 (1—16) 中封闭曲面 S 是任意的, 若取图 1—3 所示的四面体, 设 τ_{ij} 为作用于与 x_i 垂直的坐标面上、指向 x_j 方向的应力, 三角形面积为 ΔS , 则有

$$F_i \Delta S - \tau_{ij} \Delta S \cdot n_j = 0$$

所以可得

$$F_i = \tau_{ij} n_j \quad (1-17)$$

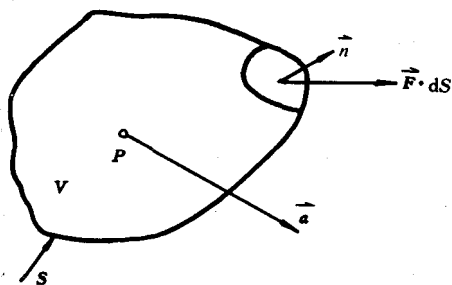


图 1—2 分离体

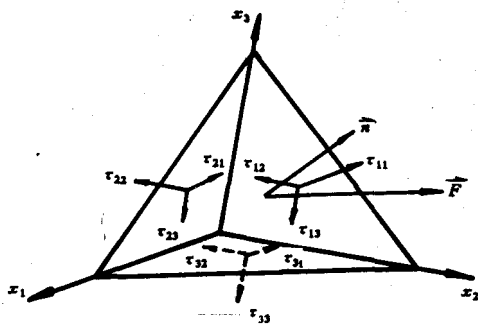


图 1—3 应力张量

式 (1—17) 表明任一时刻作用于面元 ΔS 上任一点的应力 F_i , 可以用面元单位法向量 n_j 的线性函数来表示。

式 (1—17) 中的量 τ_{ij} 由三个要素组成: (1) 大小; (2) 力的方向 x_j ; (3) 力作用面的法线方向 x_i 。 τ_{ij} 有九个分量, 可见表达为

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad (1-18)$$

$i=j$ 时为正应力, $i \neq j$ 时为切应力。

根据张量分析理论知道, 任一向量 $\vec{A}$ 在坐标变换时, 由 A_i 变换到新坐标系下的 A_α , 总有

$$\left. \begin{aligned} A_\alpha &= \alpha_{\alpha i} A_i \\ A_i &= \alpha_{i\alpha} A_\alpha \end{aligned} \right\} \quad (1-19)$$

应用式 (1—17), 则应力在坐标变换时, 有

$$\begin{aligned} F_i &= \alpha_{i\alpha} F_\alpha = \tau_{ij} n_j \\ &= \alpha_{i\alpha} \tau_{\alpha\beta} n_\beta = \alpha_{i\alpha} \alpha_{\beta j} \tau_{\alpha\beta} n_j \end{aligned}$$

所以可得

$$\left. \begin{aligned} \tau_{ij} &= \alpha_{i\alpha} \alpha_{\beta j} \tau_{\alpha\beta} \\ \tau_{\alpha\beta} &= \alpha_{\alpha i} \alpha_{j\beta} \tau_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

式 (1—20) 证明应力 τ_{ij} 具有张量特征, τ_{ij} 称为二阶应力张量。另外还可以证明应力张量是对称二阶张量, 即 $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, 故 τ_{ij} 的九个分量只有六个分量是独立分量。

由式 (1—15)、(1—17) 得:

$$\int_V \rho a_i dV = \oint_S \tau_{ij} n_j dS \quad (1-21)$$

若在 V 内及边界 S 上, ρ 、 a_i 、 τ_{ij} 、 n_j 都是连续的, V 内无空隙, 则应用高斯定理可将式 (1—21) 变为

$$\int_V \rho a_i dV = \int_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV \quad (1-22)$$

因为控制体 V 是任意选取的, 所以可得

$$\rho a_i = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (1-23)$$

若计及体积力 G_i ，则式 (1—22) 改为

$$\rho a_i = G_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (1-24)$$

式 (1—24) 即为连续介质力学运动方程的一般式。

三、本构方程

1. 牛顿流体的本构方程

根据对自然界中流体流动的大量观测经验，斯托克斯 (Stokes) 假设：①流体应力 τ_{ij} 是应变率 e_{ij} 的函数，与 ω_{ij} 无关；②应力与应变率呈线性相关；③流体均匀且各向同性。根据假设②有

$$\tau_{ij} = \mu_{ijkl} e_{kl} + C_{ij} \quad (1-25)$$

由于对称性， i 与 j 、 k 与 l 、 (i, j) 与 (k, l) 均可交换顺序，故式 (1—25) 中共有 $21 + 6 = 27$ 个常数。另一方面，本构方程反映的是流体的自然属性，与坐标系选择无关，即式 (1—25) 应满足坐标变换不变性原理。又假设流体是各向同性的，因此可以证明， μ_{ijkl} 可减少到两个常数，式 (1—25) 变为

$$\tau_{ij} = D\delta_{ij} + \lambda \Theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (1-26)$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \text{ 时} \\ 1 & i = j \text{ 时} \end{cases} \quad (1-27)$$

$$\Theta = e_{11} + e_{22} + e_{33} \quad (1-28)$$

μ 、 λ 是两个物性参数。

当流体静止时， $e_{ii} = 0$ ， $\tau_{ii} = 3D = -3p$ ， p 为流体静压。故式 (1—26) 可改写为

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda \Theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (1-29)$$

据此，流体流动时的平均主应力应为

$$\frac{1}{3} \tau_{ii} = -p + (\lambda + \frac{2}{3}\mu) \Theta \quad (1-30)$$

但是，在不可压缩条件下，流体无论运动与否，平均应力总等于静压 p ；而在可压缩流体中， p 是热力学状态变量 T （温度）和 ρ （密度）的函数，与 $\Theta = e_{ii}$ 无关。因此，斯托克斯又进一步假设

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0 \quad (1-31)$$

这样，流体的本构方程变为

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} - \frac{2}{3}\mu\Theta\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (1-32)$$

钻井中遇到的牛顿流体一般是不可压缩的，所以

$$\Theta = 0 \quad (1-33)$$

因此，

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (1-34)$$

如果采用张量分析中的符号记法，可将式（1—34）写作

$$\mathbf{S} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T} \quad (1-35)$$

$$\mathbf{T} = \mu\mathbf{A}_1 \quad (1-36)$$

式中 p 是压强， $\mathbf{I}$ 是单位张量， $\mathbf{T}$ 是偏应力张量。根据 p 的特征，一般常称式（1—35）为应力张量方程；式（1—36）则常称为牛顿流体的本构方程。 μ 为流体的动力粘度，量纲为 $[\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}]$ 。

$$\nu = \mu/\rho \quad (1-37)$$

其中， ν 称为流体的运动粘度，又叫动量扩散系数， ν 的量纲为 $[\text{L}^2\text{T}^{-1}]$ 。

若流动是一维的，则牛顿流体的本构方程即为牛顿内摩擦定律，

$$\tau_{12} = \mu \dot{\gamma} = \mu \frac{du_1}{dx_2} = 2\mu e_{12} \quad (1-38)$$

式中 $\dot{\gamma}$ 为速度梯度。