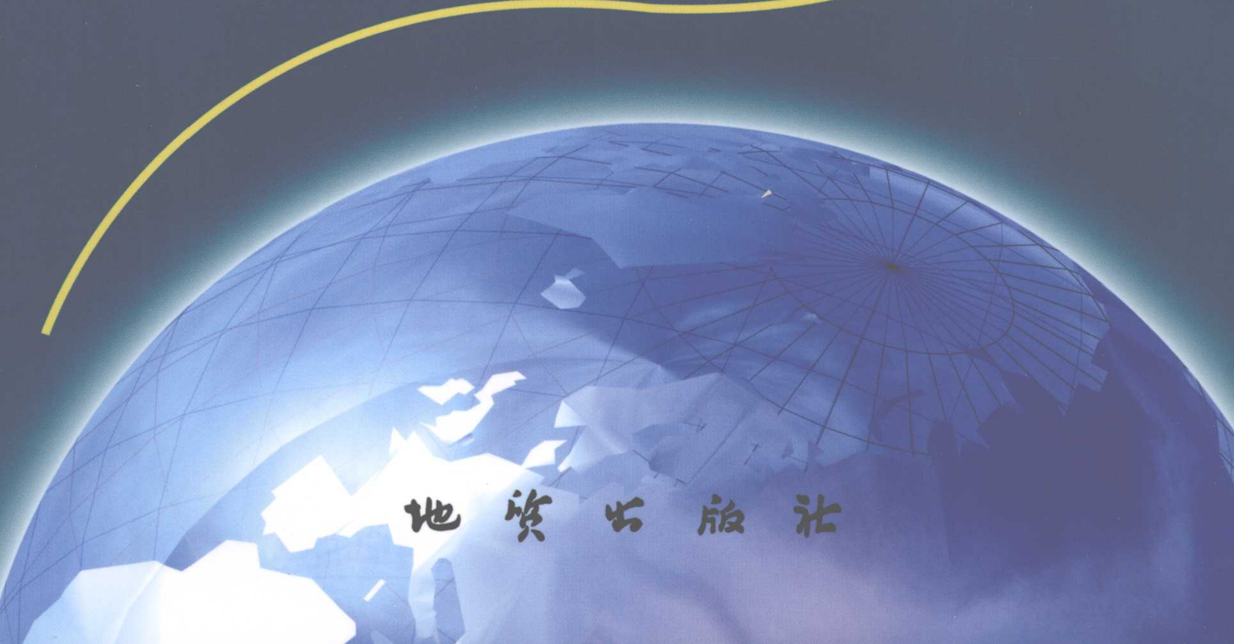
地震波传播理论与应用

位移位函数地震波在界面的广义散射

WEIYIWEI HANSHU DIZHENBO ZAI JIEMIAN DE GUANGYI SANSHE

牛滨华　孙 晟　孙春岩　著



地质出版社

中国地质大学（北京）研究生教材基金（2008001）
国家自然科学基金委面上基金项目
联合资助

位移位函数地震波在界面的广义散射

牛滨华　孙晟　孙春岩 著

地质出版社
·北　京·

内 容 提 要

地震波在自由界面和弹性界面的广义散射是地震学的基础和重要内容，在理论和应用中具有重要作用。本书通过讨论Knott方程方法和非Knott方程方法，完整地阐述求取地震波动方程在自由界面和弹性界面位移位边值定解问题解函数的方法和过程，关注Knott方程表达形式的多样性、关联性和一致性，并对这三性之间的关系进行剖析解释，突出非Knott方程方法注重数学解析和物理分析的特点和作用。书中对各种问题的归纳和公式的导出都有详尽的阐述；涉及的方程结构特点、递推规则、代表性方程、独立性方程等内容均有系统的分析和综合。各章或以尾节或以单独的小结给出了本章内容要点。

阅读本书仅需高等数学、线性代数、矩阵、场论矢量分析和弹性力学等方面的初级知识。本书关于位移位形式的地震波函数在界面的广义散射传播方面问题的讨论具有较好的系统性和综合性，可以作为地球物理学、勘查技术与工程以及有关各类专业本科生高年级和研究生的教材，也可以作为相关专业教师和科技人员教学科研的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

位移位函数地震波在界面的广义散射/牛滨华等著.
北京：地质出版社，2008.2
ISBN 978-7-116-05645-9

Ⅰ.位… Ⅱ.牛… Ⅲ.位移-势-地震波-散射振幅-研究 Ⅳ.P315.3

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第015465号

WEIYIWEI HANSHU DIZHENBO ZAI JIEMIAN DE GUANG YI SANSHE

责任编辑：祁向雷
责任校对：李 玫
出版发行：地质出版社
社址邮编：北京海淀区学院路31号，100083
电 话：（010）82324508（邮购部）；（010）82324577（编辑部）
网 址：http://www.gph.com.cn
电子邮箱：zbs@gph.com.cn
传 真：（010）82310759
印 刷：北京地大彩印厂
开 本：787 mm×1092 mm 1/16
印 张：17.25
字 数：420千字
印 数：1—1000册
版 次：2008年2月北京第1版·第1次印刷
定 价：40.00元
书 号：ISBN 978-7-116-05645-9

前　言

地震波遇界面产生的同类和转换反射、透射以及折射和全反射等现象可以称为地震波在界面的广义散射。这方面的知识是地震波传播理论和应用的重要组成部分。

波在界面产生广义散射现象的研究，本质上归结为求取波在界面上满足波动方程边值定解问题的解函数。边值定解问题分为**位移波函数**和**位移位波函数**两种形式，这两种形式的解函数虽然表达形式略有差异，但在物理含义上具有一致性而且彼此之间可以相互转换。本书是“位移位函数地震波在界面的广义散射”，作者将在另一本书中专门讲述“位移函数地震波在界面的广义散射”。这两本书对于认识和理解地震波在界面的广义散射现象具有并行匹配的功能作用。

学者 Knott（1899 年）对“位移位函数地震波在界面的广义散射”做出了开创性的工作，后人对他及有关学者在这方面的贡献统称为 Knott 方程或 Knott 方法。本书包含 Knott 方程方法和非 Knott 方程方法两部分内容。无论是 Knott 方程方法还是非 Knott 方程方法，两者都是基于相同的边值定解问题，但求取“解函数”的具体方法略有差异。Knott 方程方法设定满足位移位形式波动方程的波函数是直接给出所有可能的具体表达式，然后把这些具体的波函数代入波在界面上满足的方程即界面方程，得到矩阵形式的（即线性代数方程组）解函数即 Knott 方程，最后求解该线性代数方程组就得到了 P 和 SV 波反射及透射系数的具体表达形式。非 Knott 方程方法设定满足位移位形式波动方程的波函数，采用的是数学上的分离变量法和待定系数法，把偏微分方程的边值定解问题转化为常微分方程的边值定解问题，首先求取常微分方程的解函数，然后再合成求取偏微分方程的解函数。Knott 方程方法得到的解函数表达形式简洁，形式上直观。非 Knott 方程方法基于特定参数的变化可以引申出许多有重要价值的如 Rayleigh 面波、Love 面波等特殊的“解函数”。非 Knott 方程方法注重数学解析和物理分析的特点和作用，解函数的物理意义更直观。

本书通过 Knott 方程方法和非 Knott 方程方法的讨论，完整地阐述求取自由界面和弹性界面边值定解问题解函数的方法和过程，关注 Knott 方程表达形式的多样性、关联性和一致性并对这三性之间的关系进行必要的剖析和解释，突出非 Knott 方程方法注重数学解析和物理分析的特点和作用。

本书内容的框架结构

全书共计九章，针对自由界面和弹性界面，前面六章是Knott方程方法，后面三章是非Knott方程方法。本书最后的附录是为方便读者阅读本书所提供的必备知识。

第1章是Knott方程的基本问题。首先是左手和右手两种边值定解问题，这是位移位较之位移问题的特殊性；然后是经典Knott方程和Knott方程方法；最后是Knott方程的多样性和Knott方程的“递推规则”。上述内容均可视为Knott方程的基本问题，它们也是本书后续内容的基础。

第2章和第3章分别是物理坐标系和地震勘探坐标系中的Knott方程。这两章内容突出表现Knott方程表达形式的多样性。每章分别阐述相应坐标系下左手和右手边值定解问题的Knott方程，其中包含指定边值定解问题中P波和SV波在四个象限分别入射弹性界面的情况。每章最后一节对本章Knott方程的差异性和关联性，特别是代表性方程和独立性方程等问题进行了分析总结。

第4章是Knott方程的多样性、关联性和一致性。本章内容是前面三章特别是第2章和第3章内容的综合分析和总结。多样性表现在定解条件和解函数的多样性，即两种坐标系，每种坐标系又存在两种边值定解问题，每种边值定解问题又包含P波和SV波各自的四种入射方式。关联性表现在对于确定的入射波，所有可能条件下得到的结果仅有四个方程是独立的，而这四个方程最终又可以浓缩为一个独立的方程。一致性表现在对于同一介质模型，同种类型入射波对应的所有不同表达形式的Knott方程最终都将统一于表达形式相同的能量平衡方程。

第5章是Knott方程的数值计算。本章选择第2章和第3章有特殊代表性的Knott方程进行了数值模拟。Knott方程与其数值计算是不可分割的整体。通过对数值计算曲线的分析解释，可以加深对Knott方程的定解条件、结构特点、方程的递推规则以及代表性和独立性Knott方程等内容的认识和理解。本章选择方程的数值计算仅考虑临界角以内的情况，不涉及其他情况。

第6章是自由界面的Knott方程。自由界面的Knott方程与弹性界面的Knott方程共同构成Knott方程的整体内容，它具有不可或缺的重要地位和作用。自由界面可以视为弹性界面两个半无限空间退化为一个半无限空间的问题，因此处理分析弹性界面的思路方法完全适用于自由界面的情况，尽管公式的推导和解释分析的难度降低，但所得结论和认识具有重要的价值。

第7章至第9章是非Knott方程方法。第7章和第8章分别讲述P和SV波在弹性界面和自由界面的广义散射，第9章是SH波在弹性界面和自由界面的广义散射。非Knott方程方法充分体现了数学的变量分离法和待定系数法的

优越性，通过分析特定参数的可能变化为边值定解问题的解函数的变化提供了与实际物理情况相一致的多种可能情况。因此，非 Knott 方程方法突出了波散射的数学解析和物理分析的特点。特别应该提出的是大家所熟知的 Rayleigh 面波、Stoneley 面波和 Love 面波都是运用非 Knott 方程方法揭示的。这三章内容将较为详细地阐述这方面的问题，其中包含特殊情况的数值计算。

致谢

本书由牛滨华同志负责整体撰写，孙晟同志对全书的主要公式进行了推导并对有关文字内容的组合和文稿质量的保证做出了重要工作，孙春岩同志对第 1 章和附录以及全书的章节结构及文字加工作出了贡献。感谢中国地质大学（北京）研究生院对本书出版的大力资助；本书编写得到国家自然科学基金委面上基金 49974028 和 40474043 项目的资助，书中有关内容也与基金项目的研究内容密不可分，对基金项目给予的资助表示衷心的感谢；真诚地感谢中国地质大学（北京）地下信息探测技术与仪器重点实验室；真诚地感谢同济大学海洋地质地球物理国家教委重点实验室。特别要感谢杨宝俊教授、高锐研究员、张中杰教授、于晟研究员对作者工作一贯的支持以及对作者撰写本书给予的真诚鼓励和具体帮助。作者还要感谢本书所引用参考文献的各位学者和专家。

晏信飞、潘海滨、李阿伟、闫国英、田蒲源、李迎秋、姜虹、周杰和张萌萌为本书出版的有关图件、校稿等方面做出了宝贵的工作。李国平、李佳、张文忠、王荣东等同志在校稿方面付出了辛勤劳动并提出过宝贵意见。作者对上述为本书出版做出过辛勤工作的各位表示十分衷心的感谢。由于作者水平所限，书中不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

绪　论

地震波遇界面产生同类和转换反射、透射以及折射和全反射等现象可以称为地震波在界面的广义散射[1~4,8]。这方面的内容是地震波传播理论和应用的重要组成部分，在油气、水合物等能源地震勘探开发领域具有广泛的应用。这里首先提出位移位形式的地震波及其在界面的广义散射问题，同时结合地震波在界面广义散射研究的发展概况简述我们的粗浅认识和思考；然后是位移位地震波及其 Knott 方程与位移地震波及其 Zoeppritz 方程之间的关系，这种关系有必要从物理场论的位移与位移位之间关系的一般性理论中得到认识和理解；最后是位移位地震波在界面广义散射基本内容即 Knott 方法和非 Knott 方法，以及其他相关问题。

1　地震波在界面广义散射研究的发展简况

波在自由界面和弹性界面广义散射的研究包含两个层面：一个是波动方程加上界面条件的边值定解问题，另一个就是边值定解问题的求解。简言之，地震波在界面的广义散射就是确定波动方程满足的边值定解问题并求解该问题的解函数。

边值定解问题有位移和位移位两种表达形式，由此也存在两种研究方式。其中采用位移波函数研究的可以统称为**“位移方法”**，这种方法的典型代表是 Zoeppritz 方程；而采用位移位波函数研究的可以统称为**“位移位方法”**，这种方法的典型代表是 Knott 方程，位移位方法本身又可以分为 Knott 和非 Knott 两种具体的情况。位移和位移位两种方法在物理内涵上是一致的，但也存在着数学解法方面的差异。

1.1　矢量波场的纵波和横波波场的分解

弹性波场中纵波和横波概念的提出：矢量地震波场（即弹性波场）中纵波和横波的分解在地震波理论和应用发展中具有划时代的意义。矢量波场的纵波和横波波场的分解等价于矢量位移的标量位移位和矢量位移位的分解。

现有的地震波理论和应用成果表明，弹性波（或地震波）传播的研究与物理学中光波和声波的研究密不可分[1~4,8]。Poisson（泊松）在 19 世纪 20 年代首先提出了弹性介质中同时存在纵波和横波的概念，并建立了“泊松介质”；Poisson 还证明了位移运动方程中可以由两个位移分量之和表示；其中之一是标量位（即标量势）函数的梯度，它满足纵波的波动方程；另一个是位移矢量中的涡旋（即旋度）函数，它满足横波的波动方程。Poisson 的关于波动方程的通解中没有明确包含涡旋场位移分量的“矢量位”函数。Lamé（拉梅）1852 年首先完整地利用标量位和矢量位表述了波动方程的通解，后人称这样的解为 Lamé 解；在电磁场理论的研究中 Helmholtz（亥姆霍兹）对矢量场的分解也做出过同样的贡献。经过半个世纪之后，1906 年日本的地震学创始人 F. Omori（大森房吉）利用当

时世界上最好的地震台网观测到了地壳固体介质中存在的纵波和横波，用实际观测的地震数据证实了 Poisson 和 Lamé 等人理论研究成果的正确性。

地震波理论关于矢量地震波场分解的完整表述是，位移矢量可以分解为标量位移位的梯度和矢量位移位的旋度，或者说矢量波动方程可以分解为标量位移位满足的纵波波动方程和矢量位移位满足的横波波动方程。这种理论表明了地震波在界面广义散射的边值定解问题及其求解等相关问题的研究存在位移和位移位两种基本方式。

1.2 地震波在界面的广义散射

地震波在界面广义散射的研究无论是采用位移方式还是位移位方式，前人都进行了广泛而卓有成效的研究，这些成果极大地丰富和完善了地震波的理论和实践。

George Green（格林）于 1839 年首先针对自由界面试图用弹性波解释光的反射和折射，在细节上类似现代的平面波在界面的广义散射分析；但是，Green 没有完成两个半空间不同弹性介质界面上波的反射和透射的进一步研究。波在两个半空间弹性界面的深入研究是 Knott（诺特）在 1899 年和 Zoeppritz（佐普里兹）在 1901 年分别独立地完成的，这就是今天大家所熟知的 Knott 方程和 Zoeppritz 方程。Rayleigh（瑞雷）1887 年从理论上推导了面波的存在即现在所称的 Rayleigh 面波，这种面波是一对平面谐波（P 波和 SV 波）在弹性半空间表面平行入射时产生的。Horace Lamb（兰姆）1904 年研究了固体半空间自由表面上点脉冲震源定解问题的精确解，这实质上是球面波的反射和折射问题；对分界面上的此类问题，后来人们统称为“Lamb 问题”；其后的研究结果表明，自由表面点源发射的球面波可以表示为平面波的叠加（Weyl）和作为柱面波的叠加（Sommerfeld 即索莫菲积分）。Love（拉夫）于 1911 年在研究表层对瑞雷面波传播的影响时，发现了另一种面波；这就是当覆盖层的横波速度小于下伏层的横波速度时，在这两种介质的分界面上可以产生 SH 型的面波。Stoneley（斯通利）在 1924 年推导出介质内部弹性分界面附近存在 Stoneley 面波即 Rayleigh 型面波。Rayleigh 和 Love 面波在天然和人工地震（陆上自由表面）观测中普遍存在，而 Stoneley 面波仅在井中才能观测到。

1.3 回顾中的认识和思考

回顾并剖析波在界面广义散射研究的发展进程可以引出许多有价值的思考。

首先是矢量弹性波场中纵波和横波概念的提出，由此表明位移和位移位都是表征地震波传播的基本物理量。学者 Lamé 建立了位移矢量与位移位的关系，Lamé 方程的提出对地震波理论发展作出了重要贡献，为纵波和横波概念的建立，特别是实际地球探测中纵波和横波的识辨以及提取奠定了扎实的理论基础。

其次是运用地震波场的位移函数和位移位函数开展波在界面上广义散射的研究，典型的代表有，位移形式的 Zoeppritz（佐普里兹）方程和位移位形式的 Knott（诺特）方程，其中前者的边值定解问题基于位移函数，而后者的边值定解问题基于位移位函数。位移位函数的引入以及位移与位移位关系的确立完善了地震波场的理论，拓展了波在界面广义散射研究的方法，也为地震波有关理论方法的研究提供了广泛的途径，特别是 20 世纪 70 年代基于纵波波动方程的地震波场偏移成像理论及其方法技术的研究发展。

现有的地震波理论和应用成果表明，地震波遇界面时大致存在以下几种情况：第一种

是 P 或 SV 波在弹性界面正常入射时的反射和透射，这种反射和透射包含同类反射和透射以及异类（即转换）反射和透射，它们普遍遵循 Snell 定律。第二种情况是波在弹性界面产生复杂的反射和透射，例如 P 波或 SV 波等于或大于临界角入射以及广角反射等情况。第三种是界面的 Rayleigh、Love 和 Stoneley 面波。第四种是 SH 波在自由界面和弹性界面的广义散射。上述的许多重要成果都采用了位移位形式的波函数，例如自由界面的 Rayleigh 面波。

这里应该提及并探讨位移位函数的物理意义，这个问题可以从理论和应用两个层面考察。位移位函数在现有的地震波理论体系中具有重要的地位和不可或缺的作用，例如基于 Lamé 方程的矢量波场中纵波和横波波场的分解，波在界面广义散射的 Knott 方程等。另一方面把弹性波场与电场类比可以知道，电场中的电场矢量和电势函数能够分别对应弹性波场中的位移矢量和标量位函数，但是标量位函数不像电势函数那样具有明确的物理含义，因为在实际的地震波场中没有确切的物理量与标量位函数相对应，矢量位函数也存在类似的情况。

另一个值得关注的问题是 Knott 方程与 Zoeppritz 方程的关系。众所周知，实际地震资料处理中的 AVO（振幅与偏移距的关系）和 AVA（振幅与入射角的关系）商业化软件几乎都是采用位移形式的 Zoeppritz 方程或演变的方程，而不是位移位形式的 Knott 方程，这表明位移形式的 Zoeppritz 方程可以与陆上实际检波的位移物理量数据直接接轨（即记录数据的物理量与 AVO 处理中的物理量之间相一致），给相关的数据处理和解释带来便利。但是这不是问题的本质所在，因为也存在另外的情况如海上自由表面地震数据是压力物理量，而 AVO 处理通常使用的却是位移形式的 Zoeppritz 方程，（即记录数据的物理量与 AVO 处理中的物理量两者之间并不一致）。事实上地震波理论已经证明了 Zoeppritz 方程与 Knott 方程可以彼此相互转换，这两个方程在地震波理论和应用中具有同样的重要地位和作用。

2　场论中位移与位移位关系的普遍理论

地震波在界面广义散射的研究存在位移和位移位两种基本方式，这里关键的问题是位移与位移位之间的关系。因此需要从场论的普遍理论出发进一步加深对矢量函数与位函数（即标量位函数和矢量位函数）之间关系的认识和理解。

标量场　空间区域 D 的每点 $M(x,y,z)$ 对应一个数量值 φ，它在此空间区域 D 上就构成一个标量场，用点 $M(x,y,z)$ 的标量函数 $\varphi(x,y,z)$ 表示[9]。若 $M(x,y,z)$ 的位置用矢径 $\vec{r}$ 确定，则标量 φ 可以看作变矢 $\vec{r}$ 的函数即 $\varphi=\varphi(\vec{r})$。例如，温度场 $u(x,y,z)$，密度场 $\rho(x,y,z)$，电位场 $e(x,y,z)$ 都是标量场。

矢量场　空间区域 D 的每点 $M(x,y,z)$ 对应一个矢量值 $\vec{a}$，它在此空间区域 D 上就构成一个矢量场，用点 $M(x,y,z)$ 的矢量函数 $\vec{a}(x,y,z)$ 表示。若 $M(x,y,z)$ 的位置用矢径 $\vec{r}$ 确定，则矢量 $\vec{a}$ 可以看作变矢 $\vec{r}$ 的矢函数即 $\vec{a}(\vec{r})=a_x(x,y,z)\vec{i}+a_y(x,y,z)\vec{j}+a_z(x,y,z)\vec{k}$，或 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，例如，位移场 $\vec{u}(x,y,z)$、电场 $\vec{E}(x,y,z)$ 和磁场 $\vec{H}(x,y,z)$ 都是矢量场。

梯度算符 ∇作用到一个标量场 φ 则产生矢量场 $\nabla\varphi$；散度算符 $\nabla\cdot$ 作用到一个矢量场 $\vec{a}$ 则产生标量场 $\nabla\cdot\vec{a}$；旋度算符 $\nabla\times$ 作用到矢量场 $\vec{a}$ 则产生矢量场 $\nabla\times\vec{a}$。

2.1 无散无旋场

无散无旋场从数学的角度考虑也称为调和场，它满足

$$\nabla\times\vec{a} = 0 \text{ 和 } \nabla\cdot\vec{a} = 0$$

由于 $\nabla\times\vec{a}=0$，则存在标量位函数 φ（注：函数 φ 即 $\varphi(M)$ 在数学场论中称为标量函数，在物理场论中称为标量位函数或标量势函数）使下式成立

$$\vec{a} = -\nabla\varphi$$

于是有

$$\nabla\cdot\vec{a} = -\nabla\cdot(\nabla\varphi) = -\nabla^2\varphi = 0 \text{ 或 } \nabla^2\varphi = 0 \tag{2.1}$$

所以这样的矢量场 $\vec{a}(M)$ 可以由标量位函数 φ 来描述，而 φ 满足 **Laplace**（拉普拉斯 1749－1827，法国天文学家、数学家）方程（2.1）式。例如，无源的电场和磁场。

2.2 有散无旋场

有散无旋场（即无旋有散场）也称为有源无旋场，它满足

$$\nabla\cdot\vec{a} = f \text{ 和 } \nabla\times\vec{a} = 0$$

其中，f 为一数量函数。由于 $\nabla\times\vec{a}=0$，则存在标量位函数 φ 使下式成立：

$$\vec{a} = -\nabla\varphi$$

由此得到

$$\nabla\cdot\vec{a} = \nabla\cdot(-\nabla\varphi) = f$$

即

$$\nabla^2\varphi = -f \tag{2.2}$$

所以矢量场 $\vec{a}(M)$ 也可以由标量位函数 φ 来描述，并且 φ 满足 **Poisson**（泊松）方程（2.2）式。例如，有源的电场和磁场。

2.3 无散有旋场

无散有旋场（即有旋无散场）也称为无源有旋场，它满足

$$\nabla\cdot\vec{a} = 0 \text{ 和 } \nabla\times\vec{a} = \vec{b} \neq 0$$

由于 $\nabla\cdot\vec{a}=0$ 并从矢量场的定义可知，这时存在矢量位函数 $\vec{\psi}$（函数 $\vec{\psi}$ 即 $\vec{\psi}(M)$ 在数学场论中称为矢量函数，在物理场论中称为矢量位函数或矢量势函数）使下式成立

$$\vec{a} = \nabla\times\vec{\psi} \text{ 和 } \nabla\cdot\vec{\psi} = 0$$

于是

$$\nabla\times\vec{a} = \nabla\times(\nabla\times\vec{\psi}) = \vec{b} \neq 0$$

再由公式 $\nabla\times(\nabla\times\vec{\psi}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{\psi}) - \nabla^2\vec{\psi}$，得到

$$-\nabla^2 \vec{\psi} = \vec{b} \tag{2.3}$$

说明这时的矢量场 $\vec{a}(M)$ 可用另一个矢量位函数 $\vec{\psi}$ 来描述，且 $\vec{\psi}$ 也满足 **Poisson**（泊松）方程（2.3）式。

2.4 有散有旋场

有散有旋场也称为有旋有源场，它满足

$$\nabla\times \vec{a} \neq 0 \text{ 和 } \nabla\cdot \vec{a} \neq 0$$

这是**最一般的矢量场**（**注意**：从数学场论角度考虑，也把最一般的场称为无散无旋场），这样的场可以分解为有旋场和有散场两部分之和，即

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

其中，$\vec{a}_1$ 满足无旋场即 $\nabla\times\vec{a}_1=0$，$\vec{a}_2$ 满足无散场即 $\nabla\cdot\vec{a}_2=0$。于是，对 $\vec{a}_1$ 存在标量位函数 φ 使 $\vec{a}_1=-\nabla\varphi$ 成立，对 $\vec{a}_2$ 存在矢量位函数 $\vec{\psi}$ 使 $\vec{a}_2=\nabla\times\vec{\psi}$ 成立。因此，有散有旋场可以又表达为

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = -\nabla\varphi + \nabla\times\vec{\psi} \tag{2.4a}$$

若取 $\vec{a}_1=\nabla\varphi$ 和 $\vec{a}_2=\nabla\times\vec{\psi}$ 成立，上式还可以写成

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \nabla\varphi + \nabla\times\vec{\psi} \tag{2.4b}$$

上式就是有散有旋场的表达形式。注意有散有旋场的 $\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2=-\nabla\varphi+\nabla\times\vec{\psi}$ 与 $\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2=\nabla\varphi+\nabla\times\vec{\psi}$ 两种表达形式没有本质性的差别，使用中注意前后一致就行了。

综上所述，基于场论中矢量函数与位函数的一般理论可以知道，弹性波场即地震波场是最一般的矢量场，位移矢量场 $\vec{u}$ 满足 **Lamé** 方程。从地震学考虑，Lamé 方程分为右手 $\vec{u}=\nabla\varphi+\nabla\times\vec{\psi}$（即 $\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2=\nabla\varphi+\nabla\times\vec{\psi}$）和左手 $\vec{u}=\nabla\varphi-\nabla\times\vec{\psi}$ 两种形式，其中标量位函数 φ 满足纵波的波动方程，矢量位函数 $\vec{\psi}$ 满足横波的波动方程。基于 Lamé 方程，可以把地震波传播理论中研究“位移函数”的问题等价地转化为研究“位移位函数”的问题，例如位移位形式的地震波在界面的广义散射，（标量位移位的）纵波波动方程的偏移成像。

3 位移位波动方程的边值定解问题_ Knott 方法

Knott 方法主要内容包含位移位波动方程的边值定解问题、边值定解问题的求解并得到 Knott 方程和 Knott 方程的多种表达形式以及递推规则。

3.1 位移位波动方程的边值定解问题

研究地震波在界面上的广义散射行为，就是求解波动方程满足弹性界面连续条件下的解函数。波动方程的边值定解问题由波动方程和界面方程两部分组成。这里仅考虑二维空间并且假定介质是均匀弹性各向同性的情形。

首先是 Lamé 方程，它是建立位移位边值定解问题（即位移位波动方程的边值定解问

题）的关键。Lamé 方程分为右手和左手两种形式，对于不同的二维平面（即不考虑坐标轴取向的平面），右手 Lamé 方程具有不同的表达形式，左手 Lamé 方程也是如此。对于确定的二维平面例如 **XOZ 平面**，无论是物理还是勘探坐标系，右手和左手 Lamé 方程的有关内容参见本书第 1 章。

然后是波动方程。基于 Lamé 方程，位移波函数的矢量波动方程可以分解为标量位移位满足的纵波波动方程和矢量位移位满足的横波波动方程，而且在二维平面的波动方程均为标量偏微分方程。对于不同的二维平面，纵波波动方程具有不同的表达形式，横波波动方程也如此。但是对于确定的二维平面例如 **XOZ 平面**，无论是物理还是勘探坐标系，右手和左手 Lamé 方程导引出的纵波位移位波动方程具有相同的表达形式，横波也如此。这方面的有关内容参见本书第 1 章。

再后是界面方程。地震波在弹性界面连续的方程即界面方程包含应力和位移两个方程，其中应力连续方程可以（依据应力与应变和应变与位移关系）转化为等价的位移连续方程；因此可以讲界面方程的核心物理量是位移即位移的界面方程。同样基于右手和左手 Lamé 方程可以把位移形式的界面方程转化为右手和左手形式的位移位界面方程，即右手位移位界面方程和左手位移位界面方程。这方面的有关内容参见第 1 章。

最后是位移位的边值定解问题。位移位波动方程和位移位界面方程组合得到的边值定解问题，由于位移位界面方程具有右手和左手两种形式。因此对于确定的二维平面，位移位的边值定解问题也存在右手和左手两种表达形式。二维平面的选择决定二维空间 Lamé 方程的具体表达形式，即决定自变量（x，y，z）的取舍和矢量位移位 ψ（$\vec{\boldsymbol{\psi}}_x$，$\vec{\boldsymbol{\psi}}_y$，$\vec{\boldsymbol{\psi}}_z$）分量的取舍，最终将决定边值定解问题的具体形式。

综上所述，对于确定的二维平面，位移位的边值定解问题存在右手和左手两种表达形式。这两种形式的边值定解问题仅与确定的二维平面有关，而与该二维平面所决定的二维坐标系无关，例如对于确定的 XOZ 平面，无论是 XOZ 平面的物理坐标系还是勘探坐标系，每个坐标系中均有相同的两种形式的边值定解问题。两种边值定解问题的具体表达形式参见第 1 章第 4 节。由于位移位的边值定解问题是基于二维平面而不是二维（直角）坐标系，故这两种形式的边值定解问题均适用于纵轴向上的物理坐标系（参见第 1 章的图 1－5－1）和纵轴向下的勘探坐标系（参见第 1 章的图 1－5－2）。

3.2　位移位波动方程边值定解问题的求解_ Knott 方程

位移位边值定解问题的求解，从数学上讲不存在障碍。这个过程大体是，首先设定满足边值定解问题中波动方程的平面波函数，波函数包含入射、同类反射和透射以及转换反射和透射五个具体波；然后把设定的波函数代入边值定解问题中的界面方程，同时定义反射和透射系数，经整理后得到解函数即对应的 Knott 方程。在二维直角坐标系，弹性界面的 Knott 方程是关于反射和透射系数的 4 阶线性代数方程组，自由界面的 Knott 方程是关于反射系数的 2 阶线性代数方程组。

需要注意二维直角坐标系的选择决定平面波函数法向矢量的具体表示，因而影响边值定解问题求解的结果。

求取边值定解问题可以得到几个有价值的方程。第一个是 Snell 方程，该方程可以从设定的满足波动方程的波函数中直接得到。第二个是同类反射和透射系数以及转换反射和

透射系数的定义方程，这些“系数”概念在地震探测中有重要价值。第三个是 Knott 方程，通过解 Knott 方程（即线性代数方程组）可以得到各种“系数”的具体表达形式。

包含经典 Knott 方程在内，物理坐标系_左手边值定解问题，P 波从四个象限入射弹性界面的四个 Knott 方程，参见第 1 章第 6 节。

Knott 方程的数值计算是 Knott 方程本身的外延内容，通过数值计算可以使人们认识和理解地震波在各种条件的弹性界面上散射的规律，即地震波遇弹性界面时的传播特点。数值计算具有多样性和复杂性，使用者应该根据研究任务设计具体的参数并经计算得到合理正确的结果。

3.3 Knott 方程的多种表达形式和递推规则

在理论和应用中 Knott 方程的多种表达形式是不能回避的一个重要基础问题。Knott 方程的多样性、关联性和一致性是指 Knott 方程“表达形式”的多样性、关联性和一致性。**多样性**表明了 Knott 方程“表达形式”存在差异；**关联性**表明这些方程在一定“规则”下彼此之间可以**相互转换**；**一致性**表明不同表达形式的方程可以统一于表达形式相同的**能量平衡方程。**

从整体上讲 Knott 方程存在多种表达形式有两个层面的因素：第一个层面因素是“位移位边值定解问题”对于确定的二维平面均存在右手和左手两种形式，第二个层面因素是对于选择的二维坐标系均存在入射波分别从四个象限的入射方式。这两个“因素”归纳起来就是对于确定的二维平面存在两种边值定解问题，对于确定的二维坐标系存在四种入射方式。这方面的相关内容可以参见本书的第 2 章至第 4 章。

Knott 方程的递推规则：

（1）规则 1 _左右递推。入射波在同一介质左侧和右侧入射界面时，所得两个 Knott 方程的系数矩阵中，与入射波同类的反射波和透射波系数同相，而与入射波异类的反射波和透射波系数反相（即符号相反）。

（2）规则 2 _上下递推。入射波在界面两侧介质下行和上行入射界面时，所得两个方程中（注意是方程而不仅仅是系数矩阵）的某一个方程包含角度、速度、密度、反射和透射系数等所有参数“角标”中的数字，“1 置换为 2” 而 “2 置换为 1”，就可以得到另一个方程。上行与下行方程的对应关系是：左侧下行对应右侧上行，右侧下行对应左侧上行。

（3）规则 3 _由 1 推 3。观测坐标系（例如，地震勘探坐标系和物理坐标系等）中只要知道了入射波在其中某一个象限入射的 Knott 方程，按照规则 1 和规则 2 就可以导引出其他三种情况的 Knott 方程。这个规则对 P 波和 SV 波均适用，具体内容参见本书第 1 章。

递推规则具有普适性。其一，使用者针对研究问题的需要可以基于左手或右手 Lamé 方程选择不同的二维坐标系以及入射波可能的入射方式，这种选择没有特殊的限制和要求。其二，当这种选择被确定后，运用 Knott 方程的递推规则可以给有关公式推导和问题讨论带来极大的便利。其三，确定选择方式的所得结果即 Knott 方程还可以与其他表达形式的 Knott 方程彼此进行相互转换和类比，使用者不必担心 Knott 方程表达形式的差异会带来错误的结果，因为所有不同表达形式的 Knott 方程都可以统一于表达形式相同的（波在界面上满足的）能量平衡方程。

4 位移位波动方程的边值定解问题_非 Knott 方法

波在界面广义散射的位移位方法中与 Knott 方法并重的另一种方法就是非 Knott 方法。两种方法在求取“解函数”的具体数学解法上略有差异。这方面的具体内容请参见本书第 7 章至第 9 章。

Knott 方程方法设定的满足波动方程的波函数是直接给出弹性界面上所有可能的波函数的具体表达形式，然后把这些具体的波函数代入界面方程，得到矩阵形式的（即 4 阶线性代数方程组）解函数即 Knott 方程，最后求解这个线性代数方程组就可以得到 P 和 SV 波反射及透射系数的具体表达形式。

非 Knott 方程方法采用数学上的分离变量法和待定系数法，设定满足波动方程的波函数，把偏微分方程的边值定解问题转化为常微分的边值定解问题，求取常微分方程的解函数，然后再合成求取偏微分方程的解函数。非 Knott 方程方法是数学上偏微分方程理论在地震学应用的具体表现。

两种方法都是基于相同的位移位波动方程边值定解问题。Knott 方程方法得到的解函数表达形式简洁，形式上直观。非 Knott 方程方法基于特定参数的变化可以引申出许多有价值的如 **Rayleigh 面波、Love 面波等特殊的“解函数”**，非 Knott 方程方法注重数学解析和物理分析的特点和作用，讨论处理问题具有很大的灵活性和针对性，解函数的物理意义更直观。

下面以 P 和 SV 波在自由界面和弹性界面广义散射的情况简述非 Knott 方法，以便对这种方法有个基本的了解和认识。

4.1 波在自由界面的广义散射_非 Knott 方法

参见第 7 章内容，XOZ 平面地震勘探坐标系（参见图 7－1－1，其中 $V_S = V_{SV}$），位移位波动方程的边值定解问题是（6.1.8）式，即

$$\begin{cases} \text{波动方程:}\begin{cases} \ddot{\varphi} = V_P^2 \ \nabla^2 \varphi \\ \ddot{\psi} = V_S^2 \ \nabla^2 \psi \end{cases} \\ \text{边界条件:}\begin{cases} \lambda \ \nabla^2 \varphi + 2\mu(l_z^2 \varphi + l_{xz}^2 \psi) = 0 \\ 2\mu l_{xz}^2 \varphi + \mu(l_x^2 - l_z^2)\psi = 0 \end{cases} \end{cases} \tag{4.1}$$

其中，$l_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$，$l_x^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$，$l_{xz}^2 = l_x l_z = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial z}$，$\nabla^2 = l_x^2 + l_z^2$，其他类同；$\varphi$ 和 ψ 分别是标量位移位和矢量位移位；λ 和 μ 是 Lamé 系数。

位移位满足边值定解问题，（4.1）式中**偏微分波动方程**的波函数运用**分离变量法**可以写作

$$\begin{cases} \varphi(x,z,t) = \Phi(z)\mathbf{exp}[\mathrm{i}k(x - V_X t)] \\ \psi(x,z,t) = \Psi(z)\mathbf{exp}[\mathrm{i}k(x - V_X t)] \end{cases} \tag{4.2}$$

将（4.2）式代入（4.1）式中的波动方程，经化简得到 Φ（z）和 Ψ（z）在自由界面满足的**常微分方程**

$$
\begin{cases}\Phi'' + k^2p_1^2\Phi = 0 \\ \Psi'' + k^2p_2^2\Psi = 0\end{cases} \tag{4.3}
$$

其中参数

$$
p_1 = \sqrt{\frac{V_X^2}{V_P^2} - 1}, p_2 = \sqrt{\frac{V_X^2}{V_S^2} - 1} \tag{4.4}
$$

式中：V_X 是波沿界面传播的视速度；$k = \omega / V_X$ 是波数；V_P 和 V_S 分别为纵波和横波传播的相速度。

常微分方程（4.3）式解的形式与参数 p_1 和 p_2 的取值有关，而 p_1 和 p_2 又与 V_X 有关。因此运用**待定系数法**对常微分方程（4.3）式求解的“**解函数**”，考虑 P 和 SV 波在自由界面广义散射的五种情况。

第一种情况：P 波或 SV 波是正常入射自由界面。这时

$$
V_X > V_P > V_S, \text{参数 } p_1 \text{ 和 } p_2 \text{ 皆为实数} \tag{4.5}
$$

第二种情况：SV 波以临界角入射自由界面。这时

$$
V_X = V_P \text{ 且 } V_P > V_S \text{ 时, 参数 } p_1 = 0 \text{ 和 } p_2 \text{ 为实数} \tag{4.6}
$$

第三种情况：SV 波以大于临界角入射自由界面。这时

$$
V_P > V_X > V_S \text{ 时, 参数 } p_1 \text{ 为虚数而 } p_2 \text{ 为实数} \tag{4.7}
$$

第四种情况：不能存在的一种情况。这时

$$
V_X = V_S, \text{参数 } p_1 = \mathrm{i}v_1 \text{ 即为虚数和 } p_2 = 0 \tag{4.8}
$$

第五种情况：自由界面的 **Rayleigh** 面波。这时

$$
V_P > V_S > V_X, p_1 \text{ 和 } p_2 \text{ 都为虚数} \tag{4.9a}
$$

$$
p_1 = \mathrm{i}\nu_1, \nu_1 = \sqrt{1 - V_X^2/V_P^2} \text{ 和 } p_2 = \mathrm{i}\nu_2, \nu_2 = \sqrt{1 - V_X^2/V_S^2} \tag{4.9b}
$$

然后针对上述五种情况依次求解满足常微分方程（4.3）式的解函数；进而得到位移位波动方程边值定解问题（4.1）式的解函数，该解函数就是 P 和 SV 波在自由界面广义散射的五种具体解函数。

特别注意上述的第五种情况即自由界面的 **Rayleigh** 面波，对于位移位波动方程的同一个边值定解问题，这是非 Knott 方法得到的在地震学中具有特殊意义的解函数；如果运用 Knott 方法，这个特殊的解函数几乎是得不到的。上述五种情况解函数的具体求解过程请参见本书第 7 章，这里不作赘述。

4.2 波在弹性界面的广义散射_非 Knott 方法

参见第 8 章内容，XOZ 平面地震勘探坐标系（参见图 8－1－1），位移位波动方程的边值定解问题是（8.1.1）式，即

$$
\begin{cases}
\text{位移位波动方程:}\begin{cases}\ddot{\varphi}_1 = V_{1P}^2\nabla^2\varphi_1, \ddot{\psi}_1 = V_{1S}^2\nabla^2\psi_1 \\ \ddot{\varphi}_2 = V_{2P}^2\nabla^2\varphi_2, \ddot{\psi}_2 = V_{2S}^2\nabla^2\psi_2\end{cases} \\
\text{界面连续方程:}\begin{cases}[\lambda\nabla^2\varphi + 2\mu(l_z^2\varphi + l_{xz}^2\psi)]_1 = [\lambda\nabla^2\varphi + 2\mu(l_z^2\varphi + l_{xz}^2\psi)]_2 \\ [2\mu l_{xz}^2\varphi + \mu(l_x^2 - l_z^2)\psi]_1 = [2\mu l_{xz}^2\varphi + \mu(l_x^2 - l_z^2)\psi]_2 \\ (l_x\varphi - l_z\psi)_1 = (l_x\varphi - l_z\psi)_2 \\ (l_z\varphi + l_x\psi)_1 = (l_z\varphi + l_x\psi)_2\end{cases}
\end{cases} \tag{4.10}
$$

满足边值定解问题（4.10）式中**偏微分波动方程**的波函数运用**分离变量法**可以写作

$$\begin{bmatrix}\varphi_1(x,z,t)\\ \psi_1(x,z,t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi_1(z)\\ \Psi_1(z)\end{bmatrix}\mathbf{exp}[\mathrm{i}k(x-V_X t)],(z<0) \qquad (4.11a)$$

$$\begin{bmatrix}\varphi_2(x,z,t)\\ \psi_2(x,z,t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi_2(z)\\ \Psi_2(z)\end{bmatrix}\mathbf{exp}[\mathrm{i}k(x-V_X t)],(z>0) \qquad (4.11b)$$

其中，V_X 是波沿界面传播的视速度，$k=\omega/V_X$ 是波数。

将（4.11）式代入（4.10）式中的波动方程，经化简得到 Φ（z）和 Ψ（z）在界面满足的**常微分方程**

$$\begin{cases}\Phi''_1+k^2p_{1P}^2\Phi_1=0\\ \Psi''_1+k^2p_{1S}^2\Psi_1=0\end{cases},(z<0);\begin{cases}\Phi''_2+k^2p_{2P}^2\Phi_2=0\\ \Psi''_2+k^2p_{2S}^2\Psi_2=0\end{cases},(z>0); \qquad (4.12)$$

其中

$$p_{1P}=\sqrt{\frac{V_X^2}{V_{1P}^2}-1},p_{1S}=\sqrt{\frac{V_X^2}{V_{1S}^2}-1},p_{2P}=\sqrt{\frac{V_X^2}{V_{2P}^2}-1},p_{2S}=\sqrt{\frac{V_X^2}{V_{2S}^2}-1}, \qquad (4.13)$$

常微分方程（4.12）式解的形式与参数 p_{1P}、p_{1S}、p_{2P}和 p_{2S}的取值情况有关，而这些参数又与 V_X 有关。因此运用**待定系数法**对常微分方程（4.12）式的“**解函数**”考虑三种即 P 和 SV 波在弹性界面广义散射的三种情况。

第一种情况：P 波和 SV 波正常入射和正常反射，这时

$$V_X>\max(V_{1P},V_{2P}),\text{参数 } p_{1P}、p_{1S}、p_{2P} \text{ 和 } p_{2S} \text{ 都为正实数} \qquad (4.14)$$

第二种情况：SV 波反射全反射时的速度关系是

$$V_{2S}>V_{1P}>V_X>V_{1S} \qquad (4.15)$$

参数 p_{1S}为实数，p_{1P}、p_{2P}和 p_{2S}都为虚数即

$$\begin{cases}p_{1P}=\mathrm{i}\nu_{1P}=\sqrt{\frac{V_X^2}{V_{1P}^2}-1},p_{1S}=\sqrt{\frac{V_X^2}{V_{1S}^2}-1}\\ p_{2P}=\mathrm{i}\nu_{2P}=\sqrt{\frac{V_X^2}{V_{2P}^2}-1},p_{2S}=i\nu_{2S}=\sqrt{\frac{V_X^2}{V_{2S}^2}-1}\end{cases} \qquad (4.16)$$

第三种情况：Stoneley 面波，这时的速度关系

$$V_X<\min(V_{1S},V_{2S}) \qquad (4.17)$$

参数 p_{1P}、p_{1S}、p_{2P}和 p_{2S}都为虚数，即

$$\begin{cases}p_{1P}=\mathrm{i}\nu_{1P}=\sqrt{\frac{V_X^2}{V_{1P}^2}-1},p_{1S}=\mathrm{i}\nu_{1S}=\sqrt{\frac{V_X^2}{V_{1S}^2}-1}\\ p_{2P}=\mathrm{i}\nu_{2P}=\sqrt{\frac{V_X^2}{V_{2P}^2}-1},p_{2S}=\mathrm{i}\nu_{2S}=\sqrt{\frac{V_X^2}{V_{2S}^2}-1}\end{cases} \qquad (4.18)$$

然后针对上述三种情况依次求解满足常微分方程（4.12）式的解函数；进而得到位移位波动方程边值定解问题（4.10）式的解函数，该解函数就是 P 和 SV 波在弹性界面广义散射的三种具体解函数。

注意上述的第三种情况即弹性界面的 **Stoneley** 面波，对于位移位波动方程的同一个边值定解问题，这是非 Knott 方法得到的在地震学中另一个具有特殊意义的解函数；如果运

用 Knott 方法，这个特殊的解函数几乎是得不到的。上述三种情况解函数的具体求解过程请参见本书第 8 章，这里不作赘述。

综上所述，可以清楚地看到非 Knott 方程方法求解波动方程边值定解问题的具体过程，以及这种方法注重数学解析和物理分析的特点和作用。读者可以结合本书的第 7 章至第 9 章对这方面的内容作进一步地认识和理解。另外，SH 横波在自由界面和弹性界面的广义散射本书在第 9 章进行了讨论，其中的自由界面情况运用“位移方法”得到了地震学中具有特殊意义的解函数即 **Love** 面波。现代地震波传播理论表明，运用“位移方法”即位移波动方程边值定解问题的求解，同样可以得到自由界面的 **Rayleigh** 面波和 **Stoneley** 面波。

5　结尾的话

地震学博大精深，需要探索和研究的课题广泛而复杂，从个人能力而言不可能把所有的问题讲清楚，本书中所涉及的（位移位）地震波在界面的广义散射内容仅是最基本的问题。理论和实践的结合以及碰撞过程中存在众多的问题需要研究探索，例如，对于不太成熟的理论需要进一步研究使之完善，对于较为完善的理论需要在转化为技术方法上做细致的探索，大层面的理论还可以针对具体的目标并在解决具体问题中转化为分支理论和技术，面对复杂问题和实践力图提出新的思想和新的理论。下面仅就波在界面广义散射的两个具体问题谈一下个人的粗浅看法。

现有的前人关于地震波在界面广义散射的研究成果同地震学的其他成果一样，仍然需要深入地认识和总结，这是理论应用于实际的需要也是进一步发展的基础。已有的理论转化为应用需要解决许多具体和复杂的细节问题，这种转换总是要延续一段时间甚至相当长的一段时间，例如，Poisson（泊松）和 Lamé（拉梅）关于纵波和横波概念的提出到实际观测的印证经过了半个多世纪，Knott（诺特）和 Zoeppritz（佐普里兹）方程的提出到研制出可处理实际地震资料的商业化软件大致经历了近一个世纪，Biot 饱和孔隙流体双相介质理论的部分成果应用于实际也走过了近半个世纪的历程，各向异性理论的部分成果应用于实际也经过了一段漫长的时间。总之，理论的提出到完善以及理论转换为应用的技术方法都需要人们特别是后来的人们坚持不懈地在探索中向前发展。

地震学发展的另一个重要课题就是去发现和提出新理论新思想。前人不可能把所有的事情都做完，后人也不会无事可做，科学就意味着永无止境，就意味着不懈地去探索。一方面已有的理论可以向复杂的相关问题进行拓展，尽管这种拓展会带来极大的挑战；例如，前人关于波在单一界面广义散射的理论如果考虑多层界面、薄互层的各向异性、黏弹性和孔隙流体等复杂因素将使得问题的研究变得复杂和困难，但是这种研究在理论和应用上仍然是有意义的。另一方面就是在前人成果基础上去发展和发现新理论新思想；例如，人们对前人关于孔隙流体介质理论能够有效地应用于实际一直在作不断地努力，同时也在完善发展前人已有成果基础上，力图对孔隙流体介质提出新的认识和新的思想，特别是波在界面上广义散射与孔隙度的关系即 AVO 或 AVA 不仅与角度有关，而且也与（油气水及水合物等）储层的孔隙度以及孔隙中的流体成分有密切关系，这方面的研究始终是重要的前沿课题。