教育理论与实践——高等数学教育新方法

JIAOYULILUNYUSHIJIANGAODENGSHUXUEJIAOYUXINFANGFA

邹丽红 著

教育理论与实践——

高等数学教育新方法 (下)

JIAOYULILUNYUSHIJIAN GAODENGSHUXUEJIAOYUXINFANGFA

邹丽红 著

黑龙江人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

教育理论与实践——高等数学教育新方法/李叙等著. —哈尔滨：黑龙江人民出版社,2007.9

ISBN 978-7-207-07459-1

Ⅰ.教…　Ⅱ.李…　Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学校—教学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 129040 号

责任编辑：刘丽奇

装帧设计：麦金塔

教育理论与实践——高等数学教育新方法

邹丽红 著

出版发行	黑龙江人民出版社
通讯地址	哈尔滨市南岗区宣庆小区 1 号楼
邮　　编	150008
网　　址	www.longpress.com
电子邮箱	E-mail: hljrmcbs@yeah.net
印　　刷	齐齐哈尔慧达印刷有限公司
经　　销	全国新华书店
开　　本	787×1092　1/16
印　　张	28.625
字　　数	820 千字
版　　次	2007 年 9 月第 1 版　第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-207-07459-1/G·1753
定　　价	60.00 元(上下)

前　言

本书是按教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标的规格》以及三年制高等职业教育工科类专业的特点和实际需要精心编写的。

本书分上、下两册。上册包括函数、极限、一元函数微积分学，下册包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、微分方程。各章配有习题，书末附有习题答案。教学时数为120～140学时左右。

本书总的编写原则是注重实际应用，强化实践能力的培养，突出教学模型的建立及数学工具的使用。本书编排是按照由浅入深、由易到难，由具体到抽象，循序渐进的原则进行的，并做到了结构严谨，逻辑清晰，叙述详细，通俗易懂。本书在知识的处理上，符合学生的认识规律，着重培养学生的数学素养和综合能力，具有可读性，同时兼顾了各省专接本对高等数学考试内容的要求。

本书第一册由李叙主编(三、四、五章)，盛伟副主编(一、二章)。第二册由邹丽红主编(八、九、十章)，齐艳敏副主编(六、七章)。全套书由何永生主审。

齐齐哈尔铁路工程学校数学教研室的全体教师审阅了全书稿，提出了许多宝贵意见，在此我们一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限和时间仓促，书中难免存在一些缺点和错误，敬请广大师生、读者批评指正。

编者

2007年5月

目　录

第六章　空间解析几何

在平面解析几何中，通过坐标法把平面上的点与一对有序数对应起来，把平面上的图形和方程对应起来，从而可以用代数的方法来研究几何问题，空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的。

就像平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是必不可少的一样，空间解析几何的知识对学习多元函数微积分也是必要的。

本章先引进向量的概念，根据向量的线性运算建立空间坐标系，然后利用坐标讨论向量的运算，并介绍空间解析几何的有关内容。

第一节　　向量及其线性运算

一、向量的概念

在物理学中，有这样一些量，如力、位移、速度、加速度等，既有大小又有方向的量，我们称之为向量，或称矢量。

我们通常用有向线段来表示向量。以 A 为起点，以 B 为终点的有向线段所表示的向量，记为 $\overrightarrow{AB}$（图 6—1）。也可以用一个拉丁字母上面加一个箭头或用一个黑体字母表示向量，如向量 $\vec{a},\vec{i},\vec{v},\vec{F}$ 或 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{i},\boldsymbol{v},\boldsymbol{F}$ 等等。

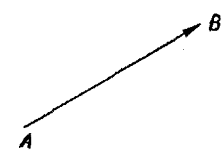

图 6-1

在实际问题中有些向量与起点有关（如质点运动的速度与该质点的位置有关），有些向量与起点无关，它们的共性是大小和方向，像这样的向量只考虑大小和方向，不考虑它的起点，我们称之为自由向量（以后简称为向量，如果没有特殊说明所提到的向量都指这类向量）。

向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小称为该向量的模，记作 $|\boldsymbol{a}|$；模等于 1 的向量称为单位向量，与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记作 $\boldsymbol{a}^0$；模等于 0 的向量称为零向量，记为 $\boldsymbol{0}$，其方向是任意的。

我们规定，两个向量不论起点是否一致，如果其方向相同且模相等，则称它们是相等的。记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。

两个非零向量如果它们的方向相同或相反，就称这两个向量平行。向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$。由于零向量方向是任意的，所以认为零向量与任何向量都平行。

当两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共起点在一条直线上，因此，两个向量平行，又称为共线。

类似有共面的概念。设有 $k(k\geq 3)$ 个向量，当把它们的起点放在同一点时，如果 k 个终点和公共起点在同一平面上，就称为 k 个向量共面。

二、向量的线性运算

1.向量的加法

定义　设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的对角线所表示的向量（图 6—2）称为两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，这就是向量加法的平行四边形法则。

由图 6—2 可以看出，若以向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点作为向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点，则由 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量也是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量。这是向量加法的三角形法则，这个法则可以推广到任意有限个向量相加的情形。

从图 6—2、6—3 可以看出：向量的加法满足交换律和结合律，即

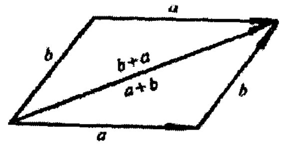

图6-2

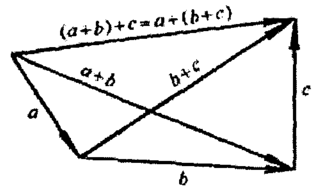

图6-3

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

根据向量加法的三角形法则，若向量$\boldsymbol{b}$加向量$\boldsymbol{c}$等于向量$\boldsymbol{a}$，则称向量$\boldsymbol{c}$为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$之差，记为$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$（图 6—4）。

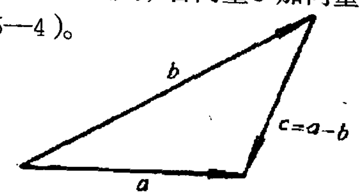

图6-4

2.向量与数的乘法

定义 设$\boldsymbol{a}$是一个非零向量，λ是一个非零实数，则$\boldsymbol{a}$与λ的乘积$\lambda\boldsymbol{a}$仍是一个向量，记作$\lambda\boldsymbol{a}$，且

（1）$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$ ；

（2）$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向$\begin{cases}与\boldsymbol{a}同向，当\lambda>0, \\ 与\boldsymbol{a}反向，当\lambda<0.\end{cases}$

如果$\lambda=0$或$\boldsymbol{a}=0$，规定$\lambda\boldsymbol{a}=0$.

容易验证，数乘向量满足结合律与分配律，即

$$\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\mu\lambda)\boldsymbol{a},$$
$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},$$
$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

其中，λ、μ都是数量。

设$\boldsymbol{a}$是非零向量，由数乘向量的定义可知，向量$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$的模等于 1，且与$\boldsymbol{a}$同方向，所以有

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},$$

因此任一非零向量$\boldsymbol{a}$都可表示为

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0。$$

定理 设向量$\boldsymbol{a}\neq 0$，那么，向量$\boldsymbol{b}$平行于$\boldsymbol{a}$的充分必要条件是：存在唯一的实数λ，使$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$。

证 条件的充分性是显然的，下面证明条件的必要性。

设$\boldsymbol{b} /\!/ \boldsymbol{a}$，取$|\lambda| = \dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$同向时$\lambda$取正值，当$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$反向时$\lambda$取负值，即有$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$。这是因为此时$\boldsymbol{b}$与$\lambda\boldsymbol{a}$同向，且

$$|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}| = \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$$

再证数λ的唯一性。设$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$，又设$\boldsymbol{b} = \mu\boldsymbol{a}$，两式相减，便得$(\lambda - \mu)a = 0$，即$|\lambda - \mu||\boldsymbol{a}| = 0$。因$|\boldsymbol{a}| \neq 0$，故$|\lambda - \mu| = 0$，即$\lambda = \mu$。

定理证毕。

三、空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系的构建

在空间取定一点O和三个两两垂直的单位向量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，就确定了三条都以O为原点的两两垂直的数轴，依次记为x轴（横轴）、y轴（纵轴）、z轴（竖轴），统称坐标轴。它们构成一个空间直角坐标系，称为$Oxyz$坐标系或$[O:\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$坐标系（图 6—5）。通常把$x$轴和$y$轴配置在水平面上，而$z$轴则是铅垂线；它们的正向通常符合右手规则，即以右手握住z轴，当右手的四个手指从正向x轴以$\dfrac{\pi}{2}$角度转向正向y轴时，大拇指的指向就是z轴的正向，如图 6—6

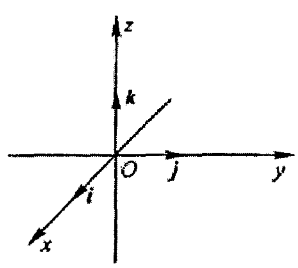

图6-5

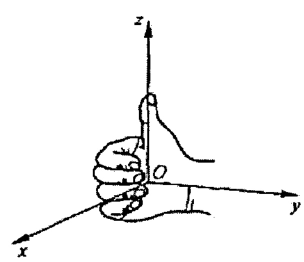

图6-6

2. 坐标轴与坐标平面

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为坐标面。x轴及y轴所确定的坐标面叫做xOy面，另两个由y轴及z轴和由z轴及x轴所确定的坐标面，分别叫做yOz面及zOx面。三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做一个卦限。含有x轴、y轴与z轴正半轴的那个卦限叫做第一卦限，其他第二、第三、第四卦限，在xOy面的上方，按逆时针方向确定。第五至第八卦限，在xOy面的下方，由第一卦限之下的第

五卦限，按逆时针方向确定，这八个卦限分别用字母Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示（图 6—7）

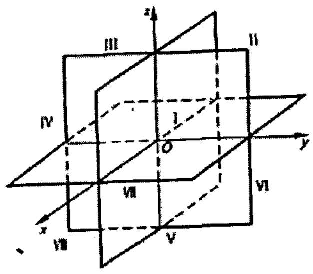

图6-7

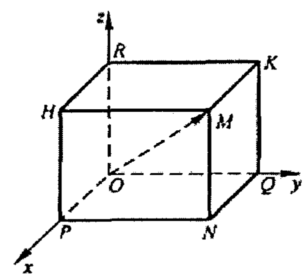

图 6-8

3. 向量的坐标表示

任意向量$\boldsymbol{r}$，对应有点M，使$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$。以$OM$为对角线、三条坐标轴为棱作长方体$RHMK-OPNQ$，如图 6—8 所示，有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

设 $$\overrightarrow{OP}=x\,\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ}=y\,\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR}=z\,\boldsymbol{k}$$

则 $$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\,\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j}+z\,\boldsymbol{k}$$

上式称为向量$\boldsymbol{r}$的坐标分解式，$x\,\boldsymbol{i}$，$y\,\boldsymbol{j}$，$z\,\boldsymbol{k}$称为向量r沿三个坐标轴方向的分向量。

显然，给定向量$\boldsymbol{r}$，就确定了点M及$\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{OR}$三个分向量，进而确定了x,y,z三个有序数；反之，给定三个有序数x,y,z，也就确定了向量$\boldsymbol{r}$与点M。于是点M、向量$\boldsymbol{r}$与三个有序数x,y,z之间有一一对应的关系。

$$M\leftrightarrow\ \boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\,\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j}+z\,\boldsymbol{k}\leftrightarrow(x,y,z)\ ,$$

据此，定义：有序数x,y,z称为向量$\boldsymbol{r}$（在坐标系$Oxyz$中）的坐标，记作$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$；有序数x,y,z也称为点M（在坐标系$Oxyz$中）的坐标，记作$M=(x,y,z)$。

向量$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$称为点$M$关于原点$O$的向径。上述定义表明，一个点与该点的向径有相同的坐标。也就是说，(x,y,z)既表示点M，又表示向量$\overrightarrow{OM}$。

坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征。例如：如果点M在yOz面上，则$x=0$；同样，在zOx面上的点，$y=0$；在xOy面上的点，$z=0$。如果点M在x轴上，

则 $y=z=0$；同样，在 y 轴上的点，有 $z=x=0$；在 z 轴上的点，有 $x=y=0$。如点 M 为原点，则 $x=y=z=0$。

四、利用坐标作向量的线性运算

利用向量的坐标，可得向量的加法、减法以及向量与数的乘法的运算如下：

设 $$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)\quad,\ \boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$$

即 $$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\ ,\ \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$$

利用向量加法的交换律与结合律，以及向量与数乘法的结合律与分配律，有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}$$

$$\lambda\,\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}$$

即 $$a+b=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z),$$

$$a-b=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z),$$

$$\lambda\,\boldsymbol{a}\ =(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

由此可见，对向量进行加、减及与数相乘，只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算就行了。

定理 1 指出，当向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$ 时，向量 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$ 相当于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，坐标表示式为

$$(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z)$$

这也就相当于向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 对应的坐标成比例：

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}\qquad(3)$$

例 1 求解以向量为未知元的线性方程组

$$\begin{cases}5\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a},\\3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b},\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{a}=(2,1,2),\boldsymbol{b}=(-1,1,-2)$

解 如同解以实数为未知元的线性方程组一样，可解得

$$\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b},\boldsymbol{y}=3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$$

以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的坐标表示式代入，即得

$$x = 2(2,1,2) - 3(-1,1,-2) = (7,-1,10),$$

$$y = 3(2,1,2) - 5(-1,1,-2) = (11,-2,16)。$$

例 2 已知两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ 以及实数 $\lambda \neq -1$，在直线 AB 上求点 M，使

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$$

解 由于 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$，

因此 $$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$$

从而 $$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB})$$

以 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 的坐标（即点 A 、点 B 的坐标）代入，即得

$$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\right),$$

这就是点 M 的坐标。

本例中的点 M 叫做有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的 λ 分点。特别地，当 $\lambda = 1$ 时，得线段 AB 的中点为

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)。$$

五、向量的模、方向角

1 . 向量的模与两点间的距离公式

设向量 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，作 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$，如图 7-12 所示，有

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR},$$

按勾股定理可得

$$|\boldsymbol{r}| = |OM| = \sqrt{|OP|^2 + |OQ|^2 + |OR|^2}$$

由 $$\overrightarrow{OP} = x\,\boldsymbol{i}, \quad \overrightarrow{OQ} = y\,\boldsymbol{j}, \quad \overrightarrow{OR} = z\,\boldsymbol{k}$$

有 $$|OP| = |x|, |OQ| = |y|, |OR| = |z|$$

于是得向量模的坐标表示式

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

设有点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和点 $B(x_2, y_2, z_2)$，则点 A 与点 B 间的距离 $|AB|$ 就是向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模。由

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \quad ,$$

即得 A、B 两点间的距离

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例 3 求证以 $M_1(4,3,1)$、$M_2(7,1,2)$、$M_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形。

解 因为

$$|M_1M_2|^2 = (7-4)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2 = 14 \quad ,$$

$$|M_2M_3|^2 = (5-7)^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2 = 6 \quad ,$$

$$|M_3M_1|^2 = (4-5)^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2 = 6 \quad 。$$

所以 $|M_2M_3| = |M_3M_1|$，即△ $M_1M_2M_3$ 为等腰三角形。

例 4 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点。

解 因为所求的点 M 在 z 轴上，所以设该点为 $M(0,0,z)$，依题意有

$$|MA| = |MB| \quad ,$$

即

$$\sqrt{(0+4)^2 + (0-1)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (5-0)^2 + (-2-z)^2}$$

两边去根号，解得 $$z = \frac{14}{9} \quad ,$$

所以，所求的点为 $M(0,0,\frac{14}{9})$。

例 5 已知两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$，求与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量 e。

解 因为

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (7,1,3) - (4,0,5) = (3,1,-2) \quad ,$$

所以 $$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14} \quad ,$$

于是 $$e = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2) \quad 。$$

2. 方向角与方向余弦

先引进两向量的夹角的概念。

设有两个非零向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，任取空间一点O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，规定不超过$\pi$的$\angle AOB$（设$\varphi=\angle AOB, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$）称为向量$a$与$\boldsymbol{b}$的夹角（图 6—9），记作$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$或$<\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}>$，即$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\varphi$。如果向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$中有一个是零向量，规定它们的夹角可以在0与$\pi$之间任意取值。

类似地，可以规定向量与一轴的夹角或空间两轴的夹角，不再赘述。

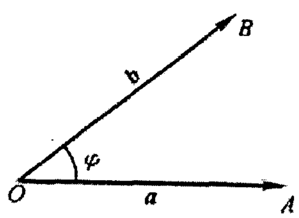

图 6-9

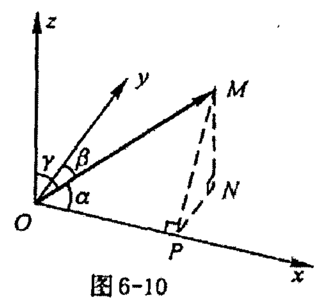

图 6-10

非零向量$\boldsymbol{r}$与三条坐标轴的夹角α、β、γ称为向量$\boldsymbol{r}$的方向角。从图 6—10 可见，设$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，由于x是有向线段$\overrightarrow{OP}$的值，$MP\perp OP$，故

$$\cos\alpha=\frac{x}{|OM|}=\frac{x}{|\vec{r}|}\quad ,$$

类似可知

$$\cos\beta=\frac{y}{|\vec{r}|},\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{r}|}\quad 。$$

从而
$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{x}{|\vec{r}|},\frac{y}{|\vec{r}|},\frac{z}{|\vec{r}|}\right)=\frac{1}{|\vec{r}|}(x,y,z)=\vec{e}_{\vec{r}}\quad 。$$

$$即\boldsymbol{r}=(x,y,z)=|\vec{r}|\vec{e}_{\vec{r}}=|\vec{r}|(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量$\boldsymbol{r}$的方向余弦。上式表明，以向量$\boldsymbol{r}$的方向余弦为坐标的向量就是与$\boldsymbol{r}$同方向的单位向量$\boldsymbol{e}_r$。并由此可得，

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

例 6　已知两点$M_1(2,2,\sqrt{2})$和$M_2(1,3,0)$，计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角。

解 $\overrightarrow{M_1M_2} = (1-2, 3-2, 0-\sqrt{2}) = (-1, 1, -\sqrt{2})$；

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{1+1+2} = \sqrt{4} = 2 \text{；}$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \cos\beta = \frac{1}{2}, \cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{；}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{3\pi}{4} \text{。}$$

例7 设点 A 位于第Ⅰ卦限，向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴、y 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$，且 $\left|\overrightarrow{OA}\right| = 6$，求点 A 的坐标。

解 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}$，由关系式 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$，得

$$\cos^2\gamma = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \text{，}$$

因点 A 在第Ⅰ卦限，知 $\cos\gamma > 0$，故

$$\cos\gamma = \frac{1}{2}$$

于是

$$\overrightarrow{OA} = \left|\overrightarrow{OA}\right|_{\vec{e}_{AB}} = 6\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = (3, 3\sqrt{2}, 3) \text{，}$$

这就是点 A 的坐标。

习　题　6—1

1. 设 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}, \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$。试用 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v}$。

2. 如果平面上一个平行四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形。

3. 已知两点 $M_1(0,1,2), M_2(1,-1,0)$。试用坐标表达式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$。

4. 求平行于向量 $\boldsymbol{a} = (6,7,-6)$ 的单位向量。

5. 在坐标面上和坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置：

   $A(3,4,0), B(0,4,3), C(3,0,0), D(0,-1,0)$

6. 求点 (a,b,c) 关于（1）各坐标面；（2）各坐标轴；（3）坐标原点的对称点的坐标。

7. 自点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标。

8. 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面，问在它们上面的点的坐标各

有什么特点？

9. 一边长为a的立方体放置在xOy面上，其底面的中心在坐标原点，底面的顶点在x轴和y轴上，求它各顶点的坐标。

10. 设已知两点$M_1(4,\sqrt{2},1), M_2(3,0,2)$。计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角。

第二节 数量积 向量积

一、两向量的数量积

设一物体在常力$\boldsymbol{F}$作用下沿直线从点M_1移动到点M_2，以$\boldsymbol{s}$表示位移$\overrightarrow{M_1M_2}$。由物理学知道，力$\boldsymbol{F}$所作的功为

$$\boldsymbol{W}=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中θ为$\boldsymbol{F}$与$\boldsymbol{s}$的夹角（图6—11）。

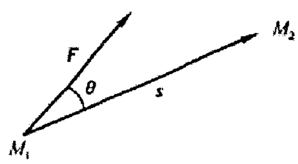

图6-11

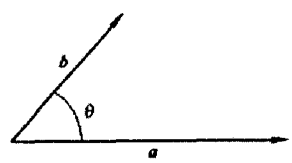

图6-12

1. 定义 从这个问题看出，我们有时要对两个向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$作这样的运算，运算的结果是一个数，它等于$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$及它们的夹角$\theta$的余弦的乘积。我们把它叫做向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的数量积，记作$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$（图6—12），即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

根据这个定义，上述问题中力所作的功W是力$\boldsymbol{F}$与位移$\boldsymbol{s}$的数量积，即

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$$

由于$|\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{b}|\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$，当$\boldsymbol{a}\neq 0$时是向量$\boldsymbol{b}$在向量$\boldsymbol{a}$的方向上的投影，用

$\mathrm{Pr}\,j_a\boldsymbol{b}$来表示这个投影，便有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Pr}\,j_a\boldsymbol{b},$$

同理，当$b\neq 0$时有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Pr}\,j_b\boldsymbol{a}$。

这就是说，两向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在这向量的方向上的投影的乘积。

说明：$\mathrm{Pr}\,j_a\boldsymbol{b}$表示向量$\boldsymbol{b}$在向量$\boldsymbol{a}$上的投影，即$\mathrm{Pr}\,j_a\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$。

2. 由数量积的定义可以推得：

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$

这是因为夹角$\theta=0$，所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2$$

（2）对于两个非零向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，如果$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，那么$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；反之，如果$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，那么$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$。

这是因为如果$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，由于$|\boldsymbol{a}|\neq 0,|\boldsymbol{b}|\neq 0$，所以$\cos\theta=0$，从而$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，即$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；反之，如果$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，那么$\theta=\dfrac{\pi}{2},\cos\theta=0$，于是$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$ 。

由于零向量的方向可以看作是任意的，故可以认为零向量与任何向量都垂直。因此，上述结论可叙述为：向量$a\perp b$的充分必要条件是$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$。

3. 数量积符合下列规律：

（1）交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

因根据定义有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\cos<\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}>,$$

而
$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|,\text{且}\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\cos<\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}>,$$

所以
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$$

（2）分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

因为当$\boldsymbol{c}=0$时，上式显然成立；当$\boldsymbol{c}\neq 0$时，有

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|\operatorname{Pr}j_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

由投影性质 2，可知

$$\operatorname{Pr}j_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\operatorname{Pr}j_c\boldsymbol{a}+\operatorname{Pr}j_c\boldsymbol{b}$$

所以

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{c}|(\operatorname{Pr}j_c\boldsymbol{a}+\operatorname{Pr}j_c\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{c}|\operatorname{Pr}j_c\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{c}|\operatorname{Pr}j_c\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

（3）数量积还符合如下的结合律：

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\text{，}\lambda\text{为常数。}$$

这是因为当$\boldsymbol{b}=0$时，上式显然成立；当$\boldsymbol{b}\neq 0$时，按投影性质 3，可得

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\operatorname{Pr}j_b(\lambda\boldsymbol{a})=|\boldsymbol{b}|\lambda\operatorname{Pr}j_b\boldsymbol{a}=\lambda|\boldsymbol{b}|\operatorname{Pr}j_b\boldsymbol{a}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

由上述结合律，利用交换律，容易推得

$$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\text{及}(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$