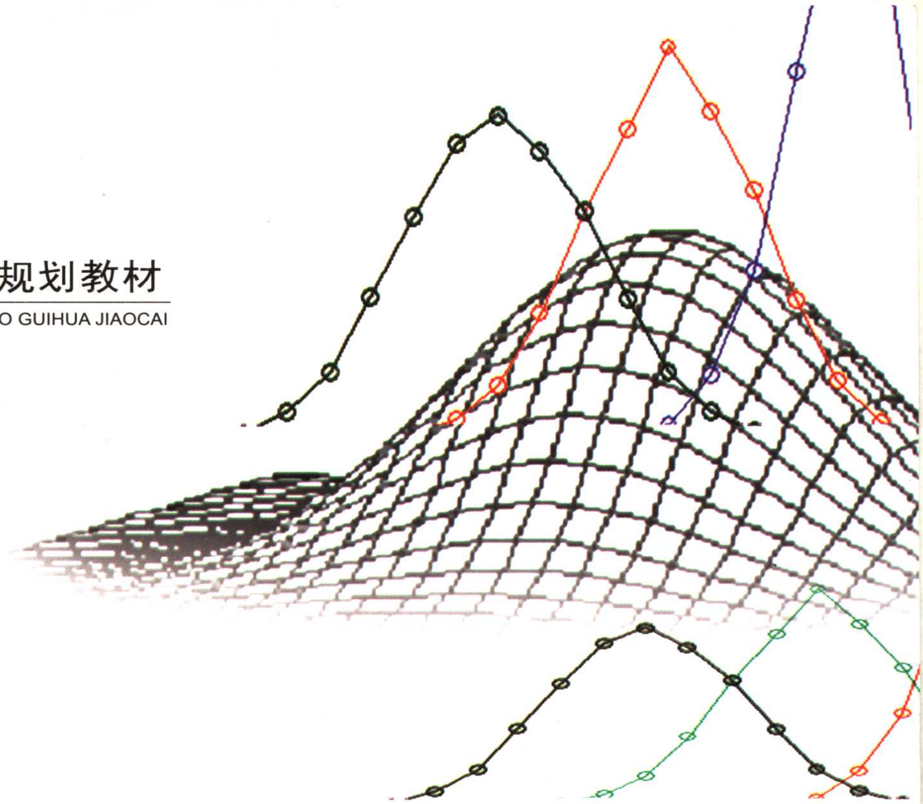
高等学校规划教材
GAODENG XUEXIAO GUIHUA JIAOCAI



郑学高 彭作祥 主编

概率论与数理统计

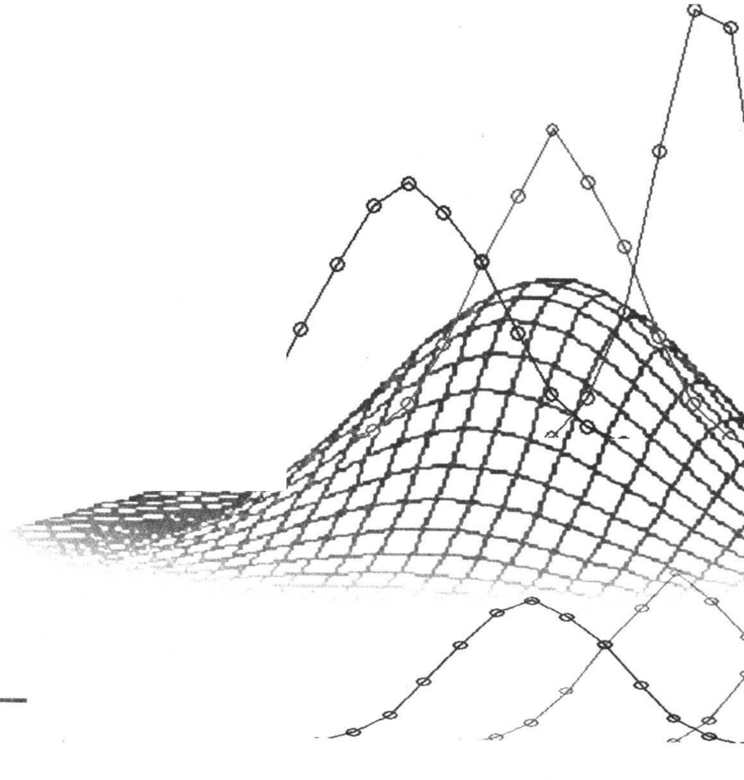
GAI LÜ LUN
YU SHU LI TONG JI

西南师范大学出版社
XINAN SHIFAN DAXUE CHUBANSHE

高等学校规划教材
GAODENG XUEXIAO GUIHUA JIAOCAI

GAI LÜ LUN
YU SHU LI TONG JI

概率论与数理统计



郑学高 彭作祥 主编

西南师范大学出版社
XINAN SHIFAN DAXUE CHUBANSHE

内 容 提 要

本书是根据教育部颁布的高等学校经济管理类《概率论与数理统计》教学大纲而编写的，面向21世纪高等学校经济、管理类本科专业教材.

本书由概率论和数理统计两部分组成，均是经济分析和管理中常用的基础知识和方法，适合各高等学校经济管理专业的《概率论与数理统计》的教学使用.对于准备硕士研究生入学考试者，可以作为"概率论与数理统计"复习参考书，亦可供经济管理工作者、统计工作者和工程技术人员参考使用.本书也可作为高等学校理工农医类等专业的本科教材.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/郑学高，彭作祥主编.—重庆：西南师范大学出版社，2008.2
ISBN 978-7-5621-4028-3

Ⅰ.概…　Ⅱ.①郑…②彭…　Ⅲ.①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第199453号

概率论与数理统计
郑学高　彭作祥　主编

责任编辑：杨光明
整体设计：尚品视觉 周娟　钟琛
出版、发行：西南师范大学出版社
重庆·北碚　邮编：400715
网址：www.xscbs.com
印　　刷：重庆北碚西师教材印刷厂
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：12.5
字　　数：349千字
版　　次：2008年1月第1版
印　　次：2008年1月第1次
书　　号：ISBN 978-7-5621-4028-3

定　　价：20.00元

前言

本书是根据教育部颁布的高等学校经济管理类《概率论与数理统计》教学大纲而编写的，是西南大学2007年优秀立项教材.

基础科学、应用技术和管理，是现代社会赖以生存的三鼎足.概率论与统计学的思想方法，在现代管理和经济领域中得到广泛应用和蓬勃发展，已成为不可缺少的重要工具.应用于管理与经济领域的数学、统计的模型与方法，有确定型和随机型两大类.本书介绍与随机性有关的数学和统计学的概念、原理、思维方法和分析方法.主要着眼于社会、经济管理领域中的应用，因此我们力图用社会、经济、管理方面的例子讲述各种基本概念、基本理论和基本方法，努力说明其丰富的实际背景、特有的思维方式、广泛的应用范围.

本书突出了如下特点：

1. 保持体系完整.强调了数学的工具作用和培养学生逻辑思维能力的作用，既照顾到数学知识的系统性，又注重了统计思想的传授.

2. 各章内容不求多，而求少而精，让学生掌握基本理论和处理数据的方法.

3. 每章每节都以贴近社会生活的生动例子，配以图表，尽量用简明易懂的语言把概念叙述清楚.

全书十章分两部分，前五章是概率论部分，主要讲述概率论的基本概念和基本结论，其中心内容是随机变量及其分布；后五章是数理统计部分，主要讲述数理统计基本概念和常用统计方法，其中心内容是统计推断的内容：统计估计和统计假设检验.

本书由郑学高，彭作祥担任主编.参加编写人员为彭作祥（第二章、第三章），刘传递（第四章、第五章），凌成秀（第六章、第九章），翟莉（第七章、第八章），郑学高（第一章、第十章）.

本书得到了西南师范大学出版社资助，国家级教学名师、中国统计教育学会副会长、西南财经大学庞皓教授担任主审，为本书提出了许多宝贵意见，在此一并表示感谢.

由于编者水平有限，错谬之处在所难免，恳请读者批评指正.

目录

CONTENTS

第 1 章　随机事件与概率

随机现象是概率论与数理统计的研究对象.

在一定条件下,并不总是出现相同结果的现象称为**随机现象**.从此定义可见,随机现象的结果至少要有两个,至于哪一个出现,人们事先并不知道,这些都是随机性的特征.

抛硬币、掷骰子是两个最简单的随机现象,也是概率论早期研究的随机现象.抛一枚硬币,可能出现正面,也可能出现反面,至于哪一面出现,事先并不知道;掷一颗骰子,可能出现 1 点到 6 点中某一个,至于哪一点出现,事先并不知道.随机现象在人们的生活、生产实践与科学研究中处处可见.例如:

(1) 一天内光顾某超市的人数以及光顾该超市且购买商品的人数;

(2) 一位顾客在超市排队等候付款的时间;

(3) 一家储蓄所每天的存款余额;

(4) 上证指数每天的涨跌幅度.

随机现象有大量和个别之分.在相同的条件下可以(至少原则上可以)重复出现的随机现象,称作**大量随机现象**.例如,抛一枚硬币可以无限次重复;不同麦穗上的麦粒数可以大量观察等.带有偶然性但原则上不能在相同条件下重复出现的随机现象,称为**个别随机现象**.例如,一场足球赛的输赢,明年中国经济是增长还是衰退,拿破仑(B. Napoleon) 死于 1821 年 5 月 5 日等都是个别随机现象.大量经济现象都是不能重复的.本书主要研究大量随机现象,但也十分注意研究个别现象,因为后者在国民经济中占有重要地位.

人们经过长期的实践和深入研究,发现这一类现象虽然就每次试验或观察的结果来说,都具有不确定性,但如果将某个试验或观察在相同条件下大量重复地进行,它的结果却呈现出了某种规律性.我们将其称为随机现象的**统计规律性**.

例如,一名优秀的射手,一两次射击不足以反映其真正水平,而多次射击才能反映其真正水平;在分析天平上重复称量同一件物品,各次称量的结果会出现波动,但是多次称量结果的平均水平却稳定在该物品的重量附近.

概率论的任务,就是要透过随机现象的随机性揭示其统计规律性.数理统计的任务就是通过分析带随机性的统计数据,来推断所研究的事物或现象.

概率论和数理统计最初起源于机会游戏,赌徒们在赌博的过程中,时输时赢,他们就很想弄清楚其中究竟有没有什么规律,于是他们就将在赌博中遇到的各类问题拿去请教数学界的

朋友. 当时的数学家对这方面的理论研究进行得很少,甚至完全不感兴趣,而只着眼于对赌徒们提出的每个具体问题进行组合推理. 直到 1933 年 Kolmogorov 给出了概率的公理化定义后,概率论才逐步成为一门独立的数学分支,之后便十分迅速地发展成为了科学家、工程师、医生、法学家和实业家等手中一个有力的数学工具.

现在,概率论和数理统计的应用几乎遍及所有的科学领域、工农业生产和国民经济等各个部门. 例如,气象、水文、地震预报、矿藏勘测、质量管理部门,生产中寻求最佳生产条件的试验设计,通讯中怎样提高产品的抗干扰性和分辨率等. 概率论和数理统计与其他学科相结合产生了许多边缘学科,如生物统计、数学地质、环境数学等. 概率论与数理统计也是一些重要学科,如可靠性理论、控制论、人工智能等的基础理论.

当然,在经济学、管理学等社会科学中,一门重要的学科——计量经济学正日益显示其重要性,而其基础之一就是概率论与数理统计.

前面谈到概率论和数理统计起源于机会游戏,而一些游戏规则简单明了,问题清楚,有趣味性、刺激性,能帮助我们理解概率论与数理统计的基本概念和基本思想,下面我们先看两则游戏:

游戏 1:有 3 张形状完全相同但所涂颜色不同的卡片,第一张两面全红,第二张两面全黑,第三张一红一黑. 现把 3 张卡片混合后,随机取一张,如果取出的卡片朝上的一面是红的,那么它的另一面也是红的机会有多大?

这个问题容易被错误地认为答案是 1/2,理由是已知出现了红的一面,那么就有两种可能的情形:这张卡片的两面都是红的,或者一面红一面黑. 错误之处正是假定上述两种机会是等可能的.

游戏 2:参与者将赌注压在由 $1 \sim 6$ 的某一数上,然后掷 3 颗均匀骰子,约定参与者所压的数在骰子上出现 i 次,$i = 1,2,3$,则参与者赢 i 单位,如所压的数没有出现,则参与者输 1 单位. 问这个规则合理吗?

上述两则游戏的答案可在第一章、第四章解决.

§1.1 随机事件及其运算

1.1.1 随机试验

为了叙述方便,我们把对自然现象、社会现象所进行的观察或一次科学实验,统称为试验. 如果一个试验具有以下 3 个特点:

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,且在试验之前已知试验的所有可能结果;

(3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个,但在一次试验之前却不能肯定这次试验会出现哪一个结果.

我们将具有上述 3 个特点的试验称为**随机试验**,简称**试验**,并记作 E.

本书中以后提到的试验都是指随机试验.

下面列举一些随机试验的例子.

E_1:抛掷一枚硬币,观察正面 H、反面 T 出现的情况;

E_2:从批量棉花种子中取 20 粒,观察发芽的种子数;

E_3:一天内进入某超市的顾客数;

E_4:上证指数某天的涨跌幅度;

E_5:向平面上某目标射击,观察弹着点的位置.

1.1.2 样本空间

认识一个随机现象,首要的是能罗列出它的一切可能发生的基本结果,这里"基本结果"是指随机试验的最简单的结果.我们把试验中可能出现的最简单的结果称作试验的**基本事件**,用希腊字母 ω 表示;把试验的所有基本结果的全体称作**基本空间**,用希腊字母 Ω 表示,记作 $\Omega=\{\omega\}$.在统计学中,基本结果 ω 将是抽样的基本单元,故基本结果又称为**样本点**,基本空间又称为**样本空间**.

若记上述随机试验 E_k 的样本空间为 $\Omega_k(k=1,2,\cdots,5)$,则容易得到:

$\Omega_1=\{H,T\}$,其中 H 表示硬币出现正面,T 表示反面;

$\Omega_2=\{0,1,2,\cdots,20\}$;

$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots\}$;

$\Omega_4=\{x:-10\%\leqslant x\leqslant 10\%\}$;

$\Omega_5=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\}$.

样本空间可以由有限个(至少 2 个)基本结果组成(如上例 Ω_1 和 Ω_2 那样),也可由无限个基本结果组成.对有限的基本空间,要注意其中基本结果的个数,对无限的基本空间,要注意区分其中基本结果是可列个数,还是不可列个数.

由上可知,试验不同,对应的样本空间一般不同,有的相当简单,有的却很复杂.我们建立样本空间,事实上就是建立随机现象的数学模型,一个抽象的样本空间可以概括许多内容不相同的实际问题.例如 Ω_1 是只包含两个样本点的样本空间,但是它既可以作为掷硬币出现正面或反面的模型,也可作为产品检验中产品合格与不合格的模型,还可用于公用事业排队现象中有人排队与无人排队的模型,以及作为气象预报的下雨与不下雨的模型等等.这说明,尽管问题的实际内容不同,但有时却能归结为相同的概率模型,因此,我们常以抛掷硬币、摸球等这样一些既典型又形象且易于理解的例子阐明一些问题,以便使问题阐述得更明确,且使问题的本质更为突出.

1.1.3 随机事件

在进行随机试验时,人们常常对满足某种条件的那些基本结果所组成的集合感兴趣.

随机现象的某些基本结果组成的集合称为**随机事件**,简称**事件**,常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.如掷一颗骰子,若用 ω_i 表示出现 i 点($i=1,\cdots,6$),"出现奇数点"是一个事件,它是由 1 点、3 点、5 点等三个基本结果组成,记这个事件为 A,则 $A=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}=\{1,3,5\}$.

从这个定义可见,事件有如下几个特征:

(1) 任一事件是相应样本空间 Ω 中的一个子集.

(2) 事件发生当且仅当 A 中某一基本结果发生，或者说，当 $\omega_1(\in A)$ 发生，则说事件 A 发生；当 $\omega_2(\notin A)$ 发生，则说事件 A 不(没)发生.

(3) 事件的表示可用集合，也可用语言，但所用语言要使大家明白无误.

特别地，由一个样本点组成的单点集合，称为**基本事件**. 即试验中出现的最简单的结果. 例如，试验 E_1 有两个基本事件 $\{H\}$ 和 $\{T\}$，试验 E_2 有 21 个基本事件 $\{0\},\{1\},\cdots,\{20\}$.

为了研究方便，把随机试验中必然会出现的结果称为**必然事件**，记作 Ω；不可能出现的结果称为**不可能事件**，用 $\varnothing$ 表示. 例如，掷一枚均匀骰子的试验中，“点数不大于 6”是一个必然事件，因为它含有样本空间 $\Omega=\{1,2,3,\cdots,6\}$ 中一切可能的基本结果，任何一个基本结果的出现必导致 Ω 发生. 由此可见，必然事件是肯定要发生的事件. “点数大于 6”是不可能事件.

上述用 Ω 表示必然事件，$\varnothing$ 表示不可能事件的原因在于：Ω 是所有基本结果组成，而在任意一次试验中，肯定要出现 Ω 中的某一基本结果，也就是说 Ω 在试验中必然会发生，故 Ω 为必然事件，因而我们就用 Ω 来表示必然事件，相应空集 $\varnothing$ 可以看做是 Ω 的子集，在任意一次试验中，不可能有元素 $w\in\varnothing$，也就是说 $\varnothing$ 永远不可能发生，因此用空集符号 $\varnothing$ 来表示不可能事件.

1.1.4 事件间的关系和运算

事件是一个集合，因此事件间的关系和运算就可引进类似于集合之间的关系和运算，并且有与集合的关系和运算完全类似的性质. 事件的关系主要有：包含、相等、不相容；事件的运算主要有：和(并)、差、积(交)、逆(补).

设 $A,B,C,A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 为同一试验中的事件，Ω 为试验的样本空间.

1. 事件的关系

(1) **包含关系**　如果每当事件 A 出现时事件 B 也一定出现(但是反之未必)，称“事件 B 包含事件 A”，亦称 A 为 B 的**子事件**，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，可用图 1-1 直观表示.

显然，对于任一事件 A，必有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

(2) **相等事件**　如果在每次试验中事件 A 和 B 要么都出现，要么都不出现，称“事件 A 等于事件 B”或“事件 A 与 B 等价”，记作 $A=B$. 显然，$A=B$ 当且仅当 $A\subset B$ 且 $A\supset B$. 如掷两颗均匀骰子，$A=$“其和为奇数”，$B=$“奇偶性不同”，那么 $A=B$.

注意，$A=B$ 并不意味着 A 与 B 是同一个事件. 例如，甲、乙两个足球队进行比赛，开赛前首先掷一枚硬币，事件 $A=\{$出现正面$\}$ 与 $B=\{$甲队先发球$\}$，这时虽然 $A=B$，然而 A 与 B 却是两个不同的事件.

(3) **不相容事件**　如果在任何一次试验中事件 A 和 B 都不可能同时出现，称“事件 A 和 B 为**互不相容事件**”，否则称“A 和 B 为**相容事件**”. 如在投资股票时，“赚钱”和“亏本”是两个互不相容事件. 如图 1-2，类似地，可定义有限个或可列个事件的两两互不相容性.

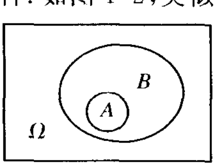


图 1-1

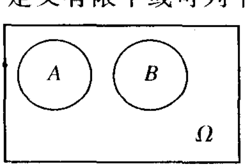


图 1-2

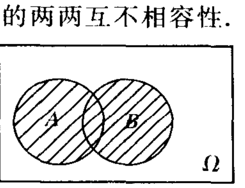


图 1-3

2. 事件的运算

(1) **和(并)**

由事件 A 与 B 中所有基本结果(相同的只计入一次)组成的一个新事件,称作事件 A 与 B 的**和或并**,记作 $A \cup B$ 或 $A+B$,它的几何表示如图 1-3. 从图上可见,和事件 $A \cup B$ 发生意味着"事件 A 与 B 中至少一个发生".

类似地,可定义有限或可数个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和,记作

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

(2) **积(交)**

由事件 A 与 B 中公共的基本结果组成的一个新事件,称作事件 A 和 B 的**积或交**,记作 $A \cap B$ 或 AB. 可见,若 AB 发生,则 A 与 B 必同时发生,反之亦然. 它的几何表示如图 1-4.

类似地,可定义有限或可数个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积,记作

$$A_1 A_2 \cdots A_n \cdots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

(3) **差**

由在事件 A 中而不在事件 B 中的基本结果组成的一个新事件,称作 A 与 B 的**差**,记作 $A-B$. 可见,差事件 $A-B$ 表示 A 出现且事件 B 不出现这样一随机事件,如图 1-5.

(4) **逆(补)**

由在 Ω 中而不在 A 中的一切基本结果组成的事件称为 A 的**对立事件或逆事件**,记作 $\overline{A}$,即 $\overline{A} = \Omega - A$,如图 1-6 所示. 显然满足

$$A + \overline{A} = \Omega, A\overline{A} = \varnothing, \overline{\overline{A}} = A.$$

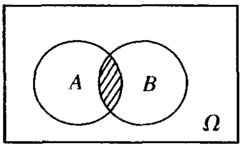


图 1-4

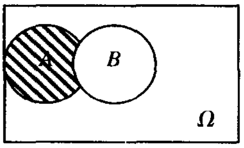


图 1-5

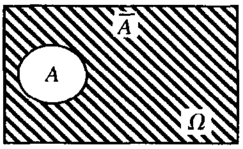


图 1-6

由定义可知,若 A 与 B 互为对立事件就是指 A, B 不能同时发生,但在每次试验中必须发生其一且只能发生一个. 注意,两个相互对立的事件一定是不相容事件,但是两个不相容事件一般未必互为对立事件.

例如,设 X 为 10 次射击的命中次数,且命中不少于 6 次为及格,否则为不及格. 考虑事件 $A=\{X \geqslant 6\}$, $B=\{X<6\}$, $C=\{X \geqslant 7\}$, $D_1=\{$及格$\}$, $D_2=\{$不及格$\}$,则事件 A 与 B 以及 D_1 与 D_2 两两互为对立事件,且 $A=D_1$, $B=D_2$; A 与 C 是相容事件,而且 $A \supset C$; B 与 C 是不相容事件,但不是对立事件.

可以验证事件的运算满足下列关系式:

① **交换律**: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

② **结合律**: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

③ **分配律**: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

(5) **德·摩根**(De Morgan) **律**:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{1.1.1}$$

例 1.1.1　某建筑公司在3个地区承建一个项目，定义如下3个事件：

E_i =“地区 i 的项目可按合同期完成”，$i = 1,2,3$，试用 E_1,E_2,E_3 表示下列事件：

A =“至少一个项目可按期完成”；

B =“所有项目都可按期完成”；

C =“没有一个项目可按期完成”；

D =“仅仅地区1的项目可按期完成”；

E =“三个项目中只有一项可按期完成”；

F =“或者仅地区1的项目按期完成或者另两个项目同时按期完成”.

解：$A = E_1 \cup E_2 \cup E_3$；$B = E_1E_2E_3$；$C = \overline{A}$；$D = E_1\overline{E}_2\overline{E}_3$；

$E = E_1\overline{E}_2\overline{E}_3 \cup \overline{E}_1E_2\overline{E}_3 \cup \overline{E}_1\overline{E}_2E_3$；$F = E_1\overline{E}_2\overline{E}_3 \cup \overline{E}_1E_2E_3$.

例 1.1.2　从某班学生中选取一名学生，A 表示选到的是男生，B 表示选到的是田径队员，说明下列关系式所表示的意义：

(1)$A \cap B = A$；(2)$A \cup B = A$.

解：(1) 由集合间的关系可知，要使 $A \cap B = A$，只需 $B \supset A$，这就是：如果事件 A 发生，事件 B 就发生，所以，此式的意义是：该班的男生都是田径队员.

(2) 由集合关系可知，要使 $A \cup B = A$，只需 $B \subset A$，即只要事件 B 发生，事件 A 就发生．所以此式的意义是：该班学生中的田径队员都是男生.

§1.2　事件的概率

1.2.1　概率的定义

除必然事件和不可能事件这两种极端情况外，随机事件的发生是带有偶然性的．但随机事件发生的可能性有大小的差异，是可以设法进行度量的．而在现实生活、生产和经济活动中，人们最关心的就是随机事件发生的可能性大小．如：

(1) 抛一枚硬币，出现正面与出现反面的可能性是相同的，各为1/2．足球裁判就是用抛硬币的方法让双方队长选择比赛场地，以示公平及机会均等.

(2) 某医药股份有限公司开发了一种新止痛片，该新药的市场占有率是公司最为关注的．如果市场占有率高，该公司就可以大批量生产获得更多利润；市场占有率低，就不能多生产，否则会造成积压.

(3) 网上申购某股份有限公司股票的中签机会有多少呢？如2006年12月26日中国人寿保险股份有限公司首次发行股票(IPO)，网上认购资金高达8325亿元，中签率为1.97%.

(4) 中国足球队进入世界杯决赛的可能性有多大？

(5) 电视台制作的某类节目开播后，他们很关心此节目的收视率是多少，如果收视率高，在此节目前后或当中播出广告的费用就高.

上述硬币正反面出现的几率、市场占有率、中签率、进入世界决赛的可能性、收视率等都是用来度量随机事件发生的可能性大小的．尽管其语言描述不同，但其共同点是用 $0 \sim 1$ 间的

一个数(也称为比率)来表示一个随机事件发生的可能性大小.在概率论中,这种比率就是概率的原型.为使概率具有理论上的普遍性和严密性,1933 年苏联数学家柯尔莫哥罗夫(Kolmogorov,1903～1987)提出了概率的公理化定义,为概率论具有严谨的逻辑推理打下了坚实的基础.

概率的公理化定义 在一个随机现象中,用来表示任一事件 A 发生可能性大小的实数(即比率)称为该事件发生的**概率**,记为 $P(A)$,并满足如下要求:

(1) **非负性公理** $P(A) \geqslant 0$.

(2) **正则性公理** $P(\Omega) = 1$.

(3) **可加性公理** 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是两两互不相容事件,则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots \tag{1.2.1}$$

在概率公理化定义中,称$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为**概率空间**.其中 $\mathscr{F} = \{A: A \subset \Omega, A \text{ 是事件}\}$ 为**事件域**.由此,给出一个具体的随机试验,数学上就可以把它抽象成一个概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

由概率的定义,可以得到概率的一些重要性质.

性质 1 $P(\varnothing) = 0$.

证明:因为 $\Omega = \Omega \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots$,由概率的可加性公理得 $P(\Omega) = P(\Omega) + P(\varnothing) + \cdots$,又 $P(\varnothing)$ 为非负实数,故 $P(\varnothing) = 0$.

性质 2 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为两两互不相容的事件,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1.2.2}$$

我们称此性质为概率的**有限可加性**.

证明:由于 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \varnothing, \cdots$ 两两互不相容,由可加性有

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= P(A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup \varnothing \cup \cdots) \\ &= P(A_1) + \cdots + P(A_n) + P(\varnothing) + \cdots \\ &= P(A_1) + \cdots + P(A_n). \end{aligned}$$

性质 3 设 A, B 是两事件,若 $A \subset B$,则有

$$\begin{gathered} P(B - A) = P(B) - P(A), \\ P(A) \leqslant P(B). \end{gathered} \tag{1.2.3}$$

证明:因当 $A \subset B$ 时,有 $B = A \cup (B - A)$ 且 $A(B - A) = \varnothing$,由性质 2 得

$$P(B) = P(A) + P(B - A),$$

即

$$P(B - A) = P(B) - P(A).$$

又由概率的非负性 $P(B - A) \geqslant 0$ 可知

$$P(A) \leqslant P(B).$$

一般地,对任意两个事件 A, B,有

$$P(B - A) = P(B) - P(AB).$$

性质 4 对于任一事件 A,有

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{1.2.4}$$

证明:因 $A \cup \overline{A} = \Omega$,且 $A\overline{A} = \varnothing$,则有

$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}),$$

于是有

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

性质 5　对任意两事件 A,B 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{1.2.5}$$

证明:因 $A \cup B = A \cup (B - AB)$,且 $A(B - AB) = \varnothing$,$AB \subset B$,故

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B - AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB). \end{aligned}$$

此性质不难推广到任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,有

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n).$$

例 1.2.1　设事件 $A,B,A \cup B$ 的概率分别为 p,q,r,求 $P(AB)$,$P(A\overline{B})$,$P(\overline{A}B)$,$P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解:(1) 因为 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$,所以 $P(AB) = p + q - r$.

(2) 因为 $A\overline{B} = A - AB$,且 $AB \subset A$,故 $P(A\overline{B}) = p - (p + q - r) = r - q$.

(3) 与(2) 同理,可求出 $P(\overline{A}B) = r - p$.

(4) 因$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$,所以 $P(\overline{A}\,\overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - r$.

例 1.2.2　某人投资了两只股票,据专家预测,在未来一段时间内,第一只股票赢利的概率为 1/3,第二只股票赢利的概率为 2/3,两只股票都赢利的概率为 1/5,问此人投资的股票中至少有一只赢利的概率是多少?

解:设 A_i 表示第 i 只股票赢利,$i = 1,2$,则

$$P(A_1) = 1/3, P(A_2) = 2/3, P(A_1A_2) = 1/5.$$

由于两只股票中至少有一只赢利,可表示为 $A_1 \cup A_2$,故由公式可得

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = 1/3 + 2/3 - 1/5 = 4/5.$$

这表明,此人投资的股票中至少有一只赢利的概率为 0.8.

概率的公理化定义虽然刻画了概率的本质,但没有告诉人们如何去确定概率. 在概率的发展史上有多种确定概率的方法,以下将逐一叙述这些方法.

1.2.2　古典方法

概率的古典方法起源于17世纪欧洲盛行的抛硬币、掷骰子、摸球等赌博游戏,这种方法简单、直观、不需要做试验且容易理解;另一方面,它又概括了许多实际问题,有很广泛的应用. 但只能在一类特定的随机现象中使用,这类随机现象的特点与确定概率方法的要点如下:

(1) 只有有限个样本点,不妨设为 n 个样本点(简称有限性).

(2)n 个样本点出现的可能性相同(简称等可能性).

(3) 假如被考察的事件 A 含有 k 个样本点,则 A 的概率定义为

$$P(A) = \frac{A\text{ 中含样本点的个数}}{\Omega\text{ 中样本点总数}}\left(\text{或}\frac{A\text{ 中含基本事件的个数}}{\Omega\text{ 中基本事件总数}}\right) = \frac{k}{n}. \tag{1.2.6}$$

这种确定概率的方法曾是概率论发展初期的主要方法,故所得概率又称为**古典概率**. 可以验证它满足概率定义中的三条公理.

例 1.2.3　设有编号为 1,2,…,40 的 40 张考签,一学生任意抽一张进行考试,求学生"抽到前 10 号考签"这一事件的概率.

解:令 A 表示事件“学生抽到前10号考签”.显然学生抽到任一考签的可能性是一样的,这为一古典概率问题,基本事件总数 $n=40$,A 中的基本事件数 $k=10$,故所求概率为

$$P(A)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}.$$

例 1.2.4 设有 n 个人,每个人都等可能地被分配到 N 个房间的任意一间去住($n\leqslant N$),求下列事件的概率.

(1) 指定的 n 个房间各有 1 人住;

(2) 恰好有 n 个房间,其中各住 1 个人.

解:因为每一个人有 N 个房间可供选择,所以 n 个人住的方式共有 N^n 种,它们是等可能的.

(1) 指定的 n 个房间各有 1 人住,其可能总数为 n 个人的全排列 $n!$,于是

$$P_1=\frac{n!}{N^n}.$$

(2) n 个房间可以在 N 个房间中任意选取,其选法总数有 C_N^n 种,对每一选定的 n 个房间,按(1) 的讨论可知又有 $n!$种分配方式,所以恰有 n 个房间,其中各住一人的住法数为 $C_N^n\cdot n!$,故所求概率为

$$P_2=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}.$$

这个例子常称为“分房问题”.

例 1.2.5 中国福利彩票 2001 第 053 期开出“36 选 7”的中奖号码为 03,04,06,08,18,22,31,特别号码为28.投注人在01至36的36个号码中任选7个无重复的号码,如果投注人选定的 7 个号码不论次序.① 都是中奖号码便获得一等奖;② 其中有 6 个是中奖号码、1 个是特别号码便获得二等奖;③ 其中有 6 个是中奖号码,另外 1 个不是特别号码便获得三等奖;④ 其中有 5 个是中奖号码,1 个是特别号码便获四等奖;⑤ 其中有 5 个是中奖号码,另外 2 个不是特别号码,或者其中有 4 个是中奖号码,1 个是特别号码便获五等奖;⑥ 其中有 4 个是中奖号码,另外 3 个不是特别号码,或者其中 3 个是中奖号码,1 个是特别号码便获六等奖;⑦ 其中有 3 个是中奖号码,另外 4 个不是特别号码便获七等奖.试分别计算投注买一张彩票中上述一等奖至七等奖的概率.

解:设 $A_i=\{$中上述 i 等奖$\}(i=1,2,\cdots,7)$,则计算的结果是

$$P(A_1)=\frac{1}{C_{36}^7}\approx 1.20\times 10^{-7};\quad P(A_2)=\frac{C_7^6}{C_{36}^7}\approx 8.39\times 10^{-7};$$

$$P(A_3)=\frac{C_7^6\times C_{28}^1}{C_{36}^7}\approx 2.35\times 10^{-5};\quad P(A_4)=\frac{C_7^5\times C_{28}^1}{C_{36}^7}\approx 7.04\times 10^{-5};$$

$$P(A_5)=\frac{C_7^5\times C_{28}^2+C_7^4\times C_{28}^2}{C_{36}^1}\approx 2.54\times 10^{-3};$$

$$P(A_6)=\frac{C_7^4\times C_{28}^3+C_7^3\times C_{28}^2}{C_{36}^7}\approx 2.75\times 10^{-2};$$

$$P(A_7)=\frac{C_7^3\times C_{28}^4}{C_{36}^7}\approx 8.58\times 10^{-2}.$$

例 1.2.6 从数字 1,2,…,9 中(可重复)任取 n 次,每次取一个数,求 n 次所取数字的乘积能被 10 整除的概率.

解:乘积要能被 10 整除必须既取到数字 5(事件 A),又取到偶数(事件 B).欲求之概率为

$P(AB)$，考察一下就能发现，不取到5的概率$P(\overline{A})$，不取到偶数的概率$P(\overline{B})$，5及偶数都取不到的概率$P(\overline{A}\cdot\overline{B})$是容易求得的：

$$P(\overline{A})=(\frac{8}{9})^n,P(\overline{B})=(\frac{5}{9})^n,P(\overline{A}\,\overline{B})=(\frac{4}{9})^n.$$

因此，利用对立事件和加法公式，有

$$\begin{aligned}P(AB)&=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})\\&=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\,\overline{B})\\&=1-\frac{8^n+5^n-4^n}{9^n}.\end{aligned}$$

例 1.2.7　从一副扑克牌（52 张）中任选 13 张牌，试求下列事件的概率.

（1）A—— 恰有 2 张红桃，3 张方块；

（2）B—— 至少有 2 张红桃；

（3）C—— 缺红桃但不缺方块.

解：（1）$P(A)=C_{13}^2C_{13}^3C_{26}^8/C_{52}^{13}$.

（2）为计算$P(B)$，我们记$B_k=$“恰有k张红桃”，$k=0,1,2,\cdots,13$，则$B=B_2\cup B_3\cup\cdots\cup B_{13}$，且$B_iB_j=\varnothing(i\neq j)$，于是

$$P(B)=\sum_{k=2}^{13}P(B_k)=(\sum_{k=2}^{13}C_{13}^kC_{39}^{13-k})/C_{52}^{13}.$$

但是，若利用$\overline{B}=B_0\cup B_1$及

$$P(\overline{B})=\frac{C_{39}^{13}+C_{13}^1C_{30}^{12}}{C_{52}^{13}},$$

即得

$$P(B)=1-\frac{C_{39}^{13}+C_{13}^1C_{39}^{12}}{C_{52}^{13}}$$

就方便得多.

$$\begin{aligned}(2)P(C)&=P(\text{缺红桃})-P(\text{既缺方块又缺红桃})\\&=\frac{C_{39}^{13}}{C_{52}^{13}}-\frac{C_{26}^{13}}{C_{52}^{13}}.\end{aligned}$$

1.2.3　统计方法

统计方法是在大量重复试验中用频率去获得概率近似值的一种方法，它是最常用，也是最基本的获得概率的方法. 其基本思想如下：

（1）与考察事件A有关的随机现象是允许大量重复试验的.

（2）若在n次重复试验中，事件A发生k_n次，则事件A发生的频率为

$$f_n(A)=\frac{\text{事件}A\text{发生的次数}}{\text{重复试验次数}}=\frac{k_n}{n}.\tag{1.2.7}$$

显然由频率定义可知，其有如下性质：

① **非负性**：$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

② **正则性**：$f_n(\Omega)=1$；

③ **有限可加性**：若A,B互不相容，则

$$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B).$$

(3) 频率 $f_n(A)$ 依赖于重复次数 n. 不同的 n，事件 A 的频率一般会不同，但人们的长期实践表明，随着重复次数 n 的增加，频率 $f_n(A)$ 会稳定在某一常数附近（见例子），这就是频率的稳定性，即通常所说的随机现象的统计规律性，这个频率的稳定值已与 n 无关，它就是事件 A 发生的概率 $P(A)$.

如下例子充分说明了频率的稳定性.

表 1-1　1950 ～ 2000 年间我国人口的统计资料（年底数；不含台湾省人口资料）　单位：万人

年份		1950	1960	1970	1980	1990	2000
总数	全部	55 196	66 207	82 992	98 705	114 333	126 743
	男	28 669	34 283	42 686	50 785	58 904	65 672
	女	26 527	31 924	40 306	47 920	55 429	61 036
比例	男	0.519 4	0.517 8	0.514 3	0.514 5	0.515 2	0.516 3
	女	0.480 6	0.482 2	0.485 7	0.485 5	0.484 8	0.483 7

例 1.2.8　表 1-1 是我国大陆 1950 ～ 2000 年人口的统计资料. 国家统计局公布的每年年底的人口数是根据抽样调查的结果推算的. 表 1-1 的数据表明，我国历年男性人口的比例稳定在 51.5% 附近，女性人口的比例稳定在 48.5% 附近. 我国大陆 2000 年全国人口普查的结果：总人口 126 583 万，男 65 355 万，女 61 228 万，男和女的比例相应为 51.63% 和 48.37%. 上述统计资料表明我国男性人口和女性人口的比例是稳定的.

世界其他国家或地区的人口及新生婴儿的性别也有完全相似情况. 例如，瑞典 1871 ～ 1900 年 30 年间共记录了 2 644 757 个新生婴儿，其中男婴 1 359 671 个和女婴 1 285 086 个，比例各为 51.41% 和48.59%；瑞典 1935 年共出生婴儿 88 273 个，其中男婴 45 682 名和女婴 42 591 名，比例相应为 51.75% 和 48.25%. 与我国的统计资料也十分相近.

例 1.2.9　为验证频率的稳定性，许多统计学家做过掷硬币试验，表 1-2 列出了几个掷硬币的结果.

表 1-2　掷硬币试验

试验者	投掷次数	正面出现的次数	正面出现的频率
布丰	4 040	2 048	0.5080
皮尔逊	12 000	6 019	0.5016
皮尔逊	24 000	12 012	0.5005
罗曼诺夫斯基	80 640	40 941	0.5077

由表 1-2 的结果可见多次重复掷硬币，正面出现的频率都十分接近，即同样证明了频率的稳定性.

1.2.4　主观方法

在现实世界里有些随机现象是不能重复或不能大量重复的. 例如，恒生指数在未来一周内上升的可能性有多大？又如，投资贵州茅台股票在未来一年的收益率超过 50% 的机会是多少？像这种不能重复进行的随机现象（许多经济现象都是不能重复的）怎样确定其概率呢？