全国高等教育自学考试指定教材 公共课程

高等数学（工专）

附：高等数学（工专）自学考试大纲

课程代码 0022

［2006年版］

组编/全国高等教育自学考试指导委员会

主编/吴纪桃 漆毅

本教材附赠网络学习卡

北京大学出版社

全国高等教育自学考试指定教材

公共课程

高等数学（工专）

（附：高等数学（工专）自学考试大纲）

（2006年版）

全国高等教育自学考试指导委员会 组编

主编 吴纪桃 漆 毅

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(工专)/吴纪桃,漆毅主编.—北京:北京大学出版社,2006.8
ISBN 7-301-10708-0

Ⅰ.高…　Ⅱ.①吴…②漆…　Ⅲ.高等数学-高等教育-自学考试-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第047185号

书　　名:高等数学(工专)
著作责任者:吴纪桃　漆　毅　主编
责任编辑:刘　勇
标准书号:ISBN 7-301-10708-0/O·0695
出　　版:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区成府路205号　100871
印　刷　者:北京飞达印刷有限责任公司
787mm×1092mm　16开本　21.75印张　526千字
2006年8月第1版　2006年10月第3次印刷
定　　价:32.50元

组编前言

21世纪是一个变幻莫测的世纪，是一个催人奋进的时代，科学技术飞速发展，知识更替日新月异. 希望、困惑、机遇、挑战，随时随地都有可能出现在每一个社会成员的生活之中. 抓住机遇、寻求发展、迎接挑战、适应变化的制胜法宝就是学习——依靠自己学习、终生学习.

作为我国高等教育组成部分的自学考试，其职责就是在高等教育这个水平上倡导自学、鼓励自学、帮助自学、推动自学，为每一位自学者铺就成才之路. 组织编写供读者学习的教材就是履行这个职责的重要环节. 毫无疑问，这种教材应当适合自学，应当有利于学习者掌握、了解新知识、新信息，有利于学习者增强创新意识，培养实践能力，形成自学能力，也有利于学习者学以致用，解决实际工作中所遇到的问题. 具有如此特点的书，我们虽然沿用了"教材"这个概念，但它与那种仅供教师讲、学生听，教师不讲、学生不懂，以"教"为中心的教科书相比，已经在内容安排、编写体例、行文风格等方面都大不相同了. 希望读者对此有所了解，以便从一开始就树立起依靠自己学习的坚定信念，不断探索适合自己的学习方法，充分利用已有的知识基础和实际工作经验，最大限度地发挥自己的潜能，以达到学习的目标.

欢迎读者提出意见和建议.

祝每一位读者自学成功！

全国高等教育自学考试指导委员会

2006年1月

内容简介

本书是根据全国高等教育自学考试指导委员会2006年最新修订的专科段《高等数学(工专)自学考试大纲》编写的,教材内容及其深广度与大纲完全一致。

全书共分六章,内容包括:函数及其图形,极限和连续,一元函数的导数和微分,微分中值定理和导数的应用,一元函数积分学,线性代数初步。

本书针对参加自学考试的学生缺少教师系统授课指导、主要靠自学的特点,根据自考学生的接受能力和理解程度精心选择教材内容。本书按照认知规律,以几何直观、物理背景和典型引例作为引入数学基本概念的切入点,注意揭示概念的本质涵义和概念之间的内在联系;对重要定理、难点内容阐述详细,说理透彻,从不同侧面进行剖析;图文并茂,富有启发性;典型例题分析给读者一个获得解题充分训练的平台,并对初学者遇到的疑难与困惑及易犯的错误给出点评,以提高自考学生的应试水平。每章末有内容小结与学习指导,便于自学。每节配有适量习题,书末附有答案,供读者参考。

本书可作为参加自学考试"高等数学(工专)"的教材,也可作为工科类高校、职工大学、函授大学、电视大学专科段的教材或教学参考书。

目　　录

第一章 函数

初等数学主要研究的是常量,而高等数学主要研究的是变量,着重研究的是变量与变量之间的依赖关系,即函数关系.本章内容是学习高等数学的基础,它包括实数、函数的定义及其表示法、函数的特性、反函数和复合函数、初等函数等.

§1.1 实 数

一、实数与数轴

实数是人们在生产和生活实践中不断认识自然界“量”的属性的产物.人们由于计数以及分配的需要发明了正整数及其加、减、乘、除法运算;后来,为了使减法运算总能进行而发明了负整数,为了使除法运算总能进行而引进了小数和分数,人们将所有能表示成$\frac{p}{q}$(p,q是整数,p,q互质)的数称之为**有理数**;再后来,人们发现有理数也不够用了,比如,边长为1的正方形的对角线的长度(由勾股定理知)$\sqrt{2}$不能表示成$\frac{p}{q}$的形式!也即它不在有理数的范围内.事实上,若$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$,则$p^2=2q^2$(p,q是互质的整数),所以,p^2可被2整除,于是p也可被2整除;由此可设$p=2n$,则有$2q^2=4n^2$,$q^2=2n^2$,这样,q^2也能被2整除,故q也能被2整除.至此,可知p,q有公因子2,这与p,q互质的假定相矛盾!这就说明了$\sqrt{2}$不是有理数.易知,$\sqrt{2}\pm1,\sqrt{2}\pm2,\cdots$都不是有理数.人们将这些不是有理数的数称为**无理数**,将有理数与无理数统称为**实数**.全体实数所组成的数集称为**实数系**,也称为**实数集**.

实数在几何上的表示是数轴上的点.实数与数轴上的点是一一对应的.也就是,对于任何一个实数,可在数轴上找到唯一的一个点与之对应;反之,在数轴上的每个点也必定唯一地对应一个实数.基于这种一一对应关系,我们将一个实数a和数轴上坐标为a的点不加区别地看待.实数这种能与数轴上的点一一对应的特点称之为实数的**连续性**.而任何两个有理数之间必存在有理数,进而可推出任何两个有理数之间必存在无穷多个有理数,但有理数不能与数轴上的点一一对应,故说有理数是**不连续**的.

易知,任何带有有限小数部分或无限循环小数部分的数都可以写成$\frac{p}{q}$

的形式,因而都是有理数;而带有无限不循环小数部分的数不能写成$\frac{p}{q}$的形式,因而是无理数.所以,一个数是有理数还是无理数可以用它的小数部分是循环(有限小数也看成是循环的)还是不循环来区分.例如,$\pi=3.1415926\cdots$是无限不循环的,故是无理数.

通常,我们用 **R** 表示全体实数构成的数集,用 **Q** 表示全体有理数构成的数集,用 **Z** 表示全体整数构成的数集,用 **N** 表示正整数与零构成的数集,也称**自然数集**.

二、区间与邻域

在高等数学中,除了经常会用到上述数集 **R**,**Q**,**Z**,**N** 以外,还会用到一些特殊的数集,如由 1,2,3,4 构成的数集,可记为

$$A=\{1,2,3,4\},$$

这种数集的表示法称为"**列举法**",也可用所谓的"**属性法**"表示:

$$A=\{n\mid n\text{是小于 }5\text{ 的正整数}\}.$$

用"属性法"来表示数集的好处是它可以方便地表示数轴上的"一段"连续的点,比如,由数轴上介于 1 与 2 之间的实数构成的数集可方便地表示为

$$B=\{x\mid 1<x<2\}.$$

像这样由数轴上的"一段"连续的点构成的数集我们称之为**区间**,记为$(1,2)$.

在高等数学中常用的区间的定义如表 1.1.表中 a,b 是确定的实数,分别称为区间的**左端点**和**右端点**.有限区间的左、右端点之间的距离 $b-a$ 称为**区间长度**.$+\infty$,$-\infty$分别读成"正无穷大"与"负无穷大",它们不表示任何数,仅仅是记号.有时候,将$+\infty$与$-\infty$统一地记为∞.

表 1.1

名称	记号	定义
闭区间	$[a,b]$	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$
开区间	(a,b)	$\{x\mid a<x<b\}$
左开右闭区间	$(a,b]$	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$
右开左闭区间	$[a,b)$	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$
无穷区间	$(a,+\infty)$	$\{x\mid a<x<+\infty\}$
	$[a,+\infty)$	$\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}$
	$(-\infty,b)$	$\{x\mid -\infty<x<b\}$
	$(-\infty,b]$	$\{x\mid -\infty<x\leqslant b\}$
	$(-\infty,+\infty)$	$\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$

在高等数学中,我们经常会用到一种特殊的开区间$(a-\delta,a+\delta)$,称这个开区间为**点 a 的邻域**,记为$U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta),$$

称点 a 为**邻域的中心**,δ 为**邻域的半径**.

通常 δ 是较小的实数,所以,a 的 δ 邻域表示的是 a 的邻近的点,如图 1.1 所示.

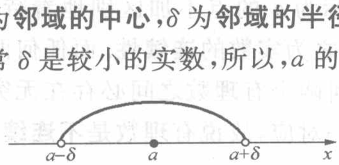

图 1.1

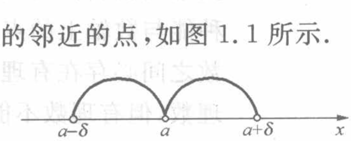

图 1.2

有时候,我们只考虑点 a 邻近的点,不考虑点 a,即考虑点集 $\{x \mid a-\delta<x<a$ 且 $a<x<a+\delta\}$,我们称这个点集为点 a 的**"去心的邻域"**,记为 $U^{\circ}(a,\delta)$,即

$$U^{\circ}(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a \text{ 且 } a<x<a+\delta\},$$

如图 1.2 所示.

三、绝对值

实数的绝对值是数学中经常用到的概念.设 x 是一实数,用 $|x|$ 记 x 的绝对值,其定义如下:

$$|x|=\begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

按照上述定义,可很方便求出 x 的绝对值.例如,$|1.52|=1.52$,$|-2.50|=2.50$,$|0|=0$.

$|x|$ 的几何意义是 x 到原点的距离.显然,$|x-y|$ 表示点 x 与点 y 之间的距离.

绝对值有下列性质:

设 x,y 是实数,则

(1) $|x| \geqslant 0$,当且仅当 $x=0$ 时才有 $|x|=0$;

(2) $|-x|=|x|$;

(3) $|xy|=|x||y|$;

(4) $a>0$,$|x|<a$ 当且仅当 $-a<x<a$;

(5) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$;

(6) $|x+y| \leqslant |x|+|y|$;

(7) $|x-y| \geqslant ||x|-|y|| \geqslant |x|-|y|$.

在上述性质中,(1),(2),(3),(4),(5)都很容易用定义和绝对值的几何意义来证明或理解.下面证明性质(6)和(7).

证明 由(5)式有

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|, \quad -|y| \leqslant y \leqslant |y|,$$

从而有

$$-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|,$$

再由(4)式知

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|,$$

性质(6)得证.

由于性质(6)中的 x,y 的任意性,对任意的 a,b,可令 $y=b-a$,$x=a$,于是有

$$|b| \leqslant |a|+|b-a|, \quad \text{即} \quad |b-a| \geqslant |b|-|a|.$$

再在性质(6)中令 $y=a-b$,$x=b$,有

$$|a| \leqslant |b|+|a-b|, \quad \text{即} \quad |b-a| \geqslant |a|-|b|=-(|b|-|a|),$$

所以

$$|b-a| \geqslant ||b|-|a|| \geqslant |b|-|a|,$$

由 a,b 的任意性知性质(7)得证.

下面再看几个与绝对值有关的例子.

例 1 在数轴上将数集 $U^{\circ}\left(1,\dfrac{1}{2}\right)=\left\{x \,\middle|\, 0<|x-1|<\dfrac{1}{2}\right\}$ 表示出来.

解 由于 $0<|x-1|<\dfrac{1}{2}$ 等价于

$$-\frac{1}{2}<x-1<\frac{1}{2} \quad 且 \quad x-1\neq 0,$$

即
$$\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2} \quad 且 \quad x\neq 1,$$

则数集 $U^{\circ}\left(1,\frac{1}{2}\right)$ 在数轴上的表示如图 1.3 所示.

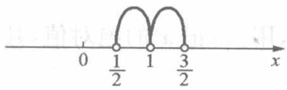

图　1.3

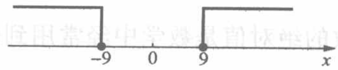

图　1.4

例 2　将数集 $\{x \mid |x|\geqslant 9\}$ 在数轴上表示出来.

解　当 $x\geqslant 0$ 时,由 $|x|=x$ 知 $|x|\geqslant 9$ 即为 $x\geqslant 9$;

当 $x<0$ 时,由 $|x|=-x$ 知 $|x|\geqslant 9$ 即为 $-x\geqslant 9$,即 $x\leqslant -9$.

所以数集 $\{x \mid |x|\geqslant 9\}$ 与 $\{x \mid x\geqslant 9$ 或 $x\leqslant -9\}$ 相等. 于是将该数集在数轴上表示为如图 1.4 所示.

例 3　解不等式 $\left|\frac{2x+1}{x-3}\right|<1$.

解　由不等式性质知该不等式等价于

$$-1<\frac{2x+1}{x-3}<1.$$

先解不等式

$$\frac{2x+1}{x-3}<1, \tag{1}$$

即
$$\frac{2x+1}{x-3}-1<0,$$

化简为
$$\frac{x+4}{x-3}<0,$$

由此得不等式组

$$\begin{cases} x+4<0, \\ x-3>0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x+4>0, \\ x-3<0, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x<-4, \\ x>3 \end{cases}(无解) \quad 或 \quad \begin{cases} x>-4, \\ x<3. \end{cases}$$

所以不等式(1)的解是 $-4<x<3$.

再解不等式

$$\frac{2x+1}{x-3}>-1. \tag{2}$$

整理得

$$\frac{2x+1}{x-3}+1>0, \quad 即 \quad \frac{3x-2}{x-3}>0,$$

由此得不等式组
$$\begin{cases} 3x-2>0, \\ x-3>0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} 3x-2<0, \\ x-3<0, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x > 2/3, \\ x > 3 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x < 2/3, \\ x < 3, \end{cases}$$
即
$$x > 3 \quad 或 \quad x < 2/3,$$
所以不等式(2)的解是 $x<2/3$ 或 $x>3$.

将两个不等式的解集表示在数轴上,如图1.5所示.求得它的公共部分即为原不等式的解 $-4<x<2/3$.

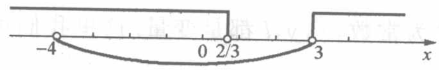

图 1.5

例4 证明:当 $y\neq0$ 时,有 $\left|\frac{1}{y}\right|=\frac{1}{|y|}$,并由此证明对任何 $x,y,y\neq0$,有 $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$.

证明 由绝对值的性质(3)知 $\left|\frac{1}{y}\cdot y\right|=\left|\frac{1}{y}\right||y|$,即 $1=\left|\frac{1}{y}\right||y|$,所以有 $\left|\frac{1}{y}\right|=\frac{1}{|y|}$.由此再由性质(3)有
$$\left|\frac{x}{y}\right|=\left|x\cdot\frac{1}{y}\right|=|x|\left|\frac{1}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}.$$

习 题 1.1

1. 在数轴上表示出下列各点:
$$1,\ 0,\ -1/2,\ -1.52.$$

2. 用区间表示下列各不等式,并将它们表示在数轴上:

(1) $-1\leqslant x\leqslant2$; (2) $1.5<x<3$;

(3) $-\infty<x\leqslant-1$; (4) $x\geqslant1$;

(5) $|x|<1$; (6) $0<|x-a|<\delta\ (\delta>0)$.

3. 解下列不等式:

(1) $|x+1|<2$; (2) $|1+2x|\leqslant3$;

(3) $\left|5-\frac{1}{x}\right|<1$; (4) $x^2-4x+3>0$;

(5) $\frac{2x-1}{x+2}<1$; (6) $0<(x-2)^2\leqslant4$.

4. 设 $a>0,b<0$,则下式中正确的是( ).

(A) $\left|\frac{a}{b}\right|=-\frac{a}{|b|}$; (B) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{a}{b}$; (C) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{a}{|b|}$; (D) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{b}$.

§1.2 函数的定义及其表示法

一、常量与变量

数学是研究现实世界中的数量关系和空间形式的科学.所以,在用数学方法对某个自然现象或社会现象进行研究时,首先要对这个自然现象或社会现象进行量化描述,也即找到与它有

关的量. 在这些量中，有些量在所考虑问题的过程中始终不变，保持定值，这些量我们称之为**常量**；而有些量在所考虑问题的过程中是变化的，它们可在一定的范围内取不同的值，这些量我们称之为**变量**. 例如，用一根长度为 l 的铁丝围成一个矩形的框架，用 x 表示矩形的长，则矩形的宽 $y=\frac{l}{2}-x$，矩形的面积 $S=x\left(\frac{l}{2}-x\right)$. 在这个问题中，$l$ 是常量，x,y,S 都是变量. 又例如，用一根铁丝围成一个面积为 S 的矩形框架，它的周长记为 l，长记为 x，宽记为 y，则 $y=\frac{S}{x}$，$l=2x+\frac{2S}{x}$. 在这个问题中，S 为常数，x,y,l 都是变量. 这里我们可以看出，一个量是常量还是变量都是相对某一具体问题而言的.

初等数学中主要研究的是常量，而高等数学中主要研究的是变量，着重研究的是变量与变量之间的关系.

本书中常用 $a,b,c,\cdots$ 等字母表示常量，而用 $x,y,z,t,\cdots$ 等字母表示变量. 为了讨论问题的方便，常量也可以看成特殊的变量.

二、函数的定义

在一个问题中往往会涉及多个变量，这些变量之间常常是有关系的. 例如在上述用一根长度为 l 的铁丝围成一个矩形框架的问题中，所涉及的变量有 x(长)，y(宽)，S(面积)，它们之间的关系为 $y=\frac{l}{2}-x$，$S=x\left(\frac{l}{2}-x\right)$. 显然，$y$ 和 S 是由 x 所确定的，只要 x 的值确定后，y 和 S 的值随之确定；x 的变化范围是 $0<x<\frac{l}{2}$，而 y 和 S 的变化范围是由 x 的变化范围所确定的. 知道了变量之间的依赖关系后，如 $S=x\left(\frac{l}{2}-x\right)\left(0<x<\frac{l}{2}\right)$，我们就可以由此来研究许多进一步的问题，比如：当 x 为何值时，S 可达到最大？这个问题正是可以用高等数学的理论和方法来解决的问题，而要解决这个问题，就要深入研究 S 与 x 的依赖关系

$$S=x\left(\frac{l}{2}-x\right)\quad\left(0<x<\frac{l}{2}\right).$$

一般地，高等数学正是通过研究变量之间的这种确定的依赖关系来研究现实社会中的各种问题的. 所以，高等数学研究的主要对象就是这种变量之间的确定的依赖关系，具有这种关系的变量我们说形成了函数关系. 下面给出函数的确切定义.

定义 1.1 设 x,y 是两个变量，x 的变化范围是实数集 D. 如果对于任何的 $x\in D$，按照一定的法则都有唯一确定的 y 值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**，记为 $y=f(x)$，称 D 是函数的**定义域**，x 为**自变量**，y 为**因变量**.

对于一个确定的 $x_0\in D$，与之对应的 $y_0=f(x_0)$ 称为函数 y 在点 x_0 处的**函数值**，全体函数值的集合称为函数 y 的**值域**，记为 $f(D)$，即

$$f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

由上述定义可知，一个函数 $y=f(x)(x\in D)$ 是由它的定义域 D 和对应法则 f 所确定的，所以，定义域和对应法则称为函数的**两要素**，说“两个函数相等”意即这两个函数的定义域相同，对应法则也相同.

将平面点集