卓越

卓越系列 · 21世纪高职高专精品规划教材

公共基础课适用

高等数学习题参考解答

Advanced Mathematics Exercises with Answers

李君湘　邱忠文　主编

天津大学出版社

TIANJIN UNIVERSITY PRESS

卓越系列·21世纪高职高专精品规划教材(公共基础课适用)

高等数学习题参考解答

Advanced Mathematics Exercises with Answers

李君湘　邱忠文　主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是与李君湘、邱忠文所编《高等数学(上、下册)》配套使用的教学参考书. 内容包括课本上册的函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分和下册的向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、曲线积分、无穷级数、微分方程共12章全部习题及复习题,给出详细的分析和解答.

本书可作为高职高专院校学生和大学专科学生学习高等数学的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题参考解答/李君湘,邱忠文主编. —天津:天津大学出版社,2008.1
ISBN 978-7-5618-2597-6

Ⅰ.高… Ⅱ.①李…②邱… Ⅲ.高等数学—高等学校—解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第002824号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
印　　刷 廊坊市长虹印刷有限公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 169mm×239mm
印　　张 15.75
字　　数 327千
版　　次 2008年1月第1版
印　　次 2008年1月第1次
印　　数 1-4 000
定　　价 25.00元

前　　言

为了适应高职高专院校学生和大学专科学生学习高等数学课程的需要,帮助学生更好地学习高等数学课程,提高解题能力和逻辑思维能力,我们参照《高等数学课程教学基本要求》,并结合多年从事高职高专高等数学教学工作的经验,编写了《高等数学习题参考解答》一书,作为我们编写的《高等数学(上、下册)》课本配套使用的教学参考书.

本书基本上覆盖了现行的高职高专院校和大学专科高等数学课程教学的内容,与课本紧密结合,作为课本的习题解答,内容包括上册的函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分和下册的向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、曲线积分、无穷级数、微分方程共12章的全部习题以及复习题;所有习题均给出详细的分析、解答(带“*”的习题为参考习题).

参加本书编写工作的有:李君湘、邱忠文、杨晓叶、李晓华等.

限于编者水平有限,书中不免有疏漏之处,敬请读者批评指正.

编　者

2007年12月于天津大学

目　录

1

函　数

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{x+2}{x^2-4}$.

解　由 $x^2-4\neq 0$，有 $x\neq -2, x\neq 2$. 故函数在 $x=-2$ 及 $x=2$ 无定义，知函数的定义域

$$D_f=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty).$$

(2) $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$.

解　由 $-1\leqslant\dfrac{2x-1}{7}\leqslant 1$，知 $-7\leqslant 2x-1\leqslant 7$，$-6\leqslant 2x\leqslant 8$. 即 $-3\leqslant x\leqslant 4$.

故函数的定义域

$$D_f=[-3,4].$$

(3) $y=\sqrt{\lg(x^2-3)}$.

解　由 $\lg(x^2-3)\geqslant 0$，有 $x^2-3\geqslant 1$. 即

$$x^2\geqslant 4, |x|\geqslant 2.$$

故函数的定义域

$$D_f=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty).$$

(4) $y=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{\lg(1-x)}$.

解 由$\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\1-x>0,\\x\neq 0,\end{cases}$ 有$\begin{cases}x\geqslant -1,\\1>x,\\x\neq 0.\end{cases}$

故函数的定义域

$$D_f=[-1,0)\cup(0,1).$$

2.设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -\infty<x\leqslant 0,\\2^x, & 0<x<+\infty.\end{cases}$ 求 $f(-2),f(0),f(5)$ 及 $f(x-1)$.

解 由函数的表达式,有

$$f(-2)=(1+x)\Big|_{x=-2}=-1, f(0)=(1+x)\Big|_{x=0}=1,$$

$$f(5)=2^x\big|_{x=5}=2^5=32,$$

$$f(x-1)=\begin{cases}1+(x-1), & -\infty<x-1\leqslant 0,\\2^{x-1}, & 0<x-1<+\infty,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x, & -\infty<x\leqslant 1,\\2^{x-1}, & 1<x<+\infty.\end{cases}$$

3. 设 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x$,求 $f(x),f\left(\cos\frac{x}{2}\right)$.

解 由 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x=2\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)$,有

$$f(x)=2(1-x^2), x\in[-1,1].$$

故

$$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)=2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x.$$

4. 设 $f(u)$ 满足:$f^2(\lg u)-2uf(\lg u)+u^2\lg u=0, u\in[1,10]$,且 $f(0)=0$.求 $f(x)$.

解 由

$$f^2(\lg u)-2uf(\lg u)+u^2\lg u=0,$$

得

$$f(\lg u)=u(1\pm\sqrt{1-\lg u})=10^{\lg u}(1\pm\sqrt{1-\lg u}).$$

由条件 $f(0)=0$,可得

$$f(\lg u)=10^{\lg u}(1-\sqrt{1-\lg u}),$$

即

$$f(x)=10^x(1-\sqrt{1-x}), x\in[0,1].$$

5. 设 $y=\frac{x}{2}f(t-x)$,且当 $x=1$ 时,$y=\frac{1}{2}t^2-t+\frac{1}{2}$,求 $f(x)$.

解 当 $x=1$ 时,

$$y=\frac{1}{2}f(t-1)=\frac{1}{2}t^2-t+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(t-1)^2.$$

于是

$$f(t-1)=(t-1)^2, f(x)=x^2.$$

6. 判定函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x$ 的奇偶性.

解 因为

$$f(-x)=\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^{-x}+\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^{-x}=(2-\sqrt{3})^{-x}+(2+\sqrt{3})^{-x}$$

$$=\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x=f(x),$$

所以 $f(x)$为偶函数.

7. 求函数 $f(x)=\sin^2 2x$ 的周期.

解 $f(x)=\sin^2 2x=\frac{1}{2}(1-\cos 4x)=\frac{1}{2}[1-\cos(4x+2\pi)]$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\cos 4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

故知 $f(x)=\sin^2 2x$ 以 $T=\frac{\pi}{2}$为周期.

8. 讨论下列函数的单调性.

(1)$f(x)=3x+2$.

解 函数 $f(x)=3x+2$ 的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,对任意的实数 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,则有

$$f(x_1)-f(x_2)=3x_1+2-(3x_2+2)=3(x_1-x_2)<0,$$

即 $$f(x_1)<f(x_2),$$

所以 $f(x)=3x+2$ 在定义域$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的函数.

(2)$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

解 函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的定义域$D_f=(-\infty,+\infty)$,对任意的实数 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$,且$x_1<x_2$,则有

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)}=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{x_2}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1-x_2}=3^{x_2-x_1},$$

由于 $x_2-x_1>0$,故 $3^{x_2-x_1}>1$,因此有 $f(x_1)>f(x_2)$,所以 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在定义域$(-\infty,+\infty)$内是单调减少的函数.

(3)$f(x)=\lg x$.

解 函数 $f(x)$的定义域 $D_f=(0,+\infty)$.对任意的实数 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,则有

$$f(x_1)-f(x_2)=\lg x_1-\lg x_2=\lg\frac{x_1}{x_2},$$

由于$\frac{x_1}{x_2}<1$,故 $\lg\frac{x_1}{x_2}<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$,所以 $f(x)=\lg x$ 在定义域$(0,+\infty)$内是单调增加的函数.

9. 求由函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$所确定的复合函数$f[f(x)]$的定义域.

解 因为 $f(x)=\frac{1}{1+x}$, $x\neq-1$,所以

$$f[f(x)]=\frac{1}{1+f(x)}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{1+x}{2+x}\quad(x\neq-1,x\neq-2),$$

故

$$D_f=(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,+\infty).$$

习题 1-2

1. 分析下列函数的复合步骤.

(1) $y=\sin^2(2x+1)$.

解 设 $y=\sin^2(2x+1)=u^2$, $u=\sin(2x+1)=\sin v$, $v=2x+1$,
故 $y=\sin^2(2x+1)$是由函数 $y=u^2$, $u=\sin v$, $v=2x+1$ 复合而成的.

(2) $y=\sqrt{2+x}$.

解 设 $y=\sqrt{2+x}=\sqrt{u}$, $u=2+x$,
故 $y=\sqrt{2+x}$是由函数$y=\sqrt{u}$, $u=2+x$ 复合而成的.

(3) $y=\lg\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$.

解 设 $y=\lg\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)=\lg u$, $u=\sin\frac{\pi}{x}=\sin v$, $v=\frac{\pi}{x}$.
故 $y=\lg\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$是由函数$y=\lg u$, $u=\sin v$, $v=\frac{\pi}{x}$复合而成的.

(4) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

解 设 $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}=\arcsin u$, $u=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{v}$, $v=1-x^2$.
故 $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$是由函数 $y=\arcsin u$, $u=\sqrt{v}$, $v=1-x^2$ 复合而成的.

2. 设$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\quad(x>0)$,求 $f(x)$.

解 设$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\quad(x>0)$,则

$$f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\quad(x>0).$$

3. 设 $f(x)=\dfrac{3x-2}{x+1}(x\neq-1)$,求函数 $g(x)$,使得 $f[g(x)]=x$.

解 设 $f(x)=\dfrac{3x-2}{x+1}(x\neq-1)$,为了使函数 $g(x)$满足

$$f[g(x)]=x,\quad 即\frac{3g(x)-2}{g(x)+1}=x\quad (g(x)\neq-1),$$

由上式解得

$$g(x)=\frac{2+x}{3-x}\quad (x\neq3).$$

4. 求下列函数的反函数.

(1) $y=1+\lg(x+2)$.

解 由函数 $y=1+\lg(x+2)$,可以解出

$$x=10^{y-1}-2.$$

故所求的反函数为 $y=10^{x-1}-2, x\in(-\infty,+\infty)$.

(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

解 由函数 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$,可以解出 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$.

故所求的反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}, x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

(3) $y=\dfrac{a^x}{a^x+1}(a>0,a\neq1)$.

解 由函数 $y=\dfrac{a^x}{a^x+1}$,可以解出 $x=\log_a\left(\dfrac{y}{1-y}\right)$.

故所求的反函数为 $y=\log_a\left(\dfrac{x}{1-x}\right), x\in(0,1)$.

(4) $y=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 由函数 $y=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$,可解得

$$10^y=x+\sqrt{1+x^2},$$

$$10^{-y}=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{1+x^2}-x,$$

以上两式相减,得

$$2x=10^y-10^{-y}, x=\frac{1}{2}(10^y-10^{-y}).$$

故所求的反函数为 $y=\dfrac{1}{2}(10^x-10^{-x}), x\in(-\infty,+\infty)$.

5. 验证等式 $|x|=x\operatorname{sgn}x$ 成立.

解 当 $x>0$ 时, $|x|=x, x\operatorname{sgn}x=x$,等式成立;
当 $x=0$ 时, $|0|=0, 0\operatorname{sng}0=0$.等式也成立;
当 $x<0$ 时, $|x|=-x, x\operatorname{sgn}x=x\cdot(-1)=-x$.等式仍然成立.

综上所证,有

$$|x| = x\operatorname{sgn} x.$$

6. 设 $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})(a>0,a\neq 1)$.验证:

$$f(x+t)+f(x-t)=2f(x)f(t).$$

解　$2f(x)f(t)=2\cdot\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})\cdot\frac{1}{2}(a^t+a^{-t})$

$$=\frac{1}{2}(a^{x+t}+a^{t-x}+a^{x-t}+a^{-(x+t)})$$

$$=\frac{1}{2}(a^{x+t}+a^{-(x+t)})+\frac{1}{2}(a^{x-t}+a^{-(x-t)})$$

$$=f(x+t)+f(x-t).$$

7. 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$,求 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

解　因为 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+2+\frac{1}{x^2}-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$,

所以

$$f(x)=x^2-2.$$

故

$$f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}-4.$$

8. 设 $f(x-\frac{1}{x})=2x^2-4(x>1)$,求 $f(x)$.

解　令 $u=x-\frac{1}{x}$,因为 $x>1$,所以 $u\geqslant 0$.于是有

$$x^2-ux-1=0,x=\frac{1}{2}(u+\sqrt{u^2+4}).$$

可得

$$f(x)=2\cdot[\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+4})]^2-4=x^2+x\sqrt{x^2+4}-2.$$

9. 北京到上海的铁路里程为 1 463 km,北京到重庆的铁路里程为 2 087 km,利用教材上的例 2.5,求出某送递公司送递物品的到达天数.

解　设北京到上海的物品到达天数为 D_1,北京到重庆的到达天数为 D_2,则

$$D_1=2+\left|\left[\frac{500-1463}{500}\right]\right|=4(\text{天}),$$

$$D_2=2+\left|\left[\frac{500-2087}{500}\right]\right|=6(\text{天}).$$

复 习 题　1

1. 填空题

(1)函数 $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$的定义域 $D_f=\underline{(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)}$.

提示 由 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\neq 0$,有 $x\neq 1, x\neq 2$.
可知 $D_f=(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

(2)函数 $y=2x+1$ 的反函数为 $y=\underline{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}$.

提示 由 $y=2x+1$, 所以 $x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$.故反函数为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

(3)设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x-1}(x\neq 0,1)$,则 $f(2x)=\underline{\frac{1}{1-2x}}$.

提示 因为 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}$,所以

$$f(x)=\frac{1}{1-x},\text{故 } f(2x)=\frac{1}{1-2x}.$$

(4)设 $f(x+1)=x(x-1)$,则 $f(x)=\underline{x^2-3x+2}$.

提示 因为 $f(x+1)=x(x-1)=[(x+1)-1][(x+1)-2]$,
所以 $f(x)=(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$.

(5)设 $f(x)=x^2+2x$,则当 $h\neq 0$ 时,$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\underline{2(x_0+1)+h}$.

提示
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h)^2+2(x_0+h)-(x_0^2+2x_0)}{h}$$
$$=\frac{x_0^2+2hx_0+h^2+2x_0+2h-x_0^2-2x_0}{h}=2(x_0+1)+h.$$

2. 选择题

(1)设 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\left(a>0,0<x<\frac{\pi}{2}\right)$,则 $f(a\tan x)$等于

(A)$\frac{\sin x}{a}$ (B)$\frac{-\cos x}{a}$ (C)$\frac{\cos x}{a}$ (D)$-\frac{\sin x}{a}$

答(C).

提示 $f(a\tan x)=\frac{1}{\sqrt{a^2+(a\tan x^2)}}=\frac{1}{a\sec x}=\frac{\cos x}{a}$.

故应选(C).

(2)函数 $y=\lg(x-1)$的有界区间为

(A)(1,2) (B)$(1,+\infty)$ (C)$(2,+\infty)$ (D)(2,3)

答(D).

提示 由于函数 $y=\lg(x-1)$在定义域 $D_f=(1,+\infty)$内为单调增加的函数.当 $x\in(2,3)$时,有

$$\lg(2-1)<\lg(x-1)<(3-1),$$
即
$$0<\lg(x-1)<\lg 2.$$
故函数 $y=\lg(x-1)$在区间(2,3)内有界.

故应选(D).

(3)若 $y=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})(a>0,a\neq1)$的反函数为 $\varphi(x)$,则 $\varphi(1)$等于

(A)$\log_a(1+\sqrt{2})$　(B)$\log_a(1-\sqrt{2})$　(C)$\frac{1}{2}(a-\frac{1}{a})$　(D)$\frac{1}{2}(a+\frac{1}{a})$

答(A).

提示　由 $y=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})(a>0,a\neq1)$.有

$$a^{2x}-2ya^x-1=0,a^x=y\pm\sqrt{1+y^2}.$$

而 $a^x>0$,故有 $a^x=y+\sqrt{1+y^2}$,$x=\log_a(y+\sqrt{1+y^2})$.于是所求的反函数为

$$y=\varphi(x)=\log_a(x+\sqrt{1+x^2}),$$

知 $\varphi(1)=\log_a(1+\sqrt{2})$.

故应选(A).

(4)函数 $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$是

(A)偶函数　(B)奇函数　(C)有界函数　(D)周期函数

答(B).

提示　$f(0)=0$,且

$$\begin{aligned}f(x)+f(-x)&=\lg(x+\sqrt{1+x^2})+\lg(\sqrt{1+(-x)^2}-x)\\&=\lg[(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)]=\lg1=0.\end{aligned}$$

所以 $f(x)$是奇函数.

故应选(B).

(5)已知 $f(3x)=\log_2\sqrt{\frac{9x+1}{2}}$,则 $f(1)$等于

(A)0　(B)$\frac{1}{3}$　(C)$\frac{1}{2}$　(D)1

答(C).

提示　令 $3x=1$,得 $x=\frac{1}{3}$.有

$$f(1)=\log_2\sqrt{\frac{9\cdot(\frac{1}{3})+1}{2}}=\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}.$$

故应选(C).

3. 解下列各题.

(1)求 $y=\lg(x-1)+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$的定义域.

解　因为 $\begin{cases}x-1>0,\\x+1>0,\end{cases}$ 有公共解集 $x>1$.

所以　函数 $y=\lg(x-1)+\sqrt{\frac{1}{x+1}}$的定义域 $D_f=(1,+\infty)$.

(2)设 $y=f(x)$ 的定义域为 $x\in[0,1]$，求函数 $f(3x-1)$ 的定义域.

解　由　$0\leqslant 3x-1\leqslant 1$，所以　$1\leqslant 3x\leqslant 2$，即 $\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}$.

故函数 $f(3x-1)$ 的定义域 $D_f=\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$.

(3)若 $f(x)=2x+1$，求 $f(\sin x)$ 及 $f[f(x)]$.

解
$$f(\sin x)=2(\sin x)+1=2\sin x+1,$$
$$f[f(x)]=2(2x+1)+1=4x+3.$$

(4)若 $f(x)=\ln(1+x)$，$f[\varphi(x)]=x$，求 $\varphi(x)$.

解　因为　$f[\varphi(x)]=\ln[1+\varphi(x)]=x$，所以

$1+\varphi(x)=e^x$，知 $\varphi(x)=e^x-1$.

(5)判定函数 $f(x)=\lg x$ 的增减性.

解　函数 $f(x)=\lg x$ 的定义域 $D_f=(0,+\infty)$. 对任意的正实数 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，当 $x_2>x_1$ 时，有

$$f(x_2)-f(x_1)=\lg x_2-\lg x_1=\lg\left(\frac{x_2}{x_1}\right),$$

由于 $x_2>x_1$，有 $\frac{x_2}{x_1}>1$，知

$$f(x_2)-f(x_1)=\lg\left(\frac{x_2}{x_1}\right)>0,$$

即
$$f(x_2)>f(x_1).$$

故函数 $f(x)=\lg x$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的.

(6)判定函数 $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$ 的奇偶性.

解　因为函数 $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$ 的定义域 $D_f=(-1,1)$，且 $f(0)=0$，对任意的 $x\in D_f$，有

$$f(-x)=\lg\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\lg\frac{1+x}{1-x}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x),$$

所以 $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$ 为奇函数.

4. 求下列各题的解.

(1)设 $f(\ln x)=x^2(1+\ln^2 x)$，求 $f(x)$.

解　令 $t=\ln x$，有 $x=e^t$，故有

$$f(\ln x)=f(t)=(e^t)^2(1+t^2)=e^{2t}(1+t^2),$$

得

$$f(x)=e^{2x}(1+x^2).$$

(2)设 $f(x)=ax^2+bx+c$(a,b,c 均为常数).计算 $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)$的值.

解　原式 $=a[(x+3)^2-3(x+2)^2+3(x+1)^2-x^2]+$

$b[(x+3)-3(x+2)+3(x+1)-x]+c[1-3+3-1]$

$=a[(x+3)^2-x^2+3(x+1)^2-3(x+2)^2]+b[(x+3)-x+3(x+1)-3(x+2)]$

$=a(6x+9-6x-9)+b(3-3)=0.$

(3)设 $g(x)=1+x$,且当 $x\neq 0,1$ 时,$f[g(x)]=\dfrac{1-x}{x}$,求 $f(x)$.

解　因为 $f[g(x)]=f(1+x)=\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{2-(1+x)}{(1+x)-1}$,所以

$$f(x)=\frac{2-x}{x-1}.$$

(4)已知某个函数的图形如图 1-1 所示,写出这个函数 $y=f(x)$的表达式.

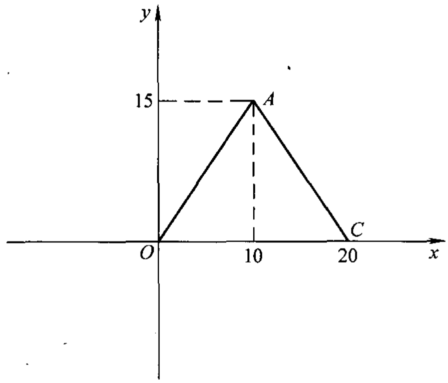

图 1-1

解　线段 OA 的方程为

$y=\dfrac{3}{2}x,x\in[0,10]$;

线段 AC 的方程为

$y=-\dfrac{3}{2}(x-20),x\in(10,20]$.

于是有函数关系

$$y=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x, & 0\leqslant x\leqslant 10,\\ -\dfrac{3}{2}(x-20), & 10<x\leqslant 20.\end{cases}$$

(5)设 $f(x)$对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$,均有

$$f(xy)=f(x)f(y),$$

且 $f(0)\neq 0$,求 $f(x)$.

解　令 $y=0$,有 $xy=0$,则

$$f(0)=f(0\cdot x)=f(0)f(x).$$

于是

$$f(0)f(x)-f(0)=f(0)[f(x)-1]=0,$$

因为 $f(0)\neq 0$,所以 $f(x)-1=0$,知

$$f(x)=1.$$

5. 在温度计上,0℃(摄氏)对应于 32℉(华氏),100℃对应于 212℉,若摄氏温度 y 与华氏温度 x 之间的对应关系为 $y=kx+b$(k,b 为待定常数).求摄氏温度 y 与华氏温度 x 之间的函数表达式.

解　由于摄氏温度 y 与华氏温度 x 之间的对应关系为 $y=kx+b$.由 0℃对应于