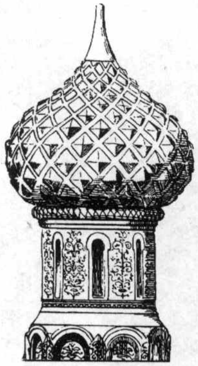
俄罗斯数学
教材选译

复分析导论(第二卷)

多复变函数(第4版)

□ Б. В. 沙巴特　著
□ 许　明　欧阳彦虹　译

高等教育出版社
Higher Education Press



俄 罗 斯 数 学
教 材 选 译

● 数学天元基金资助项目

复分析导论(第二卷)

多复变函数(第4版)

□ Б. В. 沙巴特 著

□ 许 明 欧阳彦虹 译

高等教育出版社
Higher Education Press

图字：01-2006-6985 号

Б. В. Шабат

Введение в комплексный анализ (II) 2004

Originally published in Russian under the title

Introduction to Complex Analysis (II) by B. V. Shabat

图书在版编目（CIP）数据

复分析导论. 第 2 卷，多复变函数：第 4 版/（俄罗斯）沙巴特著；许明，欧阳彦虹译. —北京：高等教育出版社，2008.1

ISBN 978-7-04-022360-6

Ⅰ.复···　Ⅱ.①沙···②许···③欧···　Ⅲ.①复分析②多复变函数　Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 169066 号

策划编辑　赵天夫　**责任编辑**　蒋　青　**封面设计**　王凌波
版式设计　王　莹　**责任校对**　姜国萍　**责任印制**　陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787 × 1092　1/16	版　　次	2008 年 1 月第 1 版
印　　张	22.5	印　　次	2008 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	470 000	定　　价	48.00 元

物料号 22360-00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

第三版前言

这本书的意图是想要当作学习高维复分析的入门教程, 就是说, 它包括了多复变量的全纯函数理论, 全纯映射以及复欧氏空间中的子流形. 本书是作者的《复分析导论 (第一卷)》的后续篇; 某些在那里仅只提及的思想都可在本卷中相应部分找到.

比起一维的理论来, 高维复分析还相当年轻. 如果不算上 G. 雅可比在 1830 年和 1857 年的工作, 狄东 (F. Didon) 1873 年的工作, 在这些工作中已出现了二元复函数及其积分; 也不算上 Ch. 埃尔米特在 1852 年和 J. 西尔维斯特在 1854 年和 1857 年的工作, 这些工作均致力于解多变量方程组, 高维理论的发端则可追溯到 1879 年, 那时 K. 魏尔斯特拉斯发表了他的文章《与多变量解析函数有关的若干定理》. 高维理论的另一位创立者是亨利・庞加莱 (1854 — 1912). 在 1883 年他发表了一篇论文, 其中证明了两个变量的局部有理函数是两个整函数的商 (在 1895 年, 这个结果被他的学生库赞 (P. Cousin) 推广到了任意多个变量的情形). 同一年, 他与皮卡合作, 开始研究复空间的代数子流形. 在 1886 年到 1887 年的文章中, 庞加莱推广了二元函数的柯西定理, 并建立了高维留数 (残数) 论的基础.

高维复分析的第一个繁荣时期可追溯到 20 世纪初. 1907 年庞加莱发表了一篇论文, 预期了其后的关于复欧氏空间中区域的双全纯映射的研究. 大体在相同的时间, 出现了哈托格斯的一大系列的文章, 均致力于多元函数的解析延拓问题, 同样还有莱维的重要工作.

但是, 在随后相当长的一个时期中, 复分析的高维问题研究落后了, 关注它的数学家只占单复变论的专家们中的一小部分.

到了 20 世纪 60 年代情况发生了迅速的变化, 这时高维问题开始吸引其他领域中的数学家和理论物理学家的注意. 其中的一个明显的理由来自于从 20 世纪 30 年

代开始的 H. 嘉当, 冈洁和其他一些人的研究, 这些研究把高维复分析与代数, 拓扑和代数几何联系了起来. 另一个原因是与博戈柳博夫, 弗拉吉米洛夫, 约斯特 (Jost), 怀特曼 (Wightman) 等人在 20 世纪 50 年代的发现有关, 他们把多复变论用到了量子场论中.

接着就出现了高维复分析的第二个繁荣期, 它一直持续到现在. 这个领域中的新老结果在分析、微分几何、代数几何中得到了大量应用, 特别是在当代数学物理中的应用. 掌握高维复分析的基础对许多现代数学领域中的任何一位专家来说都变成必须的了.

相对于过去十几年中高维复分析的迅猛发展, 本书相对其前一版 (1976 年) 做了大量的重写工作, 但是要详细描述这种变化还是无能为力的. 我们只是作为应用的例子, 提及了最近由彭罗斯提出的解决麦克斯韦方程的扭子方法的一个初等阐述.

本书这一卷的基础是我在莫斯科大学时学校所给的一系列的 "特殊课程", 它是由 "函数论和泛函分析" 分部所支持的一种课程. 在进行这一版的工作中我大量采用了我的朋友和学生们的建议, 对他们我谨表示深深的谢意.

沙巴特

俄罗斯数学教材选译

•数学天元基金资助项目•

书名	作者
* 数学分析 (第一卷) (第 4 版)	В. А. 卓里奇
* 数学分析 (第二卷) (第 4 版)	В. А. 卓里奇
* 微积分学教程 (第一卷) (第 8 版)	Г. М. 菲赫金哥尔茨
* 微积分学教程 (第二卷) (第 8 版)	Г. М. 菲赫金哥尔茨
* 微积分学教程 (第三卷) (第 8 版)	Г. М. 菲赫金哥尔茨
* 数学分析讲义 (第 3 版)	Г. И. 阿黑波夫, В. А. 萨多夫尼奇, В. Н. 丘巴里阔夫
复分析导论 (第一卷)	Б. В. 沙巴特
* 复分析导论 (第二卷)	Б. В. 沙巴特
* 函数论与泛函分析初步 (第 7 版)	А. Н. 柯尔莫戈洛夫, С. В. 佛明
* 复变函数论方法 (第 6 版)	М. А. 拉夫连季耶夫, Б. В. 沙巴特
* 常微分方程 (第 6 版)	Л. С. 庞特里亚金
奇异摄动方程解的渐近展开	А. Б. 瓦西里耶娃, В. Ф. 布图索夫
* 代数学引论 (第一卷) 基础代数 (第 2 版)	А. И. 柯斯特利金
* 代数学引论 (第二卷) 线性代数 (第 3 版)	А. И. 柯斯特利金
* 代数学引论 (第三卷) 基本结构 (第 2 版)	А. И. 柯斯特利金
* 微分几何与拓扑学简明教程	А. С. 米先柯, А. Т. 福明柯
* 现代几何学: 方法与应用 (第一卷) 几何曲面、变换群与场 (第 5 版)	Б. А. 杜布洛文, С. П. 诺维可夫, А. Т. 福明柯
* 现代几何学: 方法与应用 (第二卷) 流形上的几何与拓扑 (第 5 版)	Б. А. 杜布洛文, С. П. 诺维可夫, А. Т. 福明柯
* 现代几何学: 方法与应用 (第三卷) 同调论引论 (第 2 版)	Б. А. 杜布洛文, С. П. 诺维可夫, А. Т. 福明柯
* 概率论(第一卷)(第 3 版)	А. Н. 施利亚耶夫
* 概率论(第二卷)(第 3 版)	А. Н. 施利亚耶夫
* 概率论习题集	А. Н. 施利亚耶夫
* 随机过程论	А. В. 布林斯基, А. Н. 施利亚耶夫
随机金融基础: 事实、模型与理论	А. Н. 施利亚耶夫
* 经典力学中的数学方法 (第 4 版)	В. И. 阿诺尔德
* 理论力学 (第 3 版)	А. П. 马尔契夫
* 连续介质力学 (第一卷)	Л. И. 谢多夫
连续介质力学 (第二卷)	Л. И. 谢多夫

说明: 加 * 者已出版.

高等教育出版社自然科学学术出版中心

高等教育出版社是教育部所属的国内最大的教育出版基地，其自然科学学术出版中心下设研究生教育与学术著作分社和自然科学学术期刊分社，正努力成为中国最重要的学术著作出版单位和最大的学术期刊群出版单位.

研究生教育与学术著作分社充分发掘国内外出版资源，为研究生及高层次读者服务，已出版《教育部推荐研究生教学用书》、《当代科学前沿论丛》、《中国科学院研究生院教材》、《中国工程院院士文库》、《长江学者论丛》等一系列研究生教材和优秀学术著作.

自然科学学术期刊分社主要负责教育部大型英文系列学术期刊出版项目 *Frontiers in China* 中基础科学、生命科学、工程技术类期刊的出版工作，目标是搭建国内学术界与海外交流的平台，以及国内学术期刊界合作的平台.

地　　址：北京市朝阳区惠新东街4号富盛大厦15层
邮　　编：100029
网　　址：http://academic.hep.com.cn
购书电话：010-58581114/1115/1116/1117/1118

郑 重 声 明

目　　录

第 I 章
多变量全纯函数

对于在多复变函数领域的初学者而言, 最大的困难可能是缺少简单而直观的几何观念. 因此, 我们从一开始便注意到了复空间的特性并且详细地描述了其中许多最简单的区域.

§1. 复空间

1. 空间 $\mathbb{C}^n$

考虑偶数维的欧氏空间 $\mathbb{R}^{2n}$, 它的点是 $2n$ 个实数的有序数组 $(x_1, \cdots, x_{2n})$. 令 $z_\nu = x_\nu + ix_{n+\nu}(\nu = 1, \cdots, n)$, 从而我们在其中引进了复结构. 在后文中. 我们常常记 $x_{n+\nu} = y_\nu$, 故而有 $z_\nu = x_\nu + iy_\nu(\nu = 1, \cdots, n)$. 由 n 个有序的复数组作为点

$$z = (z_1, \cdots, z_n) \tag{1}$$

构成的空间被称做 n 维复空间并以 $\mathbb{C}^n$ 表示. 特别地, 当 $n = 1$ 时我们得到了 $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$, 即复数的平面表示. 空间 $\mathbb{C}^n$ 是 n 个平面的笛卡儿乘积

$$\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{n\text{ 次}}. \tag{2}$$

于是, n 维复空间 $\mathbb{C}^n$ 的点就是 $2n$ 维实空间 $\mathbb{R}^{2n}$ 的点. 然而在 $\mathbb{R}^{2n}$ 引进复结构立即就在此空间中引进了某种非对称性: 不是其中所有的坐标都是等价的 (例如, 我们把 x_1 和 x_{n+1} 组合成复数 z_1, 然而 x_1 和 x_2 则没有这种组合).

在 $\mathbb{C}^n$ 中自然地引入了在域 $\mathbb{C}$ 上的向量空间结构; 其加法和对复标量 λ 的乘法按坐标定义为: $z+w=(z_1+w_1,\cdots,z_n+w_n), \lambda z=(\lambda z_1,\cdots,\lambda z_n)$. 向量 $z\in\mathbb{C}^n$ 有时写成 $z=x+iy$ 的形状, 其中 $x=(x_1,\cdots,x_n), y=(y_1,\cdots,y_n)$, 它们是 $\mathbb{R}^n$ 中的向量. 空间 $\mathbb{R}^n(x)$ 由形如 $z=x+i0$ 的向量构成, 我们称其为 $\mathbb{C}^n$ 的**实子空间** (当 $n=1$ 时, 它即是实轴).

在 $\mathbb{C}^n$ 中定义有**埃尔米特 (Hermite) 内积**

$$(z,w)=\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu \overline{w}_\nu, \tag{3}$$

它具有显见的性质:

$$(w,z)=\overline{(z,w)}, \quad (\lambda z,w)=\lambda(z,w), \tag{4}$$

其中 $\lambda\in\mathbb{C}$ 为任意复数. 如果 $z_\nu=x_\nu+ix_{n+\nu}, w_\nu=u_\nu+iu_{n+\nu}$, 则根据 (3) 有

$$(z,w)=\sum_{\nu=1}^{2n} x_\nu u_\nu + i\sum_{\nu=1}^{n}(x_{n+\nu}u_\nu - x_\nu u_{n+\nu}),$$

由此可见, 如果我们已把 z 和 w 看作 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的向量, 那么, 埃尔米特内积的实部 $\mathrm{Re}(z,w)$ 就是 z 和 w 的**欧几里得内积**. 虚部 $\mathrm{Im}(z,w)$ 在交换 z 和 w 时改变了符号, 而当 $z=w$ 时它化为零:

$$(z,z)=\sum_{\nu=1}^{2n} x_\nu^2 \quad \text{或者} \quad |z|^2=\sum_{\nu=1}^{n}|z_\nu|^2 \tag{5}$$

是欧几里得长度 (模) 的平方, 其中的 z 被看为 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的向量. 我们还注意到另一个明显的关系式: $\mathrm{Im}(z,w)=\mathrm{Re}(z,iw)$.

$\mathbb{C}^n$ 中的包含点 z^0 的**实超平面**是这样的点 z 的集合, 使得向量 $z-z^0$ 实正交于某个定向量 $a\neq 0$:

$$\mathrm{Re}(z-z^0,a)=0 \quad \text{或者} \quad \mathrm{Re}(z,a)=\beta, \tag{6}$$

其中 β 为某个实数. 每个这样的超平面都被纤维化为余维为 2 的实平面:

$$(z,a)=b, \tag{7}$$

其中的 $b=\beta+i\beta'$, 而 β' 是任意的实数 [1]. 形如 (7) 所代表的平面被称做 $\mathbb{C}^n$ 中的**复超平面**.

现设已知 $k\leqslant 2n$ 个向量 $a^\mu\in\mathbb{C}^n$, 它们在 $\mathbb{R}$ 上线性无关; 由 k 个实方程组

$$\mathrm{Re}(z,a^\mu)=\beta_\mu, \quad \mu=1,\cdots,k, \tag{8}$$

[1] 事实上, 复方程 (7) 等价于两个实的方程: $\mathrm{Re}(z,a)=\beta, \mathrm{Im}(z,a)=\beta'$. 第一个方程等同于 (6), 而第二个方程可化为 $\mathrm{Re}(z,ia)=\beta'$, 从而表示了另一个显然不同于 (6) 的实超平面.

所描述的点 $z \in \mathbb{C}^n$ 组成的集合称之为余维 k 的实平面或者说, $m = 2n - k$ 维实平面 (当 $k = 2n$ 时, 这是一个点). 如果这些向量 a^μ 在 $\mathbb{C}$ 上线性无关 (设其个数 $k \leqslant n$), 则由复方程组

$$(z, a^\mu) = b_\mu, \quad \mu = 1, \cdots, k, \tag{9}$$

所描述的点集被称之为余维 k 的*复平面*, 或者维数 $m = n - k$ 的复平面. 因为这个方程组可以改写为 $2k$ 个实的线性方程组 $\mathrm{Re}(z, a^\mu) = \mathrm{Re}\ b_\mu, \mathrm{Re}(z, ia^\mu) = \mathrm{Im}\ b_\mu$, 以及向量组 $a^\mu, ia^\mu (\mu = 1, \cdots, k)$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关, 故而这是实余维 $2k$ 的平面.

但是并非所有偶实余维的平面 $\Pi \subset \mathbb{C}^n$ 都是复平面, 这是由于引进的复结构所产生的非对称性引起的. (我们在前面已谈到过它). 对于包含了点 $z = 0$ 的平面, 可以找到一个简便的判别办法: *平面 $\Pi \ni 0$ 是个复平面当且仅当对任意 $z \in \Pi$, 向量 $iz \in \Pi$.*

必要条件是显然的, 因为由条件 $(z, a^\mu) = 0$ 得到了 $(iz, a^\mu) = 0$. 反之, 如果 Π 满足这个条件, 则由 $z \in \Pi$ 得出 $(\alpha + i\alpha')z \in \Pi$, 其中 $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ 为任意数, 就是说, Π 是 $\mathbb{C}^n$ 的一个复子空间. 如果在 Π 的正交补空间 (关于 $\mathbb{C}^n$ 中的埃尔米特度量) 中选取基 $a^1, \cdots, a^k$, 则 z 属于 Π 的这个性质由方程组 $(z, a^\mu) = 0, \mu = 1, \cdots, k$ 给出, 这意味着 Π 是个复平面.

例题. 平面 $\Pi_1 = \{z \in \mathbb{C}^2 : z_1 = z_2\}$ 是复的, 这是因为由 $z_1 = z_2$ 得出 $iz_1 = iz_2$. 平面 $\Pi_2 = \{z \in \mathbb{C}^2 : z_1 = \overline{z}_2\}$ 尽管与 Π_1 一样具实维 2, 但并非复的平面, 因为如果 $z_1 = \overline{z}_2$, 则当 $z_2 \neq 0$ 时, $iz_1 \neq \overline{iz_2}$.

我们注意到, 与超平面不同, 余维为 $k > 1$ 的实平面不必一定包含有 (非平凡的) 复平面. 对于平面 $\Pi \ni 0$ 具最大维数的复平面 $\Pi^c \subset \Pi$ 显然是 Π 与平面 $i\Pi$ 的交集, 后者由向量 iz 组成, 其中的 $z \in \Pi$. 如果 $k > 1$, 交集 $\Pi^c = \Pi \bigcap i\Pi$ 可能会变为 $z = 0$ (就像上面例题中的平面 Π_2).

称复一维平面为*复直线*[1]. 它们由 $n - 1$ 个复线性方程所定义, 并可写成下面的形状:

$$\frac{z_1 - z_1^0}{\omega_1} = \cdots = \frac{z_n - z_n^0}{\omega_n}, \tag{10}$$

其中 $z^0 = (z_1^0, \cdots, z_n^0)$ 是该直线上的一个点, 而 $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \neq 0$ 为给出其方向的一个向量 (它被确定到一个复的比例因子). 以 ζ 表示 (10) 中比的公共量, 则此复直线方程组可改写为参数形式:

$$z = z^0 + \omega\zeta. \tag{11}$$

在 $\mathbb{C}^n$ 中我们有通常的*欧几里得度量*, 在此度量下两个点 z 和 w 之间的距离等

[1] 事实上, 这是实二维平面.

于 $|z-w|$; 这个度量的埃尔米特形式为

$$ds^2 = \sum_{\nu=1}^{2n} dx_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^{n} |dz_\nu|^2, \tag{12}$$

其中 $|dz_\nu|^2 = dx_\nu^2 + dx_{n+\nu}^2$. 有时, 我们会考虑这种度量, 在其下两点 z 和 w 之间的距离具有形式

$$\|z-w\| = \max_\nu |z_\nu - w_\nu|. \tag{13}$$

* 证明, $\rho(z,w) = \|z-w\|$ 满足度量公理: a) $\rho(z,w) = \rho(w,z)$ (对称公理); b) $\rho(z,w) \geqslant 0$, 且等号成立仅当 $z=w$; c) $\rho(z,w) \leqslant \rho(z,w') + \rho(w',w)$ (三角公理) *

在度量 (13) 下的球 $\{\|z-a\|<r\}$ 表示了在复直线 $\mathbb{C}(z_\nu)$ 上圆盘 $\{|z_\nu - a_\nu| < r\}$ 的乘积, 称其为*多圆盘* (参看下面的小节). 相应于此, 度量 (13) 也被称做*多圆盘度量*. 下面显然的双重不等式

$$\|z-w\| \leqslant |z-w| \leqslant \sqrt{n}\|z-w\| \tag{14}$$

表明, 在 $\mathbb{C}^n$ 所引进的两个度量给出了 $\mathbb{C}^n$ 中同一个拓扑.

最后, 我们来描述空间 $\mathbb{C}^n$ 的*紧化*, 即添加其无穷远处的元素. 为此, 令

$$z_\nu = \frac{\omega_\nu}{\omega_0} \quad (\nu = 1, \cdots, n; \omega_0 \neq 0), \tag{15}$$

以在其中引进齐次坐标 $\omega_0, \cdots, \omega_n$. 这样的坐标确定点 z 到一个复比例因子 $\lambda \neq 0$, 并且反过来, 任意数组 $\omega = (\omega_0, \cdots, \omega_n), \omega_0 \neq 0$ 以及它的比例数组 $\lambda\omega$ 按公式 (15) 对应了同一个点 $z \in \mathbb{C}^n$. 除去这个齐次坐标 ω_0 的特定情形, 我们在 $\mathbb{C}^n$ 中添加上*非正常元素* (即无穷远元素), 它们对应了形如 $(0, \omega_1, \cdots, \omega_n) \neq 0$ 的数组. 于是任意数组 $\omega = (\omega_0, \cdots, \omega_n) \neq 0$ 对应于某个空间的点; 我们称这个空间为*复射影空间*, 以 $\mathbb{CP}^n$ 表示它, 或简单地记为 $\mathbb{P}^n$. 更准确地说, 不是那些点组 ω 自身的点, 而是它们按下述关系的等价类: $\omega' \sim \omega''$, 如果这些数组成比例, 即 $\omega'' = \lambda\omega'$, 其中 $\lambda \neq 0$ 为某个复数. 包含了数组 ω 的等价类被记作 $[\omega]$.

在紧化下, 我们对 $\mathbb{C}^n$ 补充了点 $[0, '\omega]$, 其中 $'\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \neq 0$. 这些点可以等同于等价类 $['\omega]$, 它们的集合显然代表了奇异的 $n-1$ 维射影空间, 记其为 $\mathbb{P}_\infty^{n-1}$. 因此,

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n + \mathbb{P}_\infty^{n-1}, \tag{16}$$

而且只在 $n=1$ 情形的紧化中才补充了一个单点: $\mathbb{P}^1 = \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} + \{\infty\}$.

* 证明, 任意复直线 $l \subset \mathbb{C}^n$ 在紧化时补充了一个单点. *

对等价类 $[\omega]$ 有一个好的几何表示, 它给出了 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中一条通过原点的复直线:

$$\frac{z_1}{\omega_0} = \cdots = \frac{z_{n+1}}{\omega_n},$$

它的方向 $\omega=(\omega_0,\cdots,\omega_n)$ 也确定到一个复数因子 $\lambda\neq 0$, 而与其不等价的数组对应于不同的直线. 因此, $\mathbb{P}^n$ 也可表示为 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中通过原点的复直线的集合. 特别地, $\mathbb{C}^n$ 中的点对应于 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中那些 $\omega_0\neq 0$ 的过原点的直线, 而无穷远点对应于 $\omega_0=0$ (垂直于向量 $(1,0,\cdots,0)\in\mathbb{C}^{n+1}$) 的那些直线.

直线 $l:z=\omega\zeta$ $(\omega\in\mathbb{C}^{n+1},\zeta\in\mathbb{C})$ 完全由它与球面 $S^{2n+1}=\{z\in\mathbb{C}^{n+1}:|z|=1\}$ 的交所描述. 如果 (不失一般性) 设 $|\omega|=1$, 那么这个交集由条件 $|\omega\zeta|=|\zeta|=1$ 决定, 它代表了复直线 l 上的一个圆. 将这样相交出的圆 $l\bigcap S^{2n+1}$ 粘合为一个点,[1)]我们又得到了 $\mathbb{P}^n$ 的一个表示. 这是对所熟知的实射影空间 $\mathbb{RP}^n$ 模型的一个复类比; 在实的情形, 我们把 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的实直线与球面交出的一对点粘合为一个点.

所描述的这个模型让我们在空间 $\mathbb{P}^n$ 上可以引进一个自然的度量. 就是说, 对于点 $[\omega]$ 和 $[\omega']$ 之间的距离我们采用 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中两个圆 γ 和 γ' 之间的欧几里得距离. 其中的 γ 和 γ' 分别代表在球面 S^{2n+1} 上的这两个点 (我们假定 $|\omega|=|\omega'|=1$). 初等的计算给出

$$\begin{aligned}\rho^2([\omega],[\omega'])&=\min_{\theta,\theta'}|\omega e^{i\theta}-\omega' e^{i\theta'}|^2\\&=\min_{\theta,\theta'}2\{1-\mathrm{Re}[(\omega,\omega')e^{i(\theta-\theta')}]\}\\&=2(1-|(\omega,\omega')|),\end{aligned}$$

或者, 如果 ω 和 ω' 在具有任意模时,

$$\rho^2([\omega],[\omega'])=2\left(1-\frac{|(\omega,\omega')|}{|\omega||\omega'|}\right). \tag{17}$$

如果在这里假定 $\omega'=\omega+d\omega$ 并舍去关于 $|d\omega|$ 的二阶以上的小量, 我们便得到相应的度量形式:

$$ds^2=\frac{(\omega,\omega)(d\omega,d\omega)-(\omega,d\omega)(d\omega,\omega)}{(\omega,\omega)^2}. \tag{18}$$

称这个度量为富比尼 - 施图迪 (Fubini-Study) 度量, 它是在 $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{P}^1$ 上的球面度量的高维推广 (如果在 $n=1$ 时引进局部坐标 $z=\omega_1/\omega_0$, 则 (18) 可改写为 $ds^2=|dz|^2/(1+|z|^2)^2$, 这正是球面度量形式).

* 1. 证明, 由形式 (17) 定义的度量形式满足距离公理. (提示: 在证明三角不等式时利用集合间的距离概念.)

2. 有时对于两个点 $[\omega],[\omega']\in\mathbb{P}^n$ 间的距离我们采用量 $d=\arccos\dfrac{|(\omega,\omega')|}{|\omega||\omega'|}$. 证明 d 可以利用公式 $d=2\arcsin\dfrac{\rho}{2}$ 通过 ρ 表示, 它等于代表 $[\omega]$ 和 $[\omega']$ 的 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中复直线上相应的实直线间的最小夹角. *

1) 球面 S^{2n+1} 具实维 $2n+1$, 而粘合圆为一个点使其维数减少了 1. 因此, 我们所得到的模型的实维数等于 $2n$.