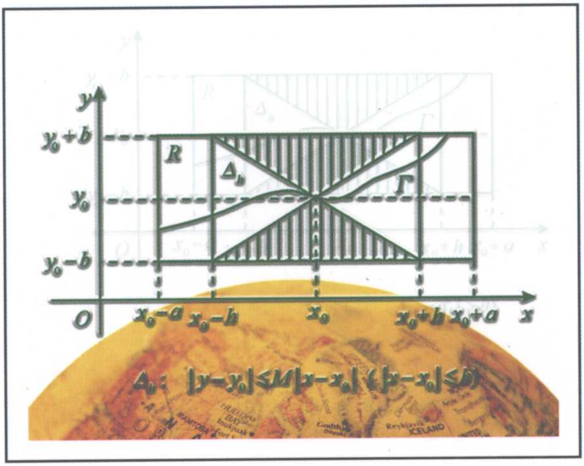
高等学校数学教材系列丛书

常微分方程



主　编　王素云　李千路

副主编　臧子龙　霍锦霞

西安电子科技大学出版社　http://www.xduph.com

高等学校数学教材系列丛书

常微分方程

主　编　王素云　李千路

副主编　臧子龙　霍锦霞

西安电子科技大学出版社

2008

内 容 简 介

本书共分为8章，内容包括基本概念、初等积分法、线性方程、常系数线性方程、存在和唯一性定理、一般理论、奇解理论和定性理论.

本书在编写过程中注重数学模型的建立，通过建立数学模型，培养学生分析问题、解决问题的能力.

本书示例丰富、内容全面，可作为数学类各专业常微分方程课程的教学用书或参考书.

★本书配有电子教案，需要的教师可与出版社联系，免费提供.

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/王素云，李千路主编. —西安：西安电子科技大学出版社，2008.5

高等学校数学教材系列丛书　ISBN 978-7-5606-2016-9

Ⅰ. 常…　Ⅱ. ①王…　②李…　Ⅲ. 常微分方程—高等学校—教材

Ⅳ. O175.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第037949号

策　　划　毛红兵

责任编辑　王　瑛　毛红兵

出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电　　话　(029)88242885　88201467　邮编　710071

http://www.xduph.com　E-mail：xdupfxb001@163.com

经　　销　新华书店

印刷单位　陕西天意印务有限责任公司

版　　次　2008年5月第1版　2008年5月第1次印刷

开　　本　850毫米×1168毫米　1/32　印张9.875

字　　数　243千字　印　数　1～4000册

定　　价　17.00元

ISBN 978-7-5606-2016-9/O·0092

XDUP 2308001-1

前　言

当我们描述实际对象的某些特性随时间(或空间)而演变的过程、分析它的变化规律、预测它的未来性态、研究它的控制手段时，通常要建立对象的动态模型．建模时首先要根据建模目的和对问题的具体分析作出简化假设，然后按照对象内在的或可以类比的其他对象的规律列出微分方程，求出方程的解并将结果翻译回实际对象，就可以进行描述、分析、预测或控制了．微分方程的基本问题在于求解和研究解的各种属性，而微积分的产生和发展与人们求解微分方程的需要有密切的关系．所谓微分方程，就是联系着自变量、未知函数及其导数在内的方程．物理学、化学、生物学、工程技术和某些社会科学中的大量问题一旦加以精确的数学描述，往往就会出现微分方程．在本书的各章中，将举出引导微分方程的各种例子．如果将一个实际问题转化为微分方程，那么问题的解决就有赖于对微分方程的研究．也就是说，在数学本身的理论探讨中，微分方程是常用的求解工具．

在科学研究中，建立数学模型是一种重要的方法，它对培养学生的能力与科学素质有着重要的作用．在多年常微分方程的教学实践中，我们深深感受到数学模型的建立对教学所起的重要作用以及对学生产生的吸引力，这就促使我们编写了一本突出数学模型思想的常微分方程教材．

本书注重数学模型的建立．微分方程是突出数学模型思想的理想内容，通过学习常微分方程不仅能让学生对数学应用的广泛性有更深刻的认识，而且可提高学生分析问题、解决问题的能

力．全书共分为 8 章．第 1 章(基本概念)简要介绍了微分方程及相关的定义和几何解释，然后以实际问题为例，引导出微分方程以及数学模型．在导出微分方程之后立即对其进行求解并对结果进行分析．第 2 章以恰当方程和积分因子为主线介绍了各种求解微分方程的方法．第 3 章讲述了线性方程的一般理论．首先针对这类具有特殊结构的方程，证明了初值问题解的存在与唯一性，然后在此基础上展开讨论，用逐步逼近法对线性方程的解的存在与唯一性定理进行了证明．本章除了介绍关于线性方程的基本内容外，还增加了关于边值问题和周期解的讨论．第 4 章介绍了常系数线性方程．第 5 章讲述了存在和唯一性定理．第 6 章进一步讲述了微分方程更为一般的理论．第 7 章阐述了奇解理论．第 8 章比较简要地介绍了现代定性理论中的基本思想和方法．这些内容有利于培养学生对一般微分方程进行分析的能力．为便于学生掌握所学内容，大部分章节后都安排了一定数量的习题．

本书可作为数学类各专业常微分方程课程的教材，也可供有关专业人员参考．

衷心感谢西安电子科技大学出版社的同志，他们对本书的编写提出了富有启发性的建议．

由于编者水平有限，书中不足之处在所难免，敬希广大读者批评指正．

编　者

2008 年 3 月

目　录

第1章 基本概念

本书主要介绍常微分方程的一些最基本的理论和方法. 第1章首先给出微分方程及其解的定义，并予以相应的几何解释. 实际上，这也是为以后各章进一步地学习所作的必要准备.

1.1 微分方程及其解的定义

微分方程是一门十分活跃的数学分支. 利用数学手段研究自然现象和社会现象，或解决工程技术问题，一般需要对问题建立数学模型，再对它进行分析求解或近似计算，然后按实际的要求对所得的结果做出分析和探讨. 数学模型最常见的表达方式是包含自变量和未知函数的函数方程. 在很多情形下，这类方程还包含未知函数的导数，它们就是微分方程. 例如，人口定量分析、生物种群的发展变化以及在交通环境下用牛顿第二运动定律列出的质点运动方程等都是微分方程，其中质点运动方程中的未知函数代表质点的坐标，它们对自变量(时间)的一阶导数和二阶导数分别表示质点的运动速度和加速度.

现在，我们给出如下的定义.

定义 1.1 凡是联系自变量 x，与这个自变量的未知函数 $y=y(x)$ 和它的导数 $y'=y'(x)$以及直到 n 阶导数 $y^{(n)}=y^{(n)}(x)$ 在内的方程

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

叫做**常微分方程**，其中导数实际出现的最高阶数 n 叫做常微分方程(1.1)的**阶**.

注 1.1 这里 F 是一个关于变元 x，y，y'，…，$y^{(n)}$ 的给定的已知函数。因此，诸如 $y'(x)=y(y(x))$ 和 $y'(x)=y(x-1)$ 之类的方程就不是常微分方程.

例如，下面的方程都是常微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}y=x^3 \quad (x\neq 0) \tag{1.2a}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^3+\cos x \tag{1.2b}$$

$$yy''+(y')^2+1=0 \tag{1.2c}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+a^2\theta=0 \tag{1.2d}$$

在前三个方程中，x 是自变量，y 是未知函数；在最后一个方程中，t 是自变量，θ 是未知函数(而 a 是大于零的常数). 前两个方程都是一阶的，后两个方程都是二阶的.

在常微分方程(1.1)中，如果左端函数 F 对未知函数 y 和它的各阶导数 y'，…，$y^{(n)}$ 的全体而言是一次的，则称它是**线性**常微分方程，否则称它是**非线性**常微分方程. 例如，常微分方程(1.2a)、(1.2b)和(1.2d)是线性的，而(1.2c)是非线性的.

我们在定义 1.1 中给微分方程(1.1)冠以“常”字，指的是未知函数是一元函数. 如果未知函数是多元函数，那么在微分方程中将出现偏导数，这种方程自然叫做**偏微分方程**.

例如，方程

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}+f=0$$

是一阶线性偏微分方程，其中 x、y 和 z 为自变量，而 $f=f(x,y,z)$ 为未知函数；方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

为二阶线性偏微分方程，其中 x 和 y 为自变量，而 $u=u(x, y)$ 为未知函数.

本书主要介绍常微分方程，因此，有时将后面出现的常微分方程简称为方程.

定义 1.2 设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 J 上连续，且有直到 n 阶的导数. 如果把 $y=\varphi(x)$ 及其相应的各阶导数代入方程(1.1)，得到关于 x 的恒等式，即

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)] \equiv 0$$

对一切 $x\in J$ 都成立，则称 $y=\varphi(x)$ 为微分方程(1.1)在区间 J 上的一个**解**.

例如，从定义 1.2 可以直接验证：

(1) 函数 $y=\frac{1}{5}x^4$ 是微分方程(1.2a)在区间$(-\infty, 0)$或区间$(0, \infty)$上的一个解；$y=\frac{1}{x}+\frac{1}{5}x^4$ 也是这个方程在同样区间上的一个解，而且对任意的常数 C，有 $y=\frac{C}{x}+\frac{1}{5}x^4$，都是这个方程在同样区间上的解. 但 $y=C+\frac{1}{5}x^4 (C\neq 0)$ 不是这个方程的解.

(2) $y=\frac{1}{4}x^4+\sin x$ 是微分方程(1.2b)在区间$(-\infty,\infty)$上的一个解；而 $y=\frac{1}{4}x^4+\sin x+C$ 也是这个方程在区间$(-\infty, \infty)$上的一个解，其中 C 为任意常数. 但 $y=\frac{1}{4}x^4+\cos x+C$ 不是这个方程的解.

(3) 函数 $\theta=3\sin at$ 和 $\theta=7\cos at$ 都是方程(1.2d)在区间$(-\infty, \infty)$上的解，而且对任意的常数 C_1 和 C_2，有

$$\theta = C_1 \sin at + C_2 \cos at$$

也是这个方程在区间$(-\infty, \infty)$上的解.

从上面的讨论中可见，微分方程的解可以包含一个或几个任意常数(与方程的阶数有关)，而有的解不包含任意常数. 为了确切表达任意常数的个数，我们需要下面的定义.

定义 1.3 设 n 阶微分方程(1.1)的解

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n) \tag{1.3}$$

包含 n 个**独立的**任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$，则称它为**通解**，这里所说的 n 个任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是独立的，其含义是雅可比(Jacobi)行列式

$$\frac{D[\varphi, \varphi', \cdots, \varphi^{(n-1)}]}{D[C_1, C_2, \cdots, C_n]} \overset{\text{def}}{=\!=} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial C_1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial C_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi}{\partial C_n} \\ \dfrac{\partial \varphi'}{\partial C_1} & \dfrac{\partial \varphi'}{\partial C_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi'}{\partial C_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi^{n-1}}{\partial C_1} & \dfrac{\partial \varphi^{n-1}}{\partial C_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi^{n-1}}{\partial C_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

其中

$$\begin{cases} \varphi = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n) \\ \varphi' = \varphi'(x, C_1, C_2, \cdots, C_n) \\ \quad\vdots \\ \varphi^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \cdots, C_n) \end{cases}$$

如果微分方程(1.1)的解 $y=\varphi(x)$不包含任意常数，则称它为**特解**.

显然，当任意常数被确定之后，通解也就变成了特解. 例如，由定义 1.3 可知，$\theta = C_1 \sin at + C_2 \cos at$ 是方程(1.2d)的通解，而$\theta = 3 \sin at$ 和$\theta = 7 \cos at$ 分别是该方程的特解.

下面我们以简单的**自由落体**为例，说明微分方程及其通解和

特解的一些实际背景. 所谓自由落体运动，指的是只考虑重力对落体的作用，而忽略空气阻力等其他外力的影响，参看图 1.1.

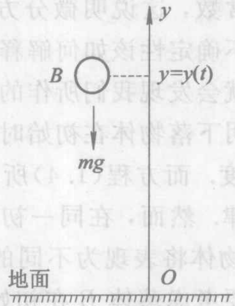


图 1.1

注意，落体 B 作垂直于地面的运动. 因此，我们取坐标原点在地面上而且垂直向上为 y 轴，使落体 B 的位置为 $y=y(t)$. 这样，问题就归结为寻求满足自由落体规律的函数 $y=y(t)$.

因为 $y=y(t)$ 表示 B 的位置坐标，所以它对 t 的一阶导数 $y'=y'(t)$ 表示 B 的瞬时速度 $v=v(t)$，而二阶导数 $y''=y''(t)$ 则表示 B 的瞬时加速度 $a=a(t)$. 假设落体 B 的质量为 m，重力加速度为 g(在地面附近它近似于常数，通常取 $g=9.80\ \mathrm{m/s^2}$)，则由牛顿第二运动定律得出：

$$my''=-mg$$

上式右端出现负号，是由于 B 所受的重力与 y 轴的正方向相反. 这样我们得到一个微分方程：

$$y''=-g \tag{1.4}$$

因此，为了得到落体的运动 $y=y(t)$，需要求解这个微分方程.

事实上，只要在微分方程(1.4)的两侧对 t 积分一次，就有

$$y'=-gt+C_1 \tag{1.5}$$

其中，C_1 是一个任意常数. 对式(1.5)可以再进行积分，即得

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2 \tag{1.6}$$

其中，C_2 是另一个任意常数. 易知式(1.6)是微分方程(1.4)的通解.

通解式(1.6)所表示的是自由落体的一般运动. 在通解式(1.6)中包含两个任意常数，这说明微分方程(1.4)有无穷多个解. 对这种求解结果的不确定性该如何解释呢？如果检查一下我们最初对问题的提法，就会发现我们所作的唯一假定是物体作自由落体运动，既没有指明下落物体在初始时刻 t_0 的位置，又没有给出它在初始时刻的速度. 而方程(1.4)所表达的只是自由落体在瞬时时刻 t 的运动规律. 然而，在同一初始时刻从不同的高度或初始速度自由下落的物体将表现为不同的运动. 因此，为了确定相应的运动，我们需要考虑落体 B 在初始时刻(不妨设 $t_0=0$)的位置和速度，即下面的**初值条件**：

$$y(0)=y_0,\quad y'(0)=v_0 \tag{1.7}$$

其中，y_0 和 v_0 是已知的数据(通常由测量得到).

现在，把初值条件式(1.7)分别代入式(1.6)和式(1.5)，我们可以得到 $C_2=y_0$ 和 $C_1=v_0$. 这样，在初值条件式(1.7)下，微分方程(1.4)有唯一确定的解：

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0 \tag{1.8}$$

因此它描述了具有初始高度 y_0 和初始速度 v_0 的自由落体运动.

我们称式(1.8)是**初值问题**式(1.4)与(1.7)的解，亦即初值问题：

$$\begin{cases} y''=-g \\ y(0)=y_0,\ y'(0)=v_0 \end{cases} \tag{1.9}$$

的解. 初值问题又叫**柯西问题**.

再看一例，一曲线通过点(1，2)，且在该曲线上任意点 $M(x,\ y)$处的切线斜率为 $2x$，求该曲线的方程.

解 设所求曲线方程为 $y=y(x)$，按题意，未知函数 $y(x)$应满足关系式：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$$

此外，$y(x)$还应满足下列条件：

当 $x=1$ 时，$y=2$. 利用微积分知识易得其解为

$$y = x^2 + 1$$

从上面简单的实例分析中，可以得到下面的启示：

第一，微分方程的求解与一定的积分运算相联系. 因此常把求解微分方程的过程称为积分一个微分方程，而把微分方程的解叫做**积分**. 由于每进行一次不定积分运算，就会产生一个任意常数，因此就微分方程本身的积分(不顾及定解条件)而言，n 阶微分方程的解应该包含 n 个任意常数.

第二，微分方程所描述的是物体运动的瞬时(局部)规律. 求解微分方程，就是从这种瞬时(局部)规律出发，去获得运动的全过程. 为此，需要给定运动的初始状态(即如上面所说的初值条件)，借以确定运动的全过程(它的未来，甚至它的过去). 对于 n 阶微分方程(1.1)，初值条件的一般提法是：

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{1.10}$$

其中，x_0 是自变量所取定的某个初值，而 $y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}$ 是未知函数及其相应导数所取定的初值. 不失一般性，n 阶微分方程的初值问题可以写成如下形式：

$$\begin{cases} y^{(n)} = F(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{1.11}$$

那么当函数 F 满足什么条件时，初值问题式(1.11)的解是存在的，或者更进一步，是存在而且唯一的. 这是常微分方程理论中的一个基本问题. 在第 5 章中我们将就 $n=1$ 的情形证明如下的结果：只要 F 是连续的，初值问题式(1.11)的解就是(局部)存在的，而且将在某些附加条件下证明解的存在和唯一性. 再把这些

结果进一步推广到 $n \geqslant 2$ 的情形.

除了初值条件外，另外一种常见的定解条件是边值条件.

最后，我们对 n 阶微分方程的通解关于 n 个任意常数的独立性作一点说明.

一个 n 阶微分方程的通解包含 n 个独立的任意常数. 反之，设 $y=g(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ 是充分光滑的函数族，其中 x 是自变量，而 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是 n 个独立的参数(任意常数)，则存在一个形如式(1.1)的 n 阶微分方程，使得它的通解恰好是上面的函数族 $y=g(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$.

我们把这个一般结论的证明留给读者(习题 1.1 的第 4 题)，它的证明方法与例 1.8 的讨论是类似的.

例 1.1 对于 $x \geqslant a(a>0)$，$f(x)$ 连续可微且恒有 $f(x)>0$，设 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b(b>a)$ 及 x 轴所围图形绕 x 轴旋转所成体积为

$$v(b)=\frac{1}{3}\pi\left[b^2 f(b)-f(a)\right]$$

试建立 $y=f(x)$ 的微分方程.

解 事实上，$v(b)=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$，由题设又有

$$\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\pi\left[b^2 f(b)-f(a)\right]$$

上式对于每点 $b(b>a)$ 都成立，两边对 b 求导得

$$f'(b)=3\frac{f^2(b)}{b^2}-2\frac{f(b)}{b}$$

改用惯用的符号：

$$f'(x)=3\frac{f^2(x)}{x^2}-2\frac{f(x)}{x}$$

这就是所要建立的微分方程.

例 1.2 试求在 (x, y) 平面上过坐标原点的一切圆所满足的

微分方程.

解 平面上经过原点的圆族具有方程:

$$(x+a)^2+(y+b)^2=a^2+b^2 \tag{1.12}$$

其中, a 和 b 是两个任意常数. 在式(1.12)中, 把 y 看成 x 的函数, 再对 x 接连求导两次, 并且把求导结果与式(1.12)联立, 得到:

$$\begin{cases}(x+a)+(y+b)y'=0\\ 1+y'^2+(y+b)y''=0\\ x^2+2ax+y^2+2by=0\end{cases} \tag{1.13}$$

从式(1.13)中消去 a 和 b, 就得到所求的微分方程:

$$(x^2+y^2)y''-2(1+y'^2)(xy'-y)=0$$

例 1.3 求曲率处处为正数 a 的曲线方程.

解 设此曲线方程为 $y=y(x)$. 由微分学的知识知道, $y=y(x)$ 在点 x 处的曲率为 $|y''(x)(1+y'^2(x))^{-3/2}|$. 由此知此曲线应满足:

$$|y''(x)(1+y'^2(x))^{-3/2}|=a$$

它是一个微分方程.

下面我们证明: 设 $y=\varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ 是方程(1.1)的通解, 则利用初值条件式(1.10)可以确定其中的任意常数:

$$\begin{cases}C_1^0=C_1(x_0, y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)})\\ C_2^0=C_2(x_0, y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)})\\ \qquad\vdots\\ C_n^0=C_n(x_0, y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)})\end{cases}$$

使得 $y=\varphi(x, C_1^0, C_2^0, \cdots, C_n^0)$ 是初值问题式(1.1)与(1.10)的解.

事实上, 由于分析方法的限制(这里是由于隐函数存在定理), 一般只能在局部范围内讨论通解. 例如, 我们假定在点

$$P: x = \xi, C_1 = a_1, \cdots, C_n = a_n$$

的某个邻域 $N(P)$ 内考虑通解 $y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$. 这样，在 $N(P)$ 内有

$$\begin{cases} y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n) \\ y' = \varphi'(x, C_1, C_2, \cdots, C_n) \\ \vdots \\ y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \cdots, C_n) \end{cases} \tag{1.14}$$

令

$$\begin{cases} \eta = \varphi(\xi, a_1, a_2, \cdots, a_n) \\ \eta' = \varphi'(\xi, a_1, a_2, \cdots, a_n) \\ \vdots \\ \eta^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(\xi, a_1, a_2, \cdots, a_n) \end{cases}$$

因为在 P 点 Jacobi 行列式

$$\frac{D[\varphi, \varphi', \cdots, \varphi^{(n-1)}]}{D[C_1, C_2, \cdots, C_n]} \neq 0$$

所以利用隐函数存在定理，我们可以在 P 点近旁从式(1.14)反解出

$$\begin{cases} C_1 = C_1(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \\ C_2 = C_2(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \\ \vdots \\ C_n = C_n(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \end{cases}$$

而且满足条件：

$$\begin{cases} a_1 = C_1(\xi, \eta, \eta', \cdots, \eta^{(n-1)}) \\ a_2 = C_2(\xi, \eta, \eta', \cdots, \eta^{(n-1)}) \\ \vdots \\ a_n = C_n(\xi, \eta, \eta', \cdots, \eta^{(n-1)}) \end{cases}$$

这样，对$(\xi, \eta, \eta', \cdots, \eta^{(n-1)})$近旁的初值$(x_0, y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)})$可以确定常数：