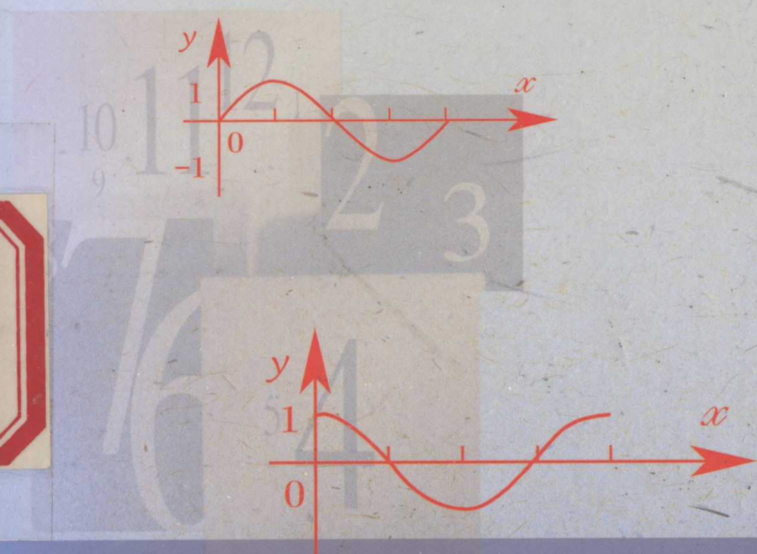
面向21世纪五年制高等职业教育教材

SHUXUE

数学

第二册

夏国斌 主编



安徽大学出版社

面向21世纪五年制高等职业教育教材

数　学

第二册

主编　夏国斌

主审　韩

安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学·第二册/夏国斌.－合肥:安徽大学出版社,2002.2
面向21世纪五年制高等职业教育教材
ISBN 7－81052－506－9

Ⅰ.数…　Ⅱ.夏…　Ⅲ.高等数学－高等学校:技术学校－教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第098835号

面向21世纪五年制高等职业教育教材

数学　第二册　　　　夏国斌　主编

出版发行	安徽大学出版社 (合肥市肥西路3号　邮编230039)	**印　刷**	合肥瑞丰印务有限公司
联系电话	编辑部 0551－5108241 发行部 0551－5107784	**开　本**	787×1092　1/16
		印　张	11.25
电子信箱	ahdxchps@mail.hf.ah.cn	**字　数**	243千
责任编辑	阮守武　朱丽琴	**版　次**	2002年2月第1版
封面设计	孟献辉	**印　次**	2002年2月第1次印刷

ISBN 7－81052－506－9/G·129　　　　**定价** 14.60元

编写说明

自2000年起，安徽省教育厅决定举办初中起点的五年制高等职业教育，这一举措大大促进了我省职业教育的改革和发展，为了适应我省高职教育的发展，提高高职的教学质量，安徽省中专数学教研会组织编写了我省五年制高等职业教育《数学》教材，全书共分三册。第一册：集合，数理逻辑初步，不等式，函数；第二册：向量，复数，几何，排列、组合和二项式定理；第三册：数列，微积分。

安徽省教育厅教秘［2001］330号文件规定本书为安徽省五年制高等职业教育的推荐教材。

这套教材编写的指导思想是：重视基础、突出应用、适度更新、增加弹性。

这套教材对传统的初等数学教学内容进行了精选，把在理论上、方法上以及现代生产与生活中得到广泛应用的知识作为各专业必学的基本内容。函数与几何知识以及研究函数与几何的方法是这套教材的核心。教材在第一章前给出了本教材使用的数学符号，并首先学习集合与数理逻辑用语，为学生正确使用数学语言打好基础。教材在学习函数概念、图象、性质的基础上，学习了几个重要初等函数：指数函数、对数函数及三角函数，引进了向量知识，为数形结合，学习解析几何和立体几何打下基础，并为学习专业课程提供应用方便的数学工具。

这套教材采用代数、几何与分析混合编排体系。在编写时，尽力做到“深入浅出”，对重要内容和方法，一方面通过通俗易懂的语言和例子向学生解释，另一方面使这些内容在各个不同的知识中反复出现，以求学生正确掌握。

这套教材有一定弹性，除必学内容外，打“ * ”号的内容供不同专业和学有余力的学生选用。这套教材主要适用于初中起点五年制高等职业教育，同时也可做为对数学知识要求较高的中等职业教育的教学用书或教学参考

书。全书教学时数约为220学时。

本教材由芜湖机械学校夏国斌担任主编，参加第二册编写的有李立众(第一章)、梁继会(第二、三章)、吴方庭(第四、五章)、高山（第六、七、八章)。本教材由安徽省物资学校韩业岚担任主审，参加审稿的有王芳玉、杨光慎、陈红。本教材编写过程中还得到了芜湖机械学校、省电子工业学校、省物资学校、省第一轻工业学校、省化工学校、安庆商业学校、省物价学校、巢湖财政学校、省轻工业学校、省国防科技工业学校、省建材工业学校和省农业机械化学校有关教师和领导的大力支持。省教育厅教科所胡涛、省教育学院朱广化对教材提出了宝贵的意见，在此一并表示深切的感谢！

编写五年制高职教材是新的探索，限于经验和水平加之编写时间仓促，教材中的错误、疏漏和不妥之处在所难免，诚恳希望使用本教材的师生及同行批评指正，使本教材在实践中不断修改、完善。

编　者

2002年1月

目　　录

第一章 平面向量

在平面几何中，方向和距离是两个最基本的几何量，在这一章里，我们将把方向和距离结合起来，引入新的几何量——向量．并研究向量的基本性质和运算．向量也是研究物理等其他自然科学的有效工具．

1.1 平面向量的概念

一、向量的定义和模

在物理学和其他一些学科中，经常遇到一些量，如距离、时间、面积、质量等，在选定度量单位后，就可以用一个实数确切地表示它们，这种只有大小的量称为数量或标量．另外一些量，它们不仅有大小，而且还有方向．

下面以物理学中的位移为例说明这类量的一些性质．

一质点由位置 A 位移：“北偏东 30°，3 个单位”，到达 B 点（如图 1－1）．“北偏东”表示位移的方向，“3 个单位”表示位移的距离．

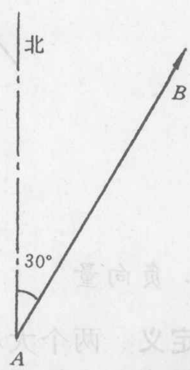


图 1－1

定义 既有大小且有方向的量称为**向量**或**矢量**．向量的大小称为该向量的**模**．以 A 为起点，B 为终点的向量常记为$\overrightarrow{AB}$，也可以用一个小写字母上再加箭头$\vec{a}$，$\vec{i}$，$\vec{v}$或用一个黑体字来表示 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{v}$ 等．向量的模记为$|\overrightarrow{AB}|$或$|\boldsymbol{a}|$．

向量的例子很多，例如，力、速度等都是向量．下面介绍两个特殊向量．

零向量：模等于零的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$，零向量的方向不确定．

单位向量：模等于 1 的向量称为单位向量，与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量记为 $\boldsymbol{l}_a$．

二、平行向量的定义和记号

定义 两个非零向量，若它们方向相同或相反则称这两个**向量平行**，记为 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$或 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，两向量平行也称为**向量共线**(如图 1－2)．

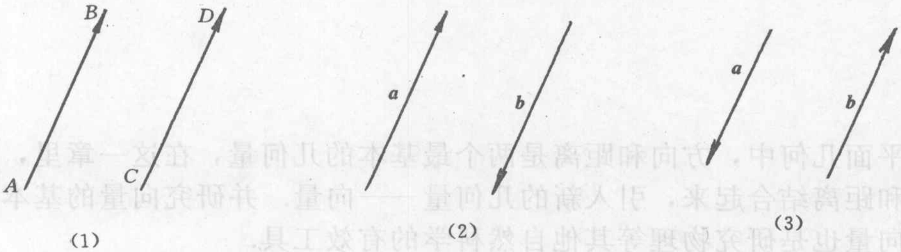


图 1－2

三、两向量相等的定义和负向量的定义

1．相等向量

定义 若两向量大小相等且方向相同则称这两向量相等．向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 相等，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$．通过平移完全重合的向量视为同一向量．

如图 1－3：　　$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}=\boldsymbol{b}$，　如图 1－4：　$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$

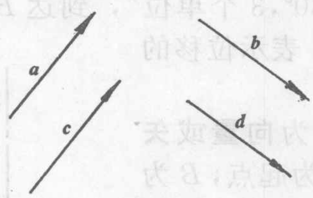


图 1－3

图 1－4

2．负向量

定义 两个大小相等、方向相反的向量互称为**负向量**或互为**相反向量**，记为 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$(如图 1－4)．

例 如图 1－5 所示，设 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，分别写出与向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$相等的向量，写出与$\overrightarrow{AF}$、$\overrightarrow{AB}$平行的向量及负向量．

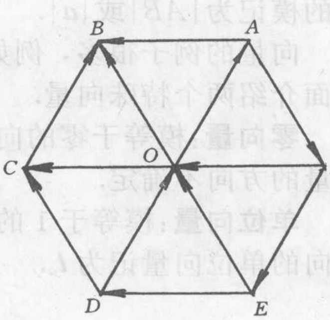


图 1－5

解：因为$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{DO}|=|\overrightarrow{CB}|$且方向相同，

所以　$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DO}$

同理 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EO}$ $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{ED}$

$\overrightarrow{AF}/\!/\overrightarrow{OB}/\!/\overrightarrow{DC}/\!/\overrightarrow{EO}$

$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{OC}/\!/\overrightarrow{FO}/\!/\overrightarrow{ED}$

$\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{EO}$

$\overrightarrow{AB}$无负向量

习题 1—1

1. 一人从点 A 出发，向东走 500m 到达点 B，接着向东偏北 30°走 300m 到达点 C，然后再向东北走 100m 到达点 D，选择适当的比例尺，用向量表示这个人的位移.
2. 已知 D，E，F 是$\triangle ABC$ 各边的中点，分别写出图 1—6 中与$\overrightarrow{DE}$、$\overrightarrow{EF}$、$\overrightarrow{FD}$相等的向量.
3. 如果$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BB'}=\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,那么四边形 $ABB'A'$ 是平行四边形吗？为什么？反之，如果 $ABB'A'$ 是平行四边形，那么$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$吗？
4. 如果 $ABCDEF$ 为正六边形(如图 1—7)，中心为 O，试写出：

   (1) $\overrightarrow{AB}$向量的相等向量；

   (2) $\overrightarrow{OA}$向量的相反向量.

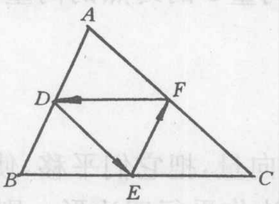


图 1—6

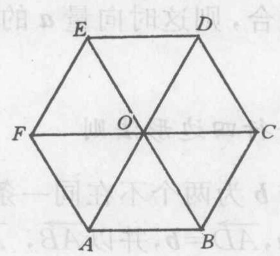


图 1—7

1.2 向量的线性运算

数量可以进行加减乘除等运算，向量也可以进行运算. 在物理学中，对力、速度等向量可按照一定的规则进行加、减等运算. 同样，对一般定义下的向量，也可以进行类似运算. 下面介绍向量的加、减、数乘运算，这些运算统称为向量的线性运算.

一、向量的加法

先观察下例：一质点从 A 位移到点 B，又由点 B 位移到点 C，那么一定存在一个从点 A 到点 C 的位移与两次连续位移的结果相同，如图 1—8，这时我们说：质点从 A 到 C 的位移是质点 A 到 B，再由 B 到 C 两次位移的和.

定义 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，在平面上任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，作向量 $\overrightarrow{AC}$，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(或和向量)，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$(如图 1－9).

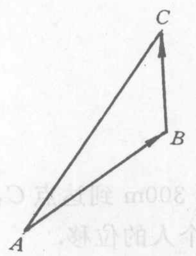


图 1－8

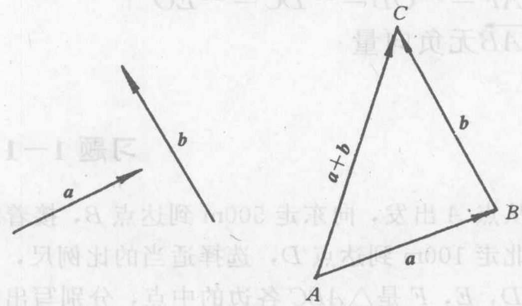


图 1－9

1. 加法的三角形法则

上述求和的定义即为向量加法的三角形法则，即：经平移使向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点与向量 $\boldsymbol{b}$ 的始点重合，则这时向量 $\boldsymbol{a}$ 的始点到向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量，即为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

2. 加法的平行四边形法则

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两个不在同一条直线的向量，把它们平移，使其始点与 A 点重合，得 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，并以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 为邻边作平行四边形，则对角线向量 $\overrightarrow{AC}$ 即为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(如图 1－10).

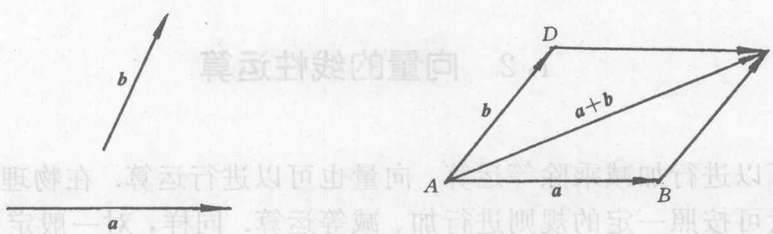


图 1－10

必须注意：

(1) 求两个在同一直线上向量之和也可用三角形法则进行；

(2) 三角形法则同样可以进行求多个向量之和的运算.

例 1 设向量 $\boldsymbol{a}$，模为 2，方向水平向右，向量 $\boldsymbol{b}$，模为 3，方向水平向左，作出向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

作法： 在平面上任取一点 A，则

$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，方向水平向左，模为 1(如图 1—11).

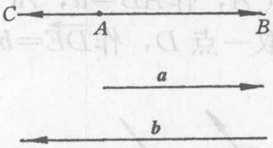


图 1—11

例 2 如图 1—12，有向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$，试作出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$.

作法： 利用向量求和的三角形法则，首尾相接来作出，如图 1—12.

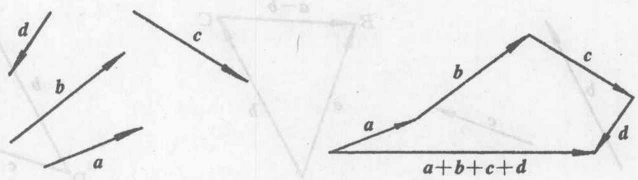


图 1—12

3. 向量加法的运算性质

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(交换律)；

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(结合律).

例 3 一艘船先向东行走 3 公里，接着再向北走 3 公里，求两次位移的和.

解: 作$\overrightarrow{AB}$表示向东走 3 公里，$\overrightarrow{BC}$表示向北走 3 公里，则 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$表示两次位移和(如图 1—13).

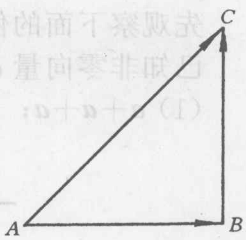


图 1—13

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{BC}|=3$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2}$$

$$=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}\text{(公里)}$$

$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为 45°

所以两次位移和是向东北走 $3\sqrt{2}$ 公里.

二、向量的减法

定义 向量 $\boldsymbol{a}$ 加上向量 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量，称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(如图 1—14).

减法的三角形法则，把两个向量的始点放在一起，则这两个向量的差是减

向量的终点到被减向量的终点的向量(如图 1－14).

例 4 如图 1－15 所示，已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，求作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

作法： 在平面上任取一点 A，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

如图 1－16，在平面上任取一点 D，作$\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{DF}=\boldsymbol{c}$，则$\overrightarrow{FE}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

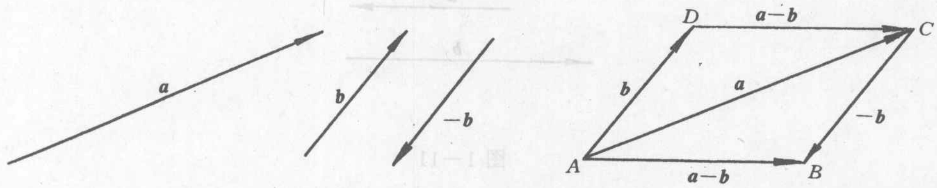
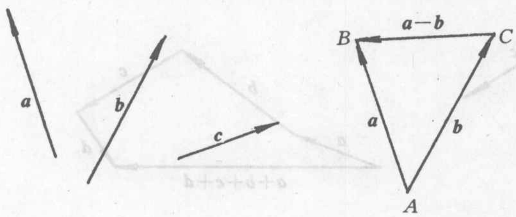


图 1－14



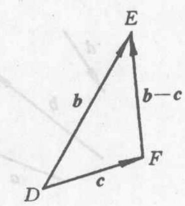


图 1－15　　　　图 1－16

三、向量的数乘运算

先观察下面的例子.

已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，可作出：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$;　　　　(2) $(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})$.

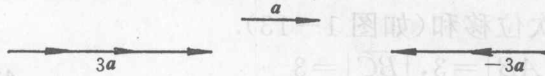


图 1－17

3 个 $\boldsymbol{a}$ 连加，记作 $3\boldsymbol{a}$,3 个$(-\boldsymbol{a})$连加记作$-3\boldsymbol{a}$，由图 1－17 可以看到，3 个 $\boldsymbol{a}$ 连加是一向量，它的长等于 $3|\boldsymbol{a}|$，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同；3 个$(-\boldsymbol{a})$连加是一个向量，它的长等于 $3|\boldsymbol{a}|$，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

由上面分析，引入数乘向量的定义.

定义 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，其长度 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 当 $\lambda>0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 同方向；当 $\lambda<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 反方向(如图 1－18).

$\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

$\lambda\boldsymbol{a}$ 中的实数 λ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的系数. 数乘向量的

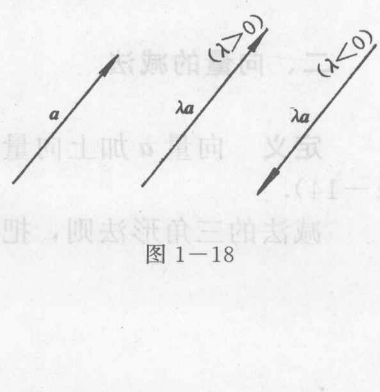


图 1－18

几何意义:把向量 $\boldsymbol{a}$ 沿 $\boldsymbol{a}$ 的方向或 $\boldsymbol{a}$ 的反方向放大或缩小.

数乘向量运算满足下列运算律:

设 λ,μ 为实数,则

(1) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

(2) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加法、减法、数乘的混合运算,称为**向量的线性运算**.

例 5 计算下列各式:

(1) $(-3)\times\frac{1}{3}\boldsymbol{a}$; (2) $3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-4(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$;

(3) $(\lambda+\mu)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(\lambda-\mu)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

解:(1) $(-3)\times\frac{1}{3}\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$

(2) $3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-4(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}+7\boldsymbol{b}$

(3) $(\lambda+\mu)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(\lambda-\mu)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

$=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(\lambda+\mu)\boldsymbol{b}-(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}+(\lambda-\mu)\boldsymbol{b}$

$=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}-\mu\boldsymbol{b}$

$=2\mu\boldsymbol{a}+2\lambda\boldsymbol{b}$

例 6 设 $\boldsymbol{x}$ 是未知向量,解方程

$$4(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})+3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$$

解:原方程变形为

$$4\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

$$7\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{x}=\frac{3}{7}\boldsymbol{b}-\frac{4}{7}\boldsymbol{a}$$

由上节知两向量平行即向量共线,进一步由本节可知,若向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$,任取 $\lambda\in\mathbf{R}$ $(\lambda\neq 0)$,则 $\lambda\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{a}$. 反之,设 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,若 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向,取 $\lambda=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\geqslant 0$,显然,$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,又 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向,即得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,若 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向,取 $\lambda=\frac{-|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\leqslant 0$,显然 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,又 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向,即得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

综合以上分析可得:

定理 若向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线,则有且只有一个实数 λ $(\lambda\neq 0)$,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,反之也成立.

例 7 如图 1—19,$\triangle ABC$ 中,已知 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AE}$,试证:$\overrightarrow{DE}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 共线.

证明:$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AE}-3\overrightarrow{AD}$

$=3(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})=3\overrightarrow{DE}$

所以 $\overrightarrow{DE}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 共线.

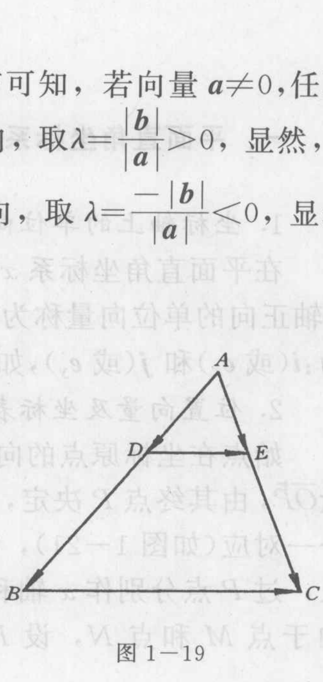


图 1—19

习题 1—2

1. 填空题：

(1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}=$__________；

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}=$__________；

(3) $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=$__________.

2. 一轮渡向北以航速 20km/h 航行，此时东风风速 5m/s，用作图法求轮渡的实际航行速度和方向.

3. 求证：在△ABC 中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$.

4. 已知△ABC，D 为边 BC 的中点，求证：

(1) $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$；

(2) $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{AD}$.

5. 作图证明：

$$\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}+\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}=\boldsymbol{a}$$

6. 化简：

(1) $3(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})+2(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})-4(3\boldsymbol{a})$；

(2) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})$.

7. 判断下列向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是否共线：

(1) $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}$，　$\boldsymbol{b}=-4\boldsymbol{e}$；

(2) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，　$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$　($\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线).

1.3　向量的坐标表示

一、平面直角坐标系下的位置向量

1. 坐标轴上的单位向量

在平面直角坐标系 xOy 中，x 轴正向的单位向量和 y 轴正向的单位向量称为坐标轴上的单位向量，分别记为：$\boldsymbol{i}$(或 $\boldsymbol{e}_x$)和 $\boldsymbol{j}$(或 $\boldsymbol{e}_y$)，如图 1—20.

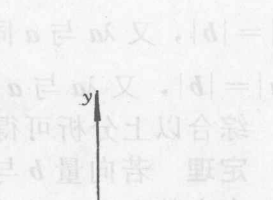


图 1—20

2. 位置向量及坐标表示

始点在坐标原点的向量称为**位置向量**. 每个位置向量$\overrightarrow{OP}$，由其终点 P 决定，平面位置向量集合与平面点集一一对应(如图 1—21)，在图 1—21 中，在坐标系 xOy 上，过 P 点分别作 x 轴和 y 轴的垂线，分别交 x 轴、y 轴于点 M 和点 N，设 P 点的坐标为(x,y)，显然有

$M(x,0)$，$N(0,y)$由加法的平行四边形法则得

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$$

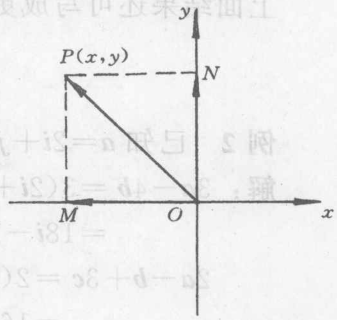


图 1－21

我们习惯称(x,y)为位置向量$\overrightarrow{OP}$在直角坐标系上的坐标，x为$\overrightarrow{OP}$的横坐标，y为$\overrightarrow{OP}$的纵坐标，从而可记$\overrightarrow{OP}=(x,y)$，特别地：$\mathbf{0}=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}$ 或 $\mathbf{0}=(0,0)$，所以位置向量的坐标即为其终点的坐标.

例 1 如图 1－22 所示，用单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 分别表示 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$，并写出各自的坐标.

解：$\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}=(4,4)$

$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}=(-2,3)$

$\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}=(-2,-3)$

$\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}=(2,-3)$

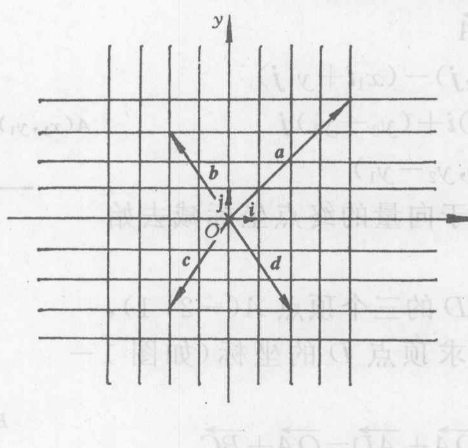


图 1－22

二、位置向量的线性运算的坐标表示

在直角坐标系 xOy 中，设位置向量 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j})+(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j})\\&=(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}\\\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j})-(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j})\\&=(a_1-b_1)\boldsymbol{i}+(a_2-b_2)\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j})=\lambda a_1\boldsymbol{i}+\lambda a_2\boldsymbol{j}$$

上述位置向量的坐标运算公式，也可用语言来表述：

两个向量的和或者差的坐标等于两个向量相应坐标的和或者差.

数乘向量的坐标，等于数乘以向量相应坐标的积.

上面结果还可写成更简单的形式：

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2)$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2)$$

例 2 已知 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}$，求 $3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$，$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$.

解：$3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}=3(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})-4(-3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j})$

$$=18\boldsymbol{i}-13\boldsymbol{j}=(18,-13)$$

$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}=2(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})-(-3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j})+3(3\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j})$

$$=16\boldsymbol{i}-23\boldsymbol{j}=(16,-23)$$

三、平面向量的坐标表示

设平面向量$\overrightarrow{AB}$，始点坐标和终点坐标分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，如图 1－23，由位置向量的减法法则可得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}\\&=(x_2-x_1,y_2-y_1)\end{aligned}$$

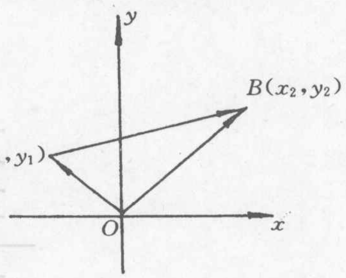


图 1－23

即：一个向量的坐标等于向量的终点坐标减去始点的坐标.

例 3 已知▱ABCD 的三个顶点 $A(-2,1)$，$B(-1,3)$，$C(3,4)$，求顶点 D 的坐标（如图 1－24）.

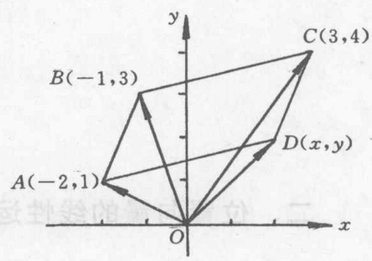


图 1－24

解：因为 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}$

$$\begin{aligned}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\\&=(-2,1)+(3,4)-(-1,3)\\&=(2,2)\end{aligned}$$

所以，点 D 的坐标为$(2,2)$.

例 4 已知 $A(-2,1)$，$B(1,3)$求线段 AB 中点 M 和三等分点 P、Q 的坐标（如图 1－25）.

解：因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1,3)-(-2,1)=(3,2)$

所以 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(-2,1)+\frac{1}{2}(3,2)=\left(-\frac{1}{2},2\right)$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=(-2,1)+\frac{1}{3}(3,2)=\left(-1,\frac{5}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=(-2,1)+\frac{2}{3}(3,2)=\left(0,\frac{7}{3}\right)$$