全国奥数总领队担纲　金牌教练倾力打造

初中数学竞赛培优教程

CHUZHONG SHUXUE JINGSAI PEIYOU JIAOCHENG

（专题讲座）

李胜宏　马茂年　主编

浙江大學出版社

初中数学竞赛培优教程

（专题讲座）

李胜宏　马茂年　主编

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学竞赛培优教程．专题讲座/李胜宏，马茂年主编．—杭州：浙江大学出版社，2004.1
ISBN 7-308-03570-0

Ⅰ.初… Ⅱ.①李… ②马… Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 115031 号

出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com)
责任编辑 杨晓鸣 王同裕
排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷 杭州浙大同力教育彩印有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 18.25
字　　数 380 千字
版 印 次 2004 年 1 月第 1 版 2006 年 12 月第 6 次印刷
印　　数 30001-33000
书　　号 ISBN 7-308-03570-0/G・670
定　　价 23.00 元

前言

近年来，在国际数学奥林匹克竞赛(IMO)中，我国选手频频取得优异成绩，在国内外产生了极大反响。国际数学奥林匹克竞赛吸引着越来越多的师生参与，全国各种层次的数学竞赛活动空前活跃。为了满足广大师生开展课外活动的需要，我们编写了这套初中数学竞赛培优教程丛书，包括基础知识、专题讲座和全真模拟三个分册。

本套丛书就是为了提高学生数学能力，为学生适应初中数学奥林匹克竞赛活动而编写的普及性辅助读物。其主要优点：一是“竞赛”，二是“同步”。所谓“竞赛”是指在内容的选取上和处理方法上具有趣味性、启发性、技巧性和拓广性，并特别注重创新能力的培养；所谓“同步”主要是指内容选取的基础性以及内容安排上与教学进度基本一致，使用时可灵活取舍其中的内容，也可提前或错后讲解使用。

本丛书博采众长，独具匠心，有的放矢，注重实效，值得学生认真读，认真用，认真练。

考试和竞赛命题的核心是理解和驾驭知识的能力。近年来，加强理解和驾驭知识能力的考查，正是中考、高考、竞赛命题展示给人们的一条清晰的思路。本丛书则把这条思路具体化为一条清晰的分析训练思路，这样的编写指导思想是产生精品的保障。

仔细品味，这套丛书还具有以下几个突出的特点：

第一、知识体例新

首先是赛题目标和知识编排新，本丛书以最新教改精神为依据，以现行初中新课标为蓝本编写；其次是对赛题体例编排新，紧扣教材和初中数学竞赛大纲，步步推进、设题解题、释疑解难、迁移延伸、逐层深入；再次是题型(材料)新，书中选用题型(材料)都是按中考、竞赛要求精心设计的，令读者耳目一新。

第二、解题方法细

首先是对赛题讲解细致入微；其次是重点、难点详细讲析，既有解题过程又有思路点拨；再次是解题方法细，一题多解，多题一法变通训练，总结规

律；最后从基本知识入手，能力训练序列化。

第三、内容讲解精

首先是对竞赛内容讲解精，真正体现围绕重点，突破难点，引发思考，启迪思维，根据赛点要求，巧设问题，精讲精练，使学生举一反三，触类旁通；其次是练习配置精，注重典型性，避免随意性，注重迁移性，避免孤立性，实现由知识到能力的过渡。

第四、大纲研究透

首先是对竞赛大纲研究透彻，居高临下把握知识，立足于教材，又不拘泥于教材；其次是对学生知识储备研究得透，学习目标科学可行，注重知识“点”与“面”的联系，“教”与“学”的联系；再次是对问题讲解透彻，一题多问，一题多解，培养求异思维和创新思维能力。

第五、课外知识全

首先是知识分布全面，真正体现了“一套在手，学习内容全有”的编写指导思想；其次是本丛书的信息量大，涵盖了初中数学课程全部内容和教与学的全部过程，内容丰富，题量充足，融入各种新颖题型，补充了各类具有知识性和人文性的课外知识；再次是适用对象全面，着眼于全国重点、普通中学的所有初中学生，内容由浅入深，由易到难。

只有适合的，才是最好的，您的关注是我们的期盼，您的满意是我们的欣慰。尽管我们在成书过程中，本着近乎苛刻的态度，题题推敲，层层把关，力求能够帮助读者更好地把握丛书的脉络和精华，但丛书中也难免有疏忽和纰漏之处。检验本丛书质量的惟一标准是广大师生使用本丛书的实践，作为教研领域的最新成果，我们期盼它的社会效益，也诚挚地希望广大师生的批评指正。

数学竞赛虽然有一定难度，但奥林匹克竞赛金牌也不是高不可攀的，也许本丛书会为你摘取金牌作好铺垫。让我们共同努力，在数学的奇妙天地中去体味数学，学习数学，开垦数学。

本书由全国数学奥林匹克竞赛总领队李胜宏教授和金牌教练马茂年主编。

目　　录

一、奇数与偶数

[竞赛要点]

整数可以分为两类:能被 2 整除的整数,称为偶数;不能被 2 整除的整数,称为奇数.换句话说,0, ±2, ±4, ±6, ±8, ±10,…,称为偶数;±1, ±3, ±5, ±7, ±9, ±11,…,称为奇数.

偶数的一般形式是 $2n$,其中 n 是整数.奇数的一般形式是 $2n-1$(或 $2n+1$),其中 n 是整数.注意,现在的奇数包括正奇数与负奇数.偶数包括正偶数、负偶数和零.零是偶数,因为它能被 2 整除.

[方法述要]

1.整数可分为奇数和偶数两类,一个整数不是奇数就是偶数,反之,一个整数不是偶数就是奇数;

2.奇数≠偶数;

3.奇数 ± 奇数 = 偶数,偶数 ± 偶数 = 偶数,奇数 ± 偶数 = 奇数;

4.奇数 × 奇数 = 奇数,整数 × 偶数 = 偶数;

5.两个连续整数,必然有一个是奇数,另一个是偶数;

6.两个整数的和与差的奇偶性相同;

7.整数 a 与 a^n(n 为正整数)的奇偶性相同.

[赛题精析]

例 1 已知 x,y,z 中有两个奇数和一个偶数,求证:$(x+1)(y+2)(z+3)$一定是偶数.

证法一 因为 x,y,z 中有两个奇数和一个偶数,则 x 和 z 中至少有一个是奇数.当 x 是奇数时,$x+1$ 是偶数,则$(x+1)(y+2)(z+3)$是偶数;当 z 是奇数时,$z+3$ 是偶数,则$(x+1)(y+2)(z+3)$是偶数.故$(x+1)(y+2)(z+3)$一定是偶数.

证法二 因为 x,y,z 中有两个奇数和一个偶数,则 $x+y+z$ 是偶数,从而$(x+1)+(y+2)+(z+3)=(x+y+z)+6$ 为偶数.所以 $x+1,y+2,z+3$ 中至少有一个是偶数,即$(x+1)(y+2)(z+3)$一定是偶数.

例 2 将图 1-1 中的圆圈任意涂上红色或蓝色,问有无可能使得在同一直线上的

红圈数都是奇数？请说明理由.

解 假设能够使同一条直线上的红圈数都是奇数.

图中一共有5条直线.将这5条直线上的红圈数相加，所得的和仍然是奇数.但每一个红圈恰好属于两条直线，所以在上面所说的和中，每一个红圈都被计算了两次，和应当是红圈总数的两倍，因而是一个偶数.

以上所得的结果矛盾，这表明不可能使同一条直线上的红圈数都是奇数.

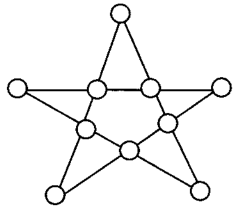

图 1-1

例3 已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是 $+1$ 或 -1，$n\geqslant 4$ 并且 $x_1x_2x_3x_4+x_2x_3x_4x_5+\cdots+x_nx_1x_2x_3=0$.求证：$n$ 是4的倍数.

证明 因为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是 $+1$ 或 -1，则 $x_1x_2x_3x_4,x_2x_3x_4x_5,\cdots,x_nx_1x_2x_3$ 这几个乘积都是 $+1$ 或 -1，又因为 $x_1x_2x_3x_4+x_2x_3x_4x_5+\cdots+x_nx_1x_2x_3=0$，则它们的 $+1$ 和 -1 的个数相等，设有 k 个 -1，则 $n=2k$（k 为自然数）.

$$\begin{aligned}\text{因为}(+1)^k\cdot(-1)^k&=(x_1x_2x_3x_4)\cdot(x_2x_3x_4x_5)\cdots(x_nx_1x_2x_3)\\&=(x_1x_2x_3\cdots x_n)^4=(\pm1)^4,\end{aligned}$$

所以 $(-1)^k=1$，因此，k 为偶数.

设 $k=2t$（t 为自然数），所以 $n=2k=2(2t)=4t$，即 n 是4的倍数.

例4 在代数式 $rvz-rwy-suz+swx+tuy-tvx$ 中，r,s,t,u,v,w,x,y,z 可以分别取 $+1$ 或 -1.(1)证明：代数式的值一定是偶数；(2)求这个代数式的最大值.

解 (1)由题意得代数式中的各项都是 $+1$ 或 -1，因为偶数个奇数相加减得偶数，所以代数式的值一定是偶数.

(2)显然代数式的值 $\leqslant 6$.

而 $(rvz)\cdot(-rwy)\cdot(-suz)\cdot(swx)\cdot(tuy)\cdot(-tvx)=-(rstuvwxyz)^2=-1$，则 $rvz,-rwy,-suz,swx,tuy,-tvx$ 中至少有一个 -1.因此，代数式的值 $\leqslant 5-1=4$.

取 $y=u=-1,r=v=z=w=s=x=t=1$，

得代数的值为 $1+1+1+1+1-1=4$.故这个代数式的最大值为4.

例5 证明：当 n,k 都是给定的正整数，且 $n>1,k>2$ 时，$n\cdot(n-1)^{k-1}$ 可以写成 n 个连续偶数的和.

证明 设 n 个连续偶数为 $2a,2a+2,2a+4,\cdots,2a+2(n-1)$，则这 n 个连续偶数的和为 $S_n=\dfrac{[2a+2a+2(n-1)]\cdot n}{2}=[2a+(n-1)]\cdot n$.

令 $[2a+(n-1)]\cdot n=n(n-1)^k$，则 $2a+(n-1)=(n-1)^{k-1}$，

得 $a=\dfrac{(n-1)[(n-1)^{k-2}-1]}{2}$.

又$(n-1)$与$(n-1)^{k-2}$同奇偶,故$(n-1)$与$[(n-1)^{k-2}-1]$必为一奇一偶.

于是当 $n>1$ 时 a 为正整数.取 $a=\dfrac{(n-1)[(n-1)^{k-2}-1]}{2}$时,$n(n-1)^{k-1}$等于 n 个连续偶数的和.

例 6 设 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{2005}$都是 $+1$ 或 -1,证明:$x_1+2x_2+3x_3+\cdots+2005x_{2005}\neq0$.

证明 因为 $x_1+2x_2+3x_3+\cdots+2005x_{2005}$

$$\begin{aligned}&=(x_1+|x_1|)+2(x_2+|x_2|)+\cdots+2005(x_{2005}+|x_{2005}|)\\&\quad-(|x_1|+2|x_2|+\cdots+2005|x_{2005}|)\\&=(x_1+|x_1|)+2(x_2+|x_2|)+\cdots+2005(x_{2005}+|x_{2005}|)\\&\quad-(1+2+3+\cdots+2005)\\&=(x_1+|x_1|)+2(x_2+|x_2|)+\cdots+2005(x_{2005}+|x_{2005}|)\\&\quad-2005\times1003,\end{aligned}\qquad(*)$$

又$(x_1+|x_1|),(x_2+|x_2|),\cdots,(x_{2005}+|x_{2005}|)$都是偶数,

则$(x_1+|x_1|)+2(x_2+|x_2|)+\cdots+2005(x_{2005}+|x_{2005}|)$是偶数.

而 2005×1003 是奇数,因此$(*)$式的得数为奇数.

所以 $x_1+2x_2+3x_3+\cdots+2005x_{2005}\neq0$.

例 7 甲、乙两人玩扑克,甲的 13 张牌全部是红桃牌,乙的 13 张牌全部是梅花牌.如果每次两人各出一张牌,然后把每对牌上的数字相减,问这 13 个差的积是奇数还是偶数?

解 设甲出牌顺序为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{13}$,乙出牌顺序为 $b_1,b_2,b_3,\cdots,b_{13}$.

则 $(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)+\cdots+(a_{13}-b_{13})$

$$\begin{aligned}&=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{13})-(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{13})\\&=(1+2+3+\cdots+13)-(1+2+3+\cdots+13)=0.\end{aligned}$$

若$(a_1-b_1),(a_2-b_2),(a_3-b_3),\cdots,(a_{13}-b_{13})$这 13 个差数全为奇数,则它们的和为奇数,这不可能.

因此$(a_1-b_1),(a_2-b_2),(a_3-b_3),\cdots,(a_{13}-b_{13})$中至少有一个为偶数.

所以$(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)\cdots(a_{13}-b_{13})$的积为偶数.

例 8 对于数 3^n+1,这里 n 为正整数,求证:

(1)当 n 为偶数时,该数能被 2 整除,但不能被 2^2 整除;

(2)当 n 为奇数时,该数能被 2^2 整除,但不能被 2^3 整除.

证明 (1)当 n 为偶数时,令 $n=2k$(k 为自然数),

则 $3^n+1=3^{2k}+1=(3^k)^2+1$,因为 3 是奇数,则 3^k 也是奇数.

又设 $3^k=2m-1$(m 为自然数),

则 $3^n+1=(2m-1)^2+1=4m^2-4m+2=2[2m(m-1)+1]$.

因为 $2m(m-1)+1$ 是奇数,所以 3^n+1 能被 2 整除,但不能被 2^2 整除.

(2)当 n 为奇数时,令 $n=2k-1$(k 为自然数),

则 $3^n+1=3^{2k-1}+1=3\cdot 3^{2k-2}+1=3\cdot(3^{k-1})^2+1$.

3 与 3^{k-1} 都是奇数,设 $3^{k-1}=2m-1$(m 为自然数),

则 $3^n+1=3(2m-1)^2+1=3(4m^2-4m+1)+1=4[3m(m-1)+1]$.

因为 $3m(m-1)$ 是偶数,则 $3m(m-1)+1$ 是奇数,

所以 3^n+1 能被 2^2 整除,但不能被 2^3 整除.

例 9 8×8 的国际象棋盘能否用 15 个“凸”形骨牌和 1 个“田”形骨牌覆盖?

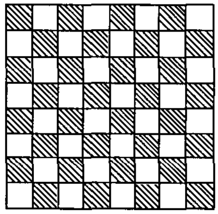

图 1-2

解 棋盘如图 1-2 所示,则“田”形骨牌一定盖住 2 个黑格和 2 个白格,而“凸”形骨牌或盖住 3 个黑格和 1 个白格,或盖住 1 个黑格和 3 个白格.若要用 15 个“凸”形骨牌和 1 个“田”形骨牌盖住整个棋盘,可设在 15 个“凸”形骨牌中,第一类用了 s 个,第二类用于 t 个,则 $s+t=15$.从而黑格总数为 $2+3s+t$,应该等于 32.显然这是不可能的,因为 s,t 奇偶性相异,则 $3s+t$ 为奇数,所以 $2+3s+t$ 为奇数,这说明,原棋盘不能被覆盖.

例 10 设线段 AB 的两个端点中,一个是红色的点,一个是蓝色的点.在线段 AB 中取 n 个分点,将 AB 分为 $n+1$ 个不重叠的小线段,并将这些分点染成红色或蓝色.如果一条小线段的两个端点一个为红点,而另一个为蓝点,那么这条小线段便称为标准线段.证明:不论分点怎样染色,标准线段的条数总是奇数.

解 将这些小线段的端点依从左到右的顺序排成一列.第一个点是 A,最后一个点是 B.

在从左到右的过程中,当且仅当相邻的两个点是一条标准线段的端点时,颜色发生改变.

由于 A、B 颜色不同,所以应发生奇数次颜色改变,即标准线段的条数一定是奇数.

例 11 在一张 9 行 9 列的方格纸上,把每个方格所在的行数与列数加起来,填在这个方格中.如图 1-3 中,$a=5+3=8$,问:填入的 81 个数中,奇数多还是偶数多?

解 将第一行的数与第二行的数比较,同一列的两个数奇偶性正好相反(第一行的数是列数加 1,而第二行的数是列数加 2).因此,第一行的奇数(偶数)个数,正好等于第二行的偶数(奇数)个数.这两行合在一起来看,奇数个数与偶数个数一样多.

同理，三、四两行合在一起来看，奇数个数与偶数个数一样多. 五、六两行合在一起，七、八两行合在一起也都是这样. 因此，前八行合在一起来看，奇数个数与偶数个数一样多.

第九行的 9 个数是列数加 9，列数 1，2，…，9 中奇数比偶数多 1；加 9 后，奇数变为偶数，偶数变为奇数，所以 9 个数中，偶数比奇数多 1. 因此，填入的 81 个数中，偶数比奇数多 1 个.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4									
5			a						
6									
7									
8									
9									

图 1-3

例 12 表甲是一个英文字母电子显示盘，每一次操作可以使某一行 4 个字母同时改变，或者使某一列 4 个字母同时改变. 改变的规则是，按照英文字母表的顺序，每个英文字母变成它下一个字母(即 A 变成 B，B 变成 C，…，最后的字母 Z 变成 A).

问：能否经过若干次操作，使表甲变为表乙？如果能，请写出变化过程；如果不能，说明理由.

S	O	B	R
T	Z	F	P
H	O	C	N
A	D	V	X

表甲

K	B	D	S
H	E	X	G
R	T	B	S
C	F	Y	A

表乙

分析 本题首先需要判断"能"还是"不能". 表甲与表乙不很有规律，似不太容易将表甲变为表乙(可以试一试，看看能否成功). 如果是不能，就应当找出不能的理由. 这类"操作"(或变换)问题，往往需要挖掘其中的"不变量"，即经过操作不改变的量.

当然，还得将问题归结为奇偶分析. 为此，注意 26 个字母实际上即 1～26 这 26 个数，其中一半是奇数，一半是偶数. 我们将"奇数字母"A、C、E、G、I、K、M、O、Q、S、U、W、Y 记成 1，而将"偶数字母"B、D、F、H、J、L、N、P、R、T、V、X、Z 记成 0. 然后考察表中奇数的个数.

解 按照分析所说，表甲可写成表丙，而表乙可写成表丁，

1	1	0	0
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0

表丙

1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1
1	0	1	1

表丁

每次操作将同一行或同一列的 1 改为 0，0 改为 1.

因为每一行(每一列)有 4 个数，所以其中 1 的个数 a 与 0 的个数 $b(=4-a)$ 有相同的奇偶性. 每次操作将 1 与 0 互换，从而个数 a 与 b 互换. 所以操作的结果不改 1 的

个数的奇偶性.

表丙中,原有 5 个 1,由于操作不改变 1 的个数的奇偶性,所以无论多少次操作,表中 1 的个数始终为奇数.

而表丁中,1 的个数 8 为偶数.所以表丙不可能经过有限多次操作变为表丁,即表甲不可能经过有限多次操作变为表乙.

[能力训练]

1.设 p,q 都是质数,且 $p<q$,以 x 为未知数的方程 $px+4q=74$ 的根为 2,求 p^3-q 的值.

2.有四个互异的正整数,最大的数与最小的数之差是 4,最大数与最小数之积是奇数,而这四个数的和是最小的两位奇数,求这四个数的乘积.

3.100 个自然数,它们的和是 10000,在这些数里,奇数比偶数多,则这些数里至多有几个偶数?

4.一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的系数 a,b,c 都是奇数,试证明方程没有整数根.

5.能否将 $1,2,\cdots,972$ 分成 12 个互不相交的组,每组含 81 个数,并且各组中的数的和都相等?如果能,怎样分?

6.求证:从 $1,2,\cdots,100$ 中任选 51 个数,其中必有一个数是另一个数的倍数.

7.P 是质数,且 P^6+3 也是质数,求 $P^{11}-52$ 的值.

8.设有 4 个正整数之和为 9.求证:它们的立方和不可能为 100.

9.下列每个算式中,最少有一个奇数和一个偶数,那么在这 12 个整数中至少有几个偶数?

$\square+\square=\square$,$\square\times\square=\square$,　$\square-\square=\square$,$\square\div\square=\square$.

10.已知:a,b 为正整数,且 a,b 之积为偶数,求证:必然存在正整数 c,d,使得 $a^2+b^2+c^2=d^2$.

11.一个四位数是奇数,它的首位数字小于其余各位数字,而第二位数字大于其他各位数字,第三位数字等于首末两位数字的和的两倍,求这个四位数.

12.设有 n 盏亮着的拉线开关灯,规定每次须拉动 $(n-1)$ 个拉线开关才关灭一灯,问能否把所有的灯都关闭?试证明你的结论或给出一种关灯的方法.

二、质数与合数

[竞赛要点]

质数 一个大于 1 的正整数 a，如果仅有 1 与 a 这两个正约数，那么 a 叫做质数，也叫素数.

合数 如果一个正整数 a 除了 1 与 a 这两个正约数外还有其他正约数，那么 a 叫做合数.

质因数 如果一个正整数 a 的一个约数 p 是质数，则 p 叫做 a 的质因数，也可称为质约数.

值得指出的是，质数与合数都是大于 1 的正整数. 1 既不是质数也不是合数. 如果说单数和双数是正整数集的一种分类的话，那么正整数集的另一种分类方式就是将全体正整数分成 1、质数和合数三类. 所有正的偶数中除了 2 是质数外，其他均为合数. 2 是最小的质数.

[方法述要]

定理 1 设 a 是一个大于 1 的正整数，则 a 的大于 1 的最小正约数 p 一定是质数.

证 若 p 不是质数，因 $p>1$，由定义知，p 有不同于 1 与其本身的正约数 q，即 $1<q<p$，且 $q\mid p$，于是 $q\mid a$，这与 p 是 a 的大于 1 的最小正约数矛盾.

定理 1 说明，凡大于 1 的整数至少有一个质因数.

定理 2 若 p 是质数，则对于任一整数 a，或者 $p\mid a$，或者 $(p,a)=1$.

证 因 $(p,a)\mid p$，$(p,a)\geqslant 1$，而 p 是质数，因此，或者 $(p,a)=1$，或者 $(p,a)=p$，即 $p\mid a$.

推论 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 2)$ 都是整数，p 为质数，若 $p\mid a_1a_2\cdots a_n$，则存在 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 使得 $p\mid a_k$.

证 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都不能被 p 整除，则 $(p,a_i)=1(i=1,2,\cdots,n)$，于是由互质的性质有 $(p,a_1a_2\cdots a_n)=1$.

另一方面，$p\mid a_1a_2\cdots a_n$，故 $(p,a_1a_2\cdots a_n)=p$，从而有 $p=1$. 矛盾.

定理 3 质数有无穷多个.

证 设 p 是任一质数，令 $a=p!+1$，由定理 1，a 有一个质因数 q，即 $q\mid p!+1$，且 $q>1$. 又因为 $(p!,p!+1)=1$，所以，$q\nmid p!$，从而 $q>p$，即对任意的质数 p，存在比

p 更大的质数 q，证毕.

定理 4 形如 $4n-1(n\in\mathbf{N}^*)$ 的质数有无穷多个.

证 显然 3 是一个形如 $4n-1$ 的质数. 对于任一形如 $4n-1$ 的质数 p，令 $a=4(p!)-1$. 由定理 1，a 至少有一个质因数，与定理 3 的证明相仿，a 的所有质因数都大于 p. 显然，a 的任一质因数都是奇数，而奇数可以写成 $4n+1$ 或 $4n-1$. 但

$$(4m+1)(4n+1)=4(4mn+m+n)+1,$$

所以 a 的质因数不能都是形如 $4n+1$ 型的，其中至少有一个为形如 $4n-1$ 型的数. 这就是说，对于任一形如 $4n-1$ 型的质数 p，存在一个比 p 更大的形如 $4n-1$ 型的质数，故 $4n-1$ 型的质数有无穷多个. 证毕.

合数显然有无穷多个. 如大于 2 的偶数都是合数.

定理 5 对于任意大于 1 的正整数 n，存在 n 个相继的合数.

证 考虑 n 个相继的整数

$$(n+1)!+2,(n+1)!+3,\cdots,(n+1)!+n+1,$$

因 $k\mid(n+1)!+k(k=2,3,\cdots,n+1)$，故这 n 个相继的整数都是合数. 证毕.

下面给出一个常用的质数判定定理：

定理 6 设 n 是大于 1 的整数，若所有不大于 $\sqrt{n}$ 的质数都不整除 n，则 n 为质数.

证 设 p 是大于 1 的 n 的最小约数，由定理 1 知，p 是质数. 如果 n 是合数，则存在正整数 q，使得 $n=p\cdot q$，且 $q>1$. 由 p 的最小性有 $p\leqslant q$. 于是 $p^2\leqslant p\cdot q=n$， 所以 $p\leqslant\sqrt{n}$. 这说明不大于 $\sqrt{n}$ 的质数 p 能整除 n，与假设矛盾，故 n 必为质数.

定理 7(算术基本定理) 任何大于 1 的自然数都可以分解成质因数的乘积，如果不考虑这些质因数的顺序，这种分解方法是惟一的.

例如：把 42，120，4536 分解成质因数的乘积，分解如下：

$$42=2\times3\times7,120=2^3\times3\times5,4536=2^4\times3^4\times5\times7$$

一般地，设 N 为整数，且 $N>1$，则 $N=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot p_3^{k_3}\cdots p_m^{k_m}$， ①

其中 $p_1,p_2,p_3,\cdots,p_n$ 为质数，$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为非负整数.

通常称①式为自然数的标准分解式.

定理 8(约数个数定理) 设自然数 N 的标准分解式为 $N=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot p_3^{k_3}\cdots p_m^{k_m}$，那么 N 的正约数的个数为 $(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_m+1)$.

例如：将 84 分解成质因数的乘积是 $84=2^2\times3\times7$，由约数个数定理可知 84 的约数的个数是 $(2+1)\times(1+1)\times(1+1)=12$ 个. 事实上，这 12 个约数是这样得来的：2^2 的非 1 的约数有 $2,2^2$ 也是 84 的约数，3、7 是 84 另 2 个约数，它们之间的乘积 $2\times3,2\times7,2^2\times3,2^2\times7,3\times7,2\times3\times7,2^2\times3\times7$ 共 7 个均是 84 的约数，再加上 1 是 84 的约数，所以 84 的约数总共是 12 个.

一般地，对自然数 $N(N>1)$，若 N 的标准分解式为 $N=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot p_3^{k_3}\cdots p_m^{k_m}$，则对每

个质因数 $p_i(i=1,2,3,\cdots,n)$来说,$1,p_i,p_i^2,\cdots,p_i^{k_i}$ 都是 N 的约数(共有 k_i+1 个,且互不相同),这些约数的各种可能之积仍是 N 的约数. 因此,N 的正约数的总个数为 $(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)\cdots(k_m+1)$.

[赛题精析]

例 1 求75600 的约数的个数.

解 将 75600 分解成质因数乘积的形式 $75600=2^4\times3^3\times5^2\times7$.

由约数个数定理可知:75600 的约数的个数是

$$(4+1)\times(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=160\text{ 个}.$$

例 2 我们称恰有 8 个正约数的自然数叫"好"数,求最小的"好"数.

解 因为 $8=1\times8=2\times2\times2=4\times2$,

所以"好"数的标准分解式只有如下三种形式:p^7(p 为质数);$p_1^3p_2$(p_1,p_2 为不同的质数);$p_1p_2p_3$(p_1,p_2,p_3 为不同的质数).

因为要求"好"数中的最小数,所以标准分解式中质数的取值应尽可能地小. $2^7=128$,$2^3\times3=24$,$2\times3\times5=30$. 故最小的"好"数是 24.

例 3 已知 $1176\times a=b^4$,a、b 为自然数,求 a 的最小值.

解 将 1176 分解成质因数的乘积,得 $1176=2^3\times3\times7^2$,

$1176\times a=2^3\times3\times7^2\times a=b^4$,$a,b$ 为自然数.

故 a 的最小值 $=2\times3^3\times7^2=2646$.

例 4 对于任何大于 1 的自然数 n,试证明 n^4+4 是合数.

分析 从合数的概念出发,将 n^4+4 分解成两个因式的乘积,再证明每个因式是大于 1 的.

证明
$$\begin{aligned}n^4+4&=n^4+4n^2-4n^2+4=(n^2+2)^2-(2n)^2\\&=(n^2+2n+2)(n^2-2n+2).\end{aligned}$$

由于 $n>1$, 所以 $n^2+2n+2>1$,$n^2-2n+2>1$. 故 n^4+4 是合数.

例 5 设 a,b,c,d 是自然数,并且 $a^2+b^2=c^2+d^2$,证明 $a+b+c+d$ 一定是合数.

证明 因为 a,b,c,d 是自然数,所以 $a+b+c+d>2$.

因为 a,b,c,d 分别与 a^2,b^2,c^2,d^2 的奇偶性相同,所以 $a+b+c+d$ 与 $a^2+b^2+c^2+d^2$ 的奇偶性也相同. $a^2+b^2+c^2+d^2=2(c^2+d^2)$为偶数.

因为 $a+b+c+d$ 也为偶数,同时又有 $a+b+c+d>2$,故 $a+b+c+d$ 一定是合数.

例 6 已知质数 p,q 满足 $p+q=1999$,求$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}$的值.

解 因为 $p+q=1999$ 是一个奇数，所以质数 p,q 中必为一个是奇数，另一个是偶数.

又因为正偶数中只有 2 是质数，所以 p,q 中有一个是 2，另一个是 1997.

故 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}+\frac{1}{1997}=\frac{1999}{3994}$.

例 7 已知 a,b,c 是质数，它们满足 $a\cdot b^b\cdot c+a=2000$，求 a,b,c 的值.

分析 运用自然数的标准分解形式是惟一的，将 2000 分解成质因数的乘积. 因为 $a\cdot b^b\cdot c+a=a(b^b+c)$，来分析质因数 a 的取值.

解 已知 $a\cdot b^b\cdot c+a=2000$，即 $a(b^b\cdot c+1)=2\times1000=2^4\times5^3$.

因为 a 为质数，所以 a 只能取 2 或者 5.

当 $a=2$ 时，$2\times(b^b\cdot c+1)=2000$，$b^b\cdot c=999=3^3\times37$，

因为自然数 999 的标准分解式是惟一的，可以发现 $b=3,c=37$.

当 $a=5$ 时，$5\times(b^b\cdot c+1)=2000$，$b^b\cdot c=399=3\times7\times19$，

无论 c 取 3，7，19，都不能求得质数 b，故 a 不可能取 5.

综上所述，$a=2,b=3,c=37$.

例 8 如图 2-1，立方体的每个面上都写有一个自然数，并且相对两个面所写两数之和都相等，若 18 的对面写的是质数 a，14 的对面写的是质数 b，35 的对面写的是质数 c，求 $a^2+b^2+c^2$ 的值.

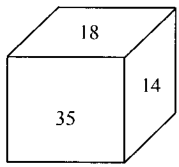

图 2-1

解 由已知条件知：$a+18=b+14=c+35$.

由 $a+18=b+14$ 得，$a-b=-4$ 是偶数，所以 a,b 的奇偶性相同.

由 $a+18=c+35$ 得，$a-c=17$ 是奇数，所以 a,c 的奇偶性相反，又因为 a,b,c 都是质数，而且正偶数中只有 2 是质数，所以 $c=2$.

解方程组 $\begin{cases}a+18=35+c,\\b+14=35+c,\end{cases}$ 求得 $\begin{cases}a=19,\\b=23.\end{cases}$

故 $a^2+b^2+c^2=2^2+19^2+23^2=894$.

例 9 求出使得 $p,p+10,p+14$ 都是质数的所有整数 p.

分析 p 是质数，但首先是整数. 因此，由余数定理知 p，只能是 $3k,3k+1,3k+2$ 三种形式之一.

解 若 $p=3k+1$（k 是非负整数），则 $p+14=3k+1+14=3\times(k+5)$，这说明 $p+14$ 是合数，与已知的 $p+14$ 是质数矛盾，故 $p\neq3k+1$.

若 $p=3k+2$（k 是非负整数），则 $p+10=3k+2+10=3\times(k+4)$，这说明 $p+10$ 是合数，与已知的 $p+10$ 是质数矛盾，故 $p\neq3k+2$.

若 $p=3k$（k 为正整数），则当 $k>1$ 时，p 是合数，与已知的 p 是质数矛盾，故 k 只

能是 1,此时 $p=3$.故只有 $p=3$ 时,使得 $p,p+10,p+14$ 都是质数.

例 10 设 p 是给定的质数,再将不超过 p 的所有质数分成两组:$a,b,c,\cdots,k$;$\alpha,\beta,\cdots,\gamma$.且知数 x 满足 $x=abc\cdots k-\alpha\beta\cdots\gamma$,$1<x<p^2$,求证:$x$ 是质数.

证 假设 x 不是质数,则由 $x>1$ 知,x 是合数.由 $x<p^2$ 可知 x 必有一个质约数小于 p,设这个质约数为 q,则 q 是 $a,b,c,\cdots,k$;$\alpha,\beta,\cdots,\gamma$ 中的某一个.于是有

$$q\mid x=abc\cdots k-\alpha\beta\cdots\gamma.$$

若 q 是 $a,b,c,\cdots,k$ 中的一个,则必有 $q\mid abc\cdots k$,从而 $q\mid\alpha\beta\cdots\gamma$.

从而 q 也是 $\alpha,\beta,\cdots,\gamma$ 中的一个,这是不可能的.所以 x 是质数.

例 11 设 $p>3$,且 p 与 $p+2^n$ 均为质数,求证:$p+2^{n+1}$ 为合数(其中 $n\in\mathbf{N}^*$).

证 对 p 和 2^n 按模 3 讨论.

因为 p 为质数,且 $p>3$,所以 p 是 $3k+1$ 或 $3k+2$ 型的数.又显然 2^n 是 $3k+1$ 或 $3k+2$ 型的数.

当 2^n 为 $3k+1$ 型的数时,由于 2^n+p 为质数,所以 p 是 $3k+1$ 型的数.令 $2^n=3m_1+1$,$p=3m_2+1$,则 $2^{n+1}+p=2(3m_1+1)+3m_2+1=3m+3$,其中 $m=2m_1+m_2$.

故 $3\mid 2^{n+1}+p$,又 $2^{n+1}+p>3$,故 $2^{n+1}+p$ 是合数.

当 2^n 为 $3k+2$ 型的数时,由于 2^n+p 为质数,所以 p 是 $3k+2$ 型的数.此时,令 $2^n=3m_1+2$,$p=3m_2+2$,则 $2^{n+1}+p=2(3m_1+2)+3m_2+2=3m+6$,其中 $m=2m_1+m_2$.

故 $3\mid 2^{n+1}+p$,又 $2^{n+1}+p>6$,所以 $2^{n+1}+p$ 是合数.

综上所述,我们证明了 $2^{n+1}+p$ 是合数.

例 12 (1)设 p 是质数,$p>3$,求证:$24\mid p^2-1$;

(2)设 c 不能被质数的平方整除,且 $a^2\mid b^2c$,证明,$a\mid b$.

(1)**证** 因为 $24=3\times 8$,且 $(3,8)=1$,所以只需证明 $3\mid p^2-1$,$8\mid p^2-1$.

(ⅰ)证 $3\mid p^2-1$.事实上,$p-1,p,p+1$ 是三个连续整数,故其中必有一个被 3 整除.又 $p>3$ 为质数,所以 $p-1,p+1$ 中有一个被 3 整除,故 $3\mid(p-1)(p+1)$,即 $3\mid p^2-1$.

(ⅱ)证 $8\mid p^2-1$.事实上,由 $p-1,p+1$ 是相邻的偶数,故其中必有一个是 4 的倍数,所以 $(p-1)(p+1)$ 是 8 的倍数,即 $8\mid p^2-1$.

综上所述,我们证明了 $24\mid p^2-1$.

(2)**证** 设

$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$,$\alpha_i\geqslant 0$,$i=1,2,\cdots,s$;

$b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_s^{\beta_s}$,$\beta_i\geqslant 0$,$i=1,2,\cdots,s$;