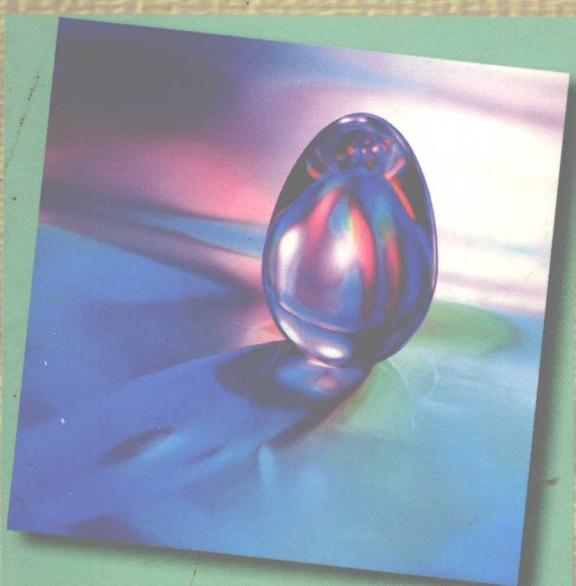
大学基础课学习辅导丛书

概率论与数理统计学习辅导

GAILULUN YU SHULITONGJI



★主编 王庆成

科学技术文献出版社

◇ 大学基础课学习辅导丛书

概率论与数理统计学习辅导

主　编　王庆成

编　委　刘俊荣　张利凯　崔现伟

王晓易　王岩华　王述珍

刘淑霞　马守荣

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北　京

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习辅导/王庆成主编.-北京:科学技术文献出版社,2002.8

(大学基础课学习辅导丛书)

ISBN 7-5023-4004-1

Ⅰ.概… Ⅱ.王… Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 010210 号

出 版 者:科学技术文献出版社
地 址:北京市复兴路 15 号(中央电视台西侧)/100038
图书编务部电话:(010)68514027,(010)68537104(传真)
图书发行部电话:(010)68514035(传真),(010)68514009
邮购部电话:(010)68515381,(010)68515544-2172
网 址:http://www.stdph.com
E-mail:stdph@istic.ac.cn;stdph@public.sti.ac.cn
策划编辑:王亚琪
责任编辑:李卫东
责任校对:唐 炜
责任出版:刘金来
发 行 者:科学技术文献出版社发行 全国各地新华书店经销
印 刷 者:北京国马印刷厂
版(印)次:2002 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
开 本:850×1168 32 开
字 数:372 千
印 张:11.375
印 数:1~15000 册
定 价:12.00 元

(京)新登字130号

内 容 简 介

本书针对非数学专业理工科大学生在学习本课程时所遇的重点、难点、考点，通过基础知识的讲解，配合典型例题分析，以及一定数量的自测题，使同学们构建自己的知识网络图，以在考试和以后工作中灵活运用。内容包括：事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、强大数律与中心极限定理、抽样分布、参数估计、假设检验、回归分析等八章。适合于非数学专业的广大理工科学生包括经济类专业学生。对备考研究生的同学而言也是一本极具价值的参考书。

我们所有的努力都是为了使您增长知识和才干

科学技术文献出版社是国家科学技术部所属的综合性出版机构，主要出版医药卫生、农业、数学辅导，以及科技政策、科技管理、信息科学、实用技术等各类图书。

前　言

概率论与数理统计是研究自然界、人类社会及技术过程中大量的随机现象中的规律性的科学。因为随机现象普遍存在于自然界和人类社会，所以概率论与数理统计作为研究随机现象的一门数学学科已经成为从事社会科学、自然科学以及管理、工程技术、生产和经营领域的工作人员的必备知识。并且随着现代科学技术的迅速发展和人类生活条件的不断改变，得到了蓬勃的发展，形成了系统的理论。由于这门学科在实际中广泛的应用，现在很多院校开设了概率论与数理统计课，并且成为大多数专业的必修课。

作为一门数学学科，概率论与数理统计具有所有的数学学科共有的特点：高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性。除此之外，由于它以随机现象为研究对象，因此有自己的一套崭新的理论和方法，课程要求学生能够理解随机现象的实际背景，逐渐培养概率统计的直觉。

要学好任何一门数学课程，习题是必不可少的。通过做题可以加深对概念的理解，巩固从教材中学到的知识，掌握各种技巧。现在虽然有很多教学参考书，由于课时和篇幅的限制，不可能涵盖大量的习题，并给出详细的解答。我们编写此书的目的是提供一本完整的、取材恰当的概率论与数理统计的辅导书。在编写中我们对概率统计的基础部分进行比较全面的系统论述，注意介绍统计思想和方法，特别注意概率统计学与社会实践的联系。给出主要的结论，而对抽象、冗长的定理证明并没有给出，读者如果有兴趣可以参考相关文献。对于习题解答部分，笔者翻阅了大量的国内外的资料、文献，收集了概率统计方面的各种典型的例题，并给出了详细解答，相信读者会从中受益匪

浅。由于笔者只假定读者学过了集合论、线性代数的基本课程和微积分，所以对于广大的理工科学生来说，应该能够阅读和掌握本书中所叙述的概念、方法。相信该书能够成为他们的良师益友。同时对于希望在概率统计方面做研究工作的青年研究者来说，该书也可以作为一份有益的参考资料。

由于笔者水平有限以及编写的时间仓促，本书中若有错误、疏漏之处，望广大的读者批评指正。

目　录

第一章　事件与概率

※ 知识网络图

- 事件与概率
  - 事件
    - 样本空间
    - 随机事件及其运算
    - 随机事件运算规律
    - 完全事件组
  - 概率的定义与性质
    - 概率的概念
    - 概率的基本性质
  - 条件概率与独立性
    - 条件概率
    - 全概公式
    - 贝叶斯公式
    - 独立性
    - 伯努利试验概型

重点难点考点

深刻理解样本空间与其上定义的随机事件，熟练掌握随机事件的运算，深刻理解概率的四种定义及其性质. 条件概率和独立性是掌握的难点，结合习题熟练应用全概公式和贝叶斯公式.

第一节　事　件

一、基础知识导学

1. 在随机试验中，每一个可能出现的结果称为基本事件(或样本点). 把所有基本事件的全体所构成的集合称为样本空间，记为 Ω. 把样本空间的子集，即由某些基本事件所组成的集合称为随机事件，记为 $A, B, \cdots$ 等. 我们把样本空间 Ω 也作为一个事件，因为在每次试验中必然出现 Ω 中的某个样本

点，也即 Ω 必然发生，所以常称 Ω 为必然事件. 把空集 $\varnothing$ 也作为一个事件，它在每次试验中都不会发生，称为不可能事件.

2. 随机事件之间存在两种关系：

1) 包含：若事件 A 中的每一个样本点都包含在事件 B 中，则记 $A \subset B$ 或 $B \supset A$，称事件 B 包含了事件 A，这时事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

2) 相等：如果 $A \subset B$ 与 $B \subset A$ 同时成立，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A = B$. 包含与相等是事件之间的两种基本关系.

3. 对于随机事件，我们定义了三种运算：

1) 和：事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的和(或并)，记为 $A \cup B$.

2) 积(交)：事件 A 与事件 B 同时发生的事件称为事件 A 与事件 B 的积，记为 $A \cap B$ 或 AB.

3) 差：事件 A 发生而事件 B 不发生的事件，称为 A 与 B 的差，记为 $A - B$，显然 $A - B = A\overline{B}$.

4. 如果随机事件 A 与 B 不能同时发生，即 $AB = \varnothing$，我们称 A 与 B 为互不相容(或互斥)事件. 如果 $AB = \varnothing$，$A \cup B = \Omega$，则我们称 A 与 B 互为对立事件，记为 $B = \overline{A}$. 显然若 A 与 B 互为对立事件，则 A 与 B 一定互不相容，反之不真.

5. 随机事件满足下列运算规律：

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A, AB = BA$;

(2) 结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$;

(3) 分配律　$(A \cup B)C = (AC) \cup (BC), (AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$;

(4) 对偶律　$\overline{A \cup B} = \overset{\overline{A}\,\overline{B}}{\cancel{AB}}, \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

随机事件的运算及其运算规律在概率的计算中是非常重要的，大家务必牢固掌握.

6. 完全事件组.

设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_{n_1}, \cdots$ 两两互不相容，且 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$，则我们称事件

组$\{A_n : n \geqslant 1\}$为完全事件组.

二、精典例题解析

例 1　化简下列各式

(ⅰ) $A \cup B - A$;　ϕ.

(ⅱ) $(A \cup B)(A \cup \overline{B})$;　ϕ

(ⅲ) $(A \cup B)(B \cup C)$;　$B \cup (AC)$

(ⅳ) $(A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B)$.

解:(ⅰ) $A \cup B - A = (A \cup B) - A$

$$= (A \cup B)\overline{A}$$

$$= A\overline{A} \cup B\overline{A}$$

$$= \varnothing \cup B\overline{A} = B - A$$

(ⅱ) $(A \cup B)(A \cup \overline{B})$

$$= A \cup A\overline{B} \cup BA \cup B\overline{B}$$

$$= A \cup (A\overline{B} \cup BA) \cup B\overline{B}$$

$$= A \cup A(\overline{B} \cup B) \cup \varnothing$$

$$= A \cup A \cup \varnothing = A$$

(ⅲ) $(A \cup B)(B \cup C)$

$$= AB \cup AC \cup \underline{B} \cup BC$$

$$= B \cup AC \quad (\because AB \cup BC \subset B)$$

(ⅳ) $(A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B)$

$$= A(\overline{A} \cup B) = A\overline{A} \cup AB = \varnothing \cup AB = AB.$$

例 2　考虑随机试验:自 $N(N \geqslant 3)$ 个自然数$\{1,2,\cdots,N\}$接连任意取 3 个,试分别就还原和非还原两种情形写出基本事件空间 Ω_1 和 Ω_2.

解:1) 对于还原抽件,同一个数字可以重复出现. 以 $\omega = (x_1, x_2, x_3)$ 表示三维向量,其中 $x_i(i = 1,2,3)$ 等于前 N 个自然数之一. $\Omega_1 = \{\omega\}$ 是一切这样的 ω 的集合,总共含 N^3 个不同基本事件.

2) 对于非还原抽样,同一数不能重复出现. 以 $\omega = (x_1, x_2, x_3)$ 表示三维向量,其分量等于前 N 个自然数之一且两两不等. $\Omega_2 = \{\omega\}$ 是一切这样的 ω 的集合,总共含 $N(N-1)(N-2)$ 个不同元素.

例 3　考虑随机试验：接连进行 n 次射击，试描绘基本事件空间 Ω.

解：问题的解不惟一，Ω 的选择视问题要求而定，例如可以考虑以下四种情形.

1）每次射击，命中记为 1，不命中记为 0. 基本事件 $\omega = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个 n 维向量，其分量 $x_i = 0$ 或 1. $\Omega = \{\omega\}$ 总共含 2^n 个不同 ω. 例如，对 $n = 3$，$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_8\}$，其中 $\omega_1 = (0,0,0)$，$\omega_2 = (0,0,1)$，$\omega_3 = (0,1,0)$，$\omega_4 = (0,1,1)$，$\omega_5 = (1,0,0)$，$\omega_6 = (1,0,1)$，$\omega_7 = (1,1,0)$，$\omega_8 = (1,1,1)$.

2）以 $\omega_i = i$ 表示 n 次射击命中的次数，则有 $\Omega = \{0,1,2,\cdots,n\}$ 共有 $n + 1$ 个基本事件.

3）设 $\omega = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 n 维向量，其分量 x_i 表示第 i 次射击命中的环数，有 $0,1,\cdots,10$ 等 11 个可能值，则 $\Omega = \{\omega\}$ 含 11^n 个不同的基本事件.

4）以 $\omega_i = i$ 表示 n 次射击命中的总环数，则 $\Omega = \{0,1,\cdots,10n\}$ 共含 $10n + 1$ 个基本事件.

例 4　设 A, B 是事件，那么，事件"A, B 都发生"，"A, B 不都发生"，"A, B 都不发生"中，哪两个是对立事件.　AB　$\overline{A}\overline{B}$

解："A, B 都发生" $= AB$　　A　$\overline{A} \cup \overline{B}$

"A, B 不都发生" $= \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$

"A, B 都不发生" $= \overline{A}\,\overline{B}$

由于 AB 若要与 $\overline{A}\,\overline{B}$ 是对立事件，由定义应有 $AB = \overline{\overline{A}\,\overline{B}}$，但 $\overline{\overline{A}\,\overline{B}} = A \cup B \neq AB$，所以，"$A, B$ 都发生"与"A, B 都不发生"不是对立事件. 而 $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{AB}$. 所以"$A, B$ 都发生"与"A, B 不都发生"是对立事件.

由本题可知，只有否定词"不"加于肯定词"都"前面，才构成对立事件.

类似地，对于事件："颜色全同"，"颜色不全同"，"颜色全不同"中，哪两个是对立事件就容易判断了.

例 5　已知 $(A + \overline{B})(\overline{A} + \overline{B}) + \overline{A + B} + \overline{\overline{A} + B} = C$

求 B.

解：由事件运算的对偶律和分配律，可见

$(A + \overline{B})(\overline{A} + \overline{B}) + \overline{A + B} + \overline{\overline{A} + B} = C$,

$(A + \overline{B})\overline{A} + (A + \overline{B})\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B} + A\overline{B} = C$,

$A\overline{A} + \overline{B}\,\overline{A} + A\overline{B} + \overline{B}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B} + A\overline{B} = C$,

$\varnothing + (\overline{A} + A)\overline{B} + \overline{B} + (\overline{A} + A)\overline{B} = C$,

$\overline{B}+\overline{B}+\overline{B}=C,\overline{B}=C.$

于是 $B=\overline{C}$.

例 6 接连进行 3 次射击，设 $A_i=\{$第 i 次射击命中$\}(i=1,2,3)$；$B_j=\{$3 次射击恰好命中 j 次$\}(j=0,1,2,3)$；$C_k=\{$3 次射击至少命中 k 次$\}(k=0,1,2,3)$.

1) 通过 A_1,A_2,A_3 表示 B_j 和 C_k. $(j,k=0,1,2,3)$；

2) 通过 B_j 表示 $C_k(j,k=0,1,2,3)$.

解：1) 易见

$B_0=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$；$B_1=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$；

$B_2=A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3$；$B_3=A_1A_2A_3$.

$C_0=A_1+A_2+A_3+\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$；$C_1=A_1+A_2+A_3$；

$C_2=A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3$；$C_3=A_1A_2A_3$.

2) $C_0=B_0+B_1+B_2+B_3=\Omega$；$C_1=B_1+B_2+B_3=\overline{B_0}$；

$C_2=B_2+B_3$；$C_3=B_3$.

例 7 设 A,B,C 是随机事件，说明下列关系式的意义：(1) $ABC=A$；(2) $A\cap B\cup C=A$；(3) $AB\subset A$；(4) $A\subset\overline{BC}$.

解：(1) $ABC=A\Rightarrow BC\supset A\Rightarrow B\supset A$ 且 $C\supset A$，若 A 发生则 B 与 C 同时发生.

(2) $A\cap B\cup C=A\Rightarrow B\cup C\subset A.\Rightarrow B\subset A$ 且 $C\subset A$，故 B 发生或 C 发生，均导致 A 发生.

(3) $AB\subset C\Rightarrow A$ 与 B 同时发生，必导致 C 发生.

(4) $A\subset\overline{BC}\Rightarrow A\subset\overline{B}\cup\overline{C}$，$A$ 发生，则 B 与 C 至少有 1 个不发生.

例 8 设 A、B、C 表示三个随机事件，试将下列事件用 A,B,C 表示出来.

(ⅰ) A 发生，B、C 不发生； $A\bar{B}\bar{C}$

(ⅱ) A、B 都发生，而 C 不发生； $AB\bar{C}$

(ⅲ) 所有三个事件都发生； ABC

(ⅳ) 3 个事件中至少 1 个发生； $\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$ $A\cup B\cup C$

(ⅴ) 3 个事件中至少 2 个发生； $ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$

(ⅵ) 3 个事件都不发生； $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

(vii) 不多于 1 个事件发生;

(viii) 不多于 2 个事件发生;

(ix) 恰有 1 个事件发生.

解:(i)$A\overline{B}\,\overline{C}$　　(ii)$AB\overline{C}$　　(iii)ABC

(iv)$A \cup B \cup C$　　(v)$AB \cup BC \cup CA$

(vi)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

(vii)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$;或$\overline{AB \cup BC \cup CA}$

(viii)$\overline{ABC}$ 或$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$

(ix)$A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$

三、同步自测练习

1. 写出下列各随机试验的样本空间

(1) 甲、乙二人下棋一局,观察棋赛结果;

(2) 同时掷两颗骰子,记录其出现的点数;

(3) 某寻呼台单位时间内接到的寻呼次数;

(4) 任取一灯泡,观察其寿命.

2. 证明:(1)$A - B = A\overline{B}$;(2)$A - B = A - AB$.

3. 化简:(1)$(A \cup B)(A \cup \overline{B})$;

(2) $\overline{(\overline{A}\,\overline{B} \cup C)\,\overline{AC}}$.

4. 设 A,B,C,D 是 4 个事件,试用这 4 个事件表示下列各事件:

(1) 这 4 个事件至少发生 1 个; $A \cup B \cup C \cup D$

(2) 这 4 个事件恰好发生 2 个; $AB\overline{C}\overline{D} \cup A\overline{B}C\overline{D} \cup \overline{A}\overline{B}CD \cup \overline{A}B\overline{C}D \cup \overline{A}BC\overline{D}$ $\overline{A}B\overline{C}D$

(3) A,B 都发生而 C,D 都不发生; $AB\overline{C}\overline{D}$

(4) 这 4 个事件都不发生; $\overline{A}B\overline{C}D$

(5) 这 4 个事件至多发生 1 个. $\overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A \cup B \cup C \cup D}$

5. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互斥,试证明其中任意 k 个事件互斥$(2 \leqslant k \leqslant n)$.

6. 1 个工人生产了 n 个零件,以事件 A_i 表示他生产的第 i 个零件是合格品$(1 \leqslant i \leqslant n)$. 用 A_i 表示下列事件.

(1) 没有 1 个零件是不合格品;

(2) 至少有 1 个零件是不合格品;

(3) 仅仅只有1个零件是不合格品；

(4) 至少有2个零件不是不合格品.

四、自测练习答案

1.(1)$\Omega_1=\{$甲胜乙负,乙胜甲负,和局$\}$.

(2)$\Omega_2=\{(i,j),i,j=1,2,\cdots,6\}$.

(3)$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots\}$.

(4)$\Omega_4=\{t,t\geqslant 0\}$.

2.(1) 设 $\omega\in A-B$,则 $\omega\in A$ 且 $\omega\,\overline{\in}\,B$,从而 $\omega\in A$ 且 $\omega\in\overline{B}$,故 $\omega\in A\overline{B}$,于是 $A-B\subset A\overline{B}$.设 $\omega\in A\overline{B}$,那么 $\omega\in A$ 且 $\omega\in\overline{B}$,也即 $\omega\in A$ 且 $\omega\,\overline{\in}\,B$,故 $\omega\in A-B$,于是 $A\overline{B}\subset A-B$.从而 $A-B=A\overline{B}$.

(2) 设 $\omega\in A-B$,那么 $\omega\in A$ 且 $\omega\,\overline{\in}\,B$,由 $\omega\,\overline{\in}\,B$ 知 $\omega\,\overline{\in}\,AB$,也即 $\omega\in A$,且 $\omega\,\overline{\in}\,AB$,所以 $\omega\in A-AB$,于是 $A-B\subset A-AB$.反之若 $\omega\in A-AB$,那么 $\omega\in A$,且 $\omega\,\overline{\in}\,AB$,即 $\omega\,\overline{\in}\,B$.故 $\omega\in A-B$,于是 $A-AB\subset A-B$.从而有 $A-B=A-AB$.

3.(1)
$$\begin{aligned}(A\cup B)(A\cup\overline{B})&=AA\cup A\overline{B}\cup BA\cup B\overline{B}\\&=A\cup A\overline{B}\cup BA\cup\varnothing\\&=A\cup A\overline{B}\cup AB\\&=A\cup A(B\cup\overline{B})\\&=A\cup A\\&=A.\end{aligned}$$

(2) 多次运用对偶原理,便得到:
$$\begin{aligned}\overline{(\overline{A}\,\overline{B}\cup C)\overline{AC}}&=\overline{\overline{A}\,\overline{B}\cup C}\cup AC\\&=\overline{\overline{A}\,\overline{B}}\,\overline{C}\cup AC\\&=(A\cup B)\overline{C}\cup AC\\&=A\overline{C}\cup B\overline{C}\cup AC\\&=A\overline{C}\cup AC\cup B\overline{C}\\&=A(\overline{C}\cup C)\cup B\overline{C}\\&=A\cup B\overline{C}.\end{aligned}$$

4.(1)$A \cup B \cup C \cup D$.

(2)$ABC\overline{C}\,\overline{D}$

(3)$AB\overline{C}\,\overline{D}$.

(4)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} = \overline{A \cup B \cup C \cup D}$.

(5)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$

$= \overline{AB \cup AC \cup AD \cup BC \cup BD \cup CD}$.

5. 由定义知,n 个事件互斥当且仅当两两互斥,故由 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互斥 $\Leftrightarrow$ 两两互斥 $\Rightarrow$ 其中 k 个事件两两互斥 $\Leftrightarrow$ 这 k 个事件互斥.

6.(1) $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

(2) $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

(3) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} [\overline{A_i}(\bigcap\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} A_j)]$.

(4) 原事件即"至少有两个零件是合格品",可表示为 $\bigcup\limits_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} A_i A_j$.

第二节 概率的定义与性质

一、基础知识导学

1. 概率的概念

对于一个随机事件 A 发生的可能性的大小,用一个数 $P(A)$ 来表示,这个数通常就称为随机事件 A 发生的概率,简称为事件 A 的概率.

(1) 概率的统计定义

在一个随机实验中,如果事件 A 出现的频率 m/n 随着实验次数 n 的增大,它在区间 $[0,1]$ 上的某个常数 p 附近摆动,那么定义事件 A 的概率为 $P(A) = p$. 概率的这种定义,称为概率的统计定义.

(2) 概率的古典定义

在古典概型下,设试验的所有可能结果为 n 个,即有 n 个基本事件,而事件 A 包含有其中的 m 个试验结果,即 A 有 m 个基本事件,于是事件 A 的概率

为：

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{ 中所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

概率的这种定义，称为概率的古典定义.

(3) 概率的几何定义

如果试验的所有可能结果为无限多个，每个试验结果出现的可能性相等，古典定义就不适用，这时借助于几何上的度量(比如面积)来合理地规定的概率，称为概率的几何定义.

设有一可度量的区域 G(这个区域可以是直线区域，也可以是平面区域或空间区域)，向域中任意投一点，此点落于 G 内任一位置是等可能的，且所投点落在 G 中任意区域 g 内的可能性大小与 g 的度量成正比，而与 g 的位置和形状无关，则称这个随机试验为几何概率型. 若有利于事件 A 的 G 中的部分区域为 g，则

$$P(A)=\frac{g\text{ 的几何度量}}{G\text{ 的几何度量}}$$

(4) 概率的公理化定义：

设 A 为随机事件，$P(A)$ 为定义在所有随机事件组成的集合上的实函数且满足下列三条公理：

公理 1　对任一事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

公理 2　$P(\Omega)=1$.

公理 3　对于两两互斥的可数多个随机事件 $A_1,A_2,\cdots$ 有 $P(A_1+A_2+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$

则称函数 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

这个定义称为概率的公理化定义.

2. 概率的基本性质

性质 1　不可能事件的概率为零，即 $P(\varnothing)=0$.

性质 2　设有限多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，

那么 $P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$.

性质 3　设 A 为任一随机事件，那么

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质 4　设 A,B 为 2 个事件，且 $A\supset B$，则

$P(A-B)=P(A)-P(B)$.