PUTONGGAODENGJIAOYU GAOJIYINGYONGXING RENCAI PEIYANGGUIHUAJIAOCAI

普通高等教育高级应用型人才培养规划教材

# 高等数学（下册）

主编　丁尚文　廉玉忠　许其州

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育高级应用型人才培养规划教材

# 高等数学

（下册）

主　编　丁尚文　廉玉忠　许其州
副主编　兰　星　劳　智　吴云宗
编　写　夏文杰　张　娜　皮定恒

同濟大學 出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

## 内 容 提 要

本书是在贯彻落实教育部关于"高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划"要求精神的基础上，按照国家非数学类专业数学基础课程教学指导委员会最新提出的"工科类本科数学基础课程教学基本要求"，并根据高等学校理工类专业高等数学课程的教学大纲编写而成的. 全书分为上下两册. 上册分七章，内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程. 下册分五章，内容包括空间解析几何与向量代数、无穷级数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分.

本书在内容上力求适用，够用，简明，通俗；在例题选择上力求全面，典型，难度循序渐进；在论述形式上则力求详尽，易懂. 每节后都附有比较全面的基础性习题与综合性习题. 为满足读者进行阶段性复习与自我检测的需要，在每一章末安排有自测题. 书后附有习题答案与提示.

本书适合作为普通高等院校理工类非数学专业高等数学课程的教材使用，也可供专科院校相关专业人员和广大教师参考.

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学. 下册/丁尚文，廉玉忠，许其州主编. —上海：同济大学出版社，2008. 8

普通高等教育高级应用型人才培养规划教材

ISBN 978-7-5608-3809-0

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①丁…②廉…③许… Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 107462 号

普通高等教育高级应用型人才培养规划教材

**高等数学(下册)**

主编 丁尚文 廉玉忠 许其州

责任编辑 张 莉 责任校对 徐春莲 封面设计 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www. tongjipress. com. cn

(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 江苏句容排印厂

开 本 787 mm×960 mm 1/16

印 张 14. 5

字 数 290 000

印 数 1—4100

版 次 2008 年 8 月第 1 版 2008 年 8 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-3809-0/O・319

定 价 26. 00 元

# 前　言

当前我国的高等教育正处于飞速发展的阶段，以培养高素质应用型人才为目标的各类具有特色的本科院校正是在这种大环境下应运而生．这无疑对高校的教材，特别是对像“高等数学”这种重要的基础理论课的教材提出了更新、更严的要求．为了满足大多数本科院校出现的新的教学形势、学生特点，我们编写了这套高等数学教材．

本书是在贯彻落实教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的要求精神，依据教育部制定的“高等数学课程教学基本要求”和教育部“质量工程”(2007)文件中关于“分类指导”、“注重特色”的要求，在总结多年本科数学教学经验，探索本科数学教学发展动向，分析国内外同类教材发展趋势的基础上编写而成的．全书分为上下两册．上册分七章，内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程．下册分五章，内容包括空间解析几何与向量代数、无穷级数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分．

本书编写的指导思想是：基础理论以够用为度，突出基本概念、基本方法，加强基本能力的培养，注重实际应用．为此本书在内容上力求适用，够用，简明，通俗；在例题选择上力求全面，典型；在论述形式上则力求详尽，易懂．每节后面都安排比较全面的基础性习题与综合性习题．为满足读者进行检测的需要，在每章末安排有自测题．全书习题均附有答案与提示．

本书知识系统，讲解全面，例题丰富，难度适宜．适合作为普通高等院校理工类(非数学专业)高等数学课程的教材使用，也可供成教学院或高职高专院校选用为教材，并可为相关专业人员和广大教师参考之用．

本书由丁尚文、廉玉忠、许其州主编，兰星、劳智、吴云宗副主编．参加编写的人员有夏文杰、张娜、皮定恒．

在本书的编写过程中东莞理工城市学院、北理工珠海学院、海洋大学寸金学院、白云学院、广东技师天河学院等学校的领导都给予了热情的鼓励与支持．在这里谨向他们表示最诚挚的谢意．

由于时间仓促，书中难免有不足之处，敬请专家、教师和读者不吝赐教．

编　者

2008年6月

# 目　　录

# 8　空间解析几何与向量代数

空间解析几何与平面解析几何相仿，其基本思想是通过建立坐标系，把空间的点与一组有序数对应起来，然后把空间图形与方程对应起来，从而可以用代数的方法来研究几何问题. 这种讨论问题的方法就是通常所说的坐标法.

为了更方便地讨论空间图形，除了要采用坐标法之外，还要用到向量的概念、向量的代数运算及其基本性质，这些知识称为向量代数. 向量代数不仅是空间解析几何的一个组成部分，而且在力学、物理学和工程技术中也起着很重要的作用.

空间解析几何的知识是学习多元函数微积分的基础.

本章首先引入向量的概念，在此基础上建立空间坐标系，然后利用坐标法讨论向量的运算，并介绍空间解析几何的一些基本内容，为学习多元函数微积分奠定基础.

## 8.1　向量及其线性运算

### 8.1.1　向量的概念

在自然界和工程技术中，经常遇到的量一般分为两类：一类是只有大小，没有方向，例如长度、质量等；另一类既有大小，又有方向，例如力、速度、电场强度等，这一类量称为向量(或矢量).

在数学上，通常用一条有向线段表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 $A$ 为起点、$B$ 为终点的有向线段所表示的向量，记为 $\overrightarrow{AB}$，如图 8－1 所示. 有时也可以用一个黑体字母表示向量，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{r}$ 等，或书写时在字母上方加箭头，即写成 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{r}$ 等.

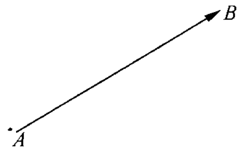

图 8－1

在实际问题中，有些向量与其起点有关，有些向量与其起点无关，本书中所涉及的向量，都是只考虑其大小和方向，而不论它的起点在什么地方. 这样的向量称为**自由向量**，简称**向量**.

向量的大小称为向量的**模**. 向量 $\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}$ 的模分别记为 $|\boldsymbol{a}|$，$|\overrightarrow{AB}|$. 模等于 1 的向量称为**单位向量**. 模等于零的向量称为**零向量**，记为 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$，零向量的方向

可以看作是任意的.

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量,任取空间一点 $O$,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,规定不超过 $\pi$ 的 $\angle AOB$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角(图 8-2),记做 $(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$. 若 $(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\varphi$,则 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个为零向量,则规定它们的夹角可以在 0 到 $\pi$ 之间任意取值.

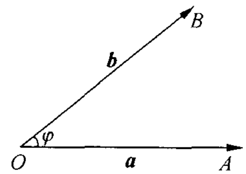

图 8-2

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等,且方向相同,那么称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **相等**,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反,那么称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**,记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向是任意的,所以可以认为零向量与任何向量都平行.

设有 $k$ 个向量,当它们的起点重合,若它们的终点与公共起点在一个平面,则称这 $k$ 个向量**共面**.

## 8.1.2 向量的线性运算

### 1. 向量的加减法

物理学中的力是向量的现实原型. 力的合成按平行四边形法则或三角形法则进行,向量的加法也遵循同样的法则.

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,若将向量 $\boldsymbol{b}$ 平移,使其起点与向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合,那么从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 如图 8-3 所示. 这种求向量和的方法称为向量加法的**三角形法则**.

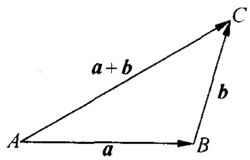

图 8-3

向量的加法符合下列运算规律:

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

向量的加法可以推广到任意有限个向量的情形. 即 $n$ 个向量 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$ 相加可以写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

并按向量相加的三角形法则进行:使前一个向量的终点作为次一个向量的起点,相继作向量 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$,则从第一个向量的起点到最后一个向量终点的向量就是所求的和. 如图 8-4 所示,有

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5.$$

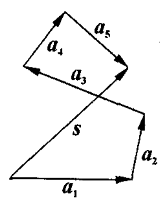

图 8-4

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量,与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$

的**负向量**,记为$-\boldsymbol{a}$. 由此规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

即把向量$-\boldsymbol{a}$ 加到向量$\boldsymbol{b}$ 上,便得到向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差.

显然,若将向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 移到同一起点 $O$,则以向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点为起点,以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量就是$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,如图 8-5 所示.

特别地,当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时,有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

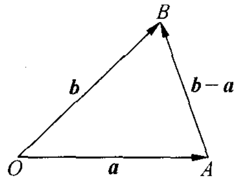

图 8-5

由三角形两边之和大于第三边的原理,有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \quad 及 \quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中,当向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同或相反时,等号成立.

**2. 向量与数的乘法**

实数$\lambda$ 与向量$\boldsymbol{a}$ 的乘积记作$\lambda\boldsymbol{a}$,我们规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,它的模

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

当$\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同;当$\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反;当$\lambda=0$ 时,$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$,即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量,其方向可以是任意的.

向量与数的乘积满足下列运算规律:

(1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$.

这些运算规律都可以用向量与数的乘积的规定来证明,这里从略.

向量的相加与数乘统称为向量的线性运算.

下面利用向量这个工具来解决一些问题.

**例 1** 在三角形 $ABC$ 中,$D$, $E$ 是$BC$ 边上的三等分点,如图 8-6 所示. 设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,试用 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$.

**解** 由三角形法则,知

$$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},$$

再由数与向量的乘法定义,知

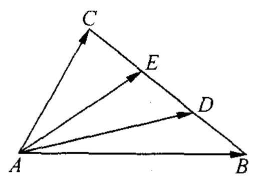

图 8-6

$$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),$$

$$\overrightarrow{EC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

从$\triangle ABD$及$\triangle AEC$中可得

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD},\qquad \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{EC},$$

所以

$$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}),$$

$$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}).$$

### 3. 非零向量的单位向量与数轴

设向量$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则模为1且方向与$\boldsymbol{a}$相同的向量称为$\boldsymbol{a}$的单位向量，记作$\boldsymbol{e}_a$.

由于$|\boldsymbol{a}|>0$，所以$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$的方向与$\boldsymbol{e}_a$相同，也与$\boldsymbol{a}$相同，且$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$的模是

$$\big||\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a\big|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{e}_a|=|\boldsymbol{a}|,$$

即$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$与$\boldsymbol{a}$的模也相同，因此 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$.

从而

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},$$

这说明，任一非零向量$\boldsymbol{a}$除以它的模，就是向量$\boldsymbol{a}$的单位向量.

由于向量$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$平行，因此，易由向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系.

**定理 8.1.1** 设向量$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$平行的充分必要条件是：存在唯一的实数$\lambda$，使$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

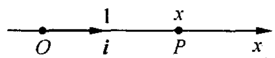


图 8-7

我们知道，给定一个点、一个方向及单位长度，就确定了一条数轴. 那么，给定一个点及单位向量就确定了一条数轴. 设点$O$及单位向量$\boldsymbol{i}$确定了数轴$Ox$（图8-7）. 对于数轴上任一点$P$，对应一个向量$\overrightarrow{OP}$，由于$\overrightarrow{OP}$平行于单位向量$\boldsymbol{i}$，因此唯一存在一个实数$x$，使$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$. 由此，数轴上的点$P$与实数$x$之间存在一一对应，并定义实数$x$为点$P$的坐标.

## 习题 8-1

**1.** 设向量$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{r}_2=-2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，其中$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$是已知向量，求$3\boldsymbol{r}_1-2\boldsymbol{r}_2$.

**2.** 在三角形$ABC$中，设已知$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，现将$BC$边三等分，分点依次为$D_1$，$D_2$，求向量$\overrightarrow{D_1A}$，$\overrightarrow{AD_2}$.

**3.** 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是一个平行四边形.

# 8.2 空间直角坐标系

## 8.2.1 空间直角坐标系

### 1. 空间直角坐标系

过空间一定点 $O$,作三个互相垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$,就确定了以点 $O$ 为原点的三条数轴,分别称为 $x$ 轴(横轴)、$y$ 轴(纵轴)和 $z$ 轴(竖轴),如图 8-8 所示,统称为坐标轴. $O$ 称为坐标原点,三条坐标轴的正向符合右手规则,即以右手握住 $z$ 轴,当四个手指从 $x$ 轴正向转向 $y$ 轴正向时,大拇指的指向就是 $z$ 轴的正向(图 8-9). 这样它们就构成了空间直角坐标系,称为 $Oxyz$ 坐标系或$[O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}]$坐标系.

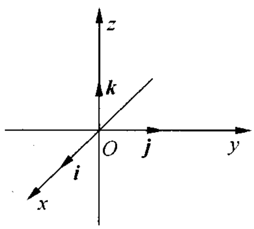

图 8-8

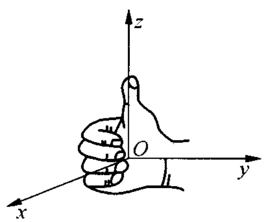

图 8-9

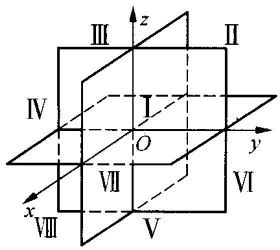

图 8-10

三条坐标轴中,任意两条可以确定一个平面,这样的平面称之为坐标面, $x$ 轴与 $y$ 轴所确定的坐标面叫作 $xOy$ 坐标面,类似的有 $yOz$ 坐标面及 $zOx$ 坐标面. 三个坐标面将空间分成八个部分,每一个部分叫作一个卦限. 含 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴正半轴的那个卦限叫第一卦限,其他的第二、三、四卦限,在 $xOy$ 面上方,依次按逆时针方向排列. 同样地,第五、六、七、八卦限在 $xOy$ 面下方,依次按逆时针方向排列. 这八个卦限分别用Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ, Ⅴ, Ⅵ, Ⅶ, Ⅷ表示,如图 8-10 所示.

### 2. 空间中点的坐标表示

对于任给的向量 $\boldsymbol{r}$,都有对应点 $M$, 使$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$,以$\overrightarrow{OM}$ 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体,如图 8-11 所示. 有

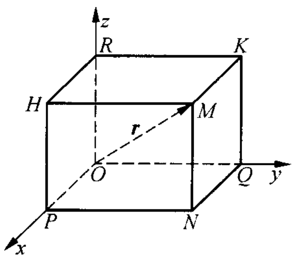

图 8-11

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

设$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$,则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

显然,给定向量 $\boldsymbol{r}$,就确定了点 $M$,进而确定了 $x, y, z$ 三个有序数;反之给定了三个有序数 $x, y, z$,也就唯一确定了向量 $\boldsymbol{r}$ 和空间一点 $M$. 由此,称 $x, y, z$ 三个有序数为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标,记为 $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$,也称 $x, y, z$ 三个有序数为点 $M$ 的坐标,记为 $M(x, y, z)$. 同时,$x, y, z$ 分别称为点 $M$ 的横坐标、纵坐标和竖坐标,向量 $\boldsymbol{r}$ 称为点 $M$ 关于原点 $O$ 的向径.

### 8.2.2 利用坐标进行向量的线性运算

设向量 $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$,即

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k},$$

则向量的线性运算如下:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} &= (a_x + b_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\boldsymbol{k}; \\
\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} &= (a_x - b_x)\boldsymbol{i} + (a_y - b_y)\boldsymbol{j} + (a_z - b_z)\boldsymbol{k}; \\
\lambda\boldsymbol{a} &= (\lambda a_x)\boldsymbol{i} + (\lambda a_y)\boldsymbol{j} + (\lambda a_z)\boldsymbol{k}.
\end{aligned}$$

或表示为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} &= \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}; \\
\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} &= \{a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z\}; \\
\lambda\boldsymbol{a} &= \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.
\end{aligned}$$

显然,$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式为

$$\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\} = \lambda\boldsymbol{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

于是,当向量 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ 时,向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行的充分必要条件是

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}.$$

在这个式子中,当 $\boldsymbol{a}$ 的坐标中有一个或两个为零时,则 $\boldsymbol{b}$ 的对应坐标也应该理解为零. 例如,当 $a_x = 0$ 时,应理解为 $b_x = 0$.

**例 1** 设已知两点 $A(a_x, a_y, a_z)$, $B(b_x, b_y, b_z)$,求向量$\overrightarrow{AB}$的坐标.

**解** 已知 $\overrightarrow{OA} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\overrightarrow{OB} = \{b_x, b_y, b_z\}$,

从而

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} &= \{b_x, b_y, b_z\} - \{a_x, a_y, a_z\} \\
&= \{b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z\}.
\end{aligned}$$

**例 2** 已知两点 $A(a_x, a_y, a_z)$, $B(b_x, b_y, b_z)$和实数 $\lambda \neq 1$, 在直线 $AB$ 上求点 $M$,使

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}.$$

**解** 由于 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM},$

所以 $$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}),$$

从而 $$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}).$$

将已知向量的坐标代入,即得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\frac{1}{1+\lambda}(\{a_x,\ a_y,\ a_z\}+\lambda\{b_x,\ b_y,\ b_z\})\\&=\left\{\frac{a_x+\lambda b_x}{1+\lambda},\ \frac{a_y+\lambda b_y}{1+\lambda},\ \frac{a_z+\lambda b_z}{1+\lambda}\right\}.\end{aligned}$$

点 $M$ 叫做有向线段$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$的 $\lambda$ 分点.

### 8.2.3 向量的模、方向角及投影

#### 1. 向量的模

设向量 $\boldsymbol{r}=\{x,\ y,\ z\}$,对应点 $M(x,\ y,\ z)$,如图 8-11 所示,则有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

因为 $$|\overrightarrow{OP}|=x,\ |\overrightarrow{OQ}|=y,\ |\overrightarrow{OR}|=z,$$

所以,由勾股定理可得

$$|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{OR}|^2},$$

于是,就得到向量 $\boldsymbol{r}$ 的模为

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

这也是原点 $O$ 与 $M$ 之间的距离.

**例 3** 已知两点 $A(4,\ 0,\ 3)$和 $B(6,\ 2,\ 4)$,求向量$\overrightarrow{AB}$的单位向量 $\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{AB}}$.

**解** 因为

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\{4,\ 0,\ 3\}-\{6,\ 2,\ 4\}=\{2,\ 2,\ 1\},$$

所以 $$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3,$$

于是 $$\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{AB}}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{\{2,\ 2,\ 1\}}{3}=\left\{\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right\}.$$

#### 2. 方向角与方向余弦

非零向量 $\boldsymbol{r}=\{x,\ y,\ z\}$ 的方向,可以用它与 $x,\ y,\ z$ 轴正向之间的夹角 $\alpha$,

$\beta$, $\gamma$ 来确定，称 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ 为非零向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向角**. 规定 $0 \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant \pi$.

通过计算，可以得出

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{r}|},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{r}|},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\boldsymbol{z}}{|\boldsymbol{r}|}.$$

其中，$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**. 并且有

$$\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\{x,\ y,\ z\} = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = \boldsymbol{e}_r.$$

所以，以向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦为坐标的向量就是向量 $\boldsymbol{r}$ 的单位向量，并由此可得

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

**例 4** 已知点 $A(4, 1, 0)$, $B(0, 1, 3)$，求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦及其单位向量.

**解** 因为 $\overrightarrow{AB} = \{-4, 0, 3\}$，所以向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2+0+3^2} = 5.$$

向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha = -\frac{4}{5}, \quad \cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = \frac{3}{5}.$$

向量 $\overrightarrow{AB}$ 的单位向量为

$$\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{AB}} = \left\{-\frac{4}{5},\ 0,\ \frac{3}{5}\right\}.$$

**例 5** 设点 $A$ 位于第一卦限，向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$，且 $|\overrightarrow{OA}| = 6$，求点 $A$ 的坐标.

**解** 已知 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$，所以

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}, \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ 得

$$\cos\gamma=\pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\pm\frac{1}{2}.$$

因为点 $A$ 位于第一卦限，所以 $\cos\gamma>0$，故 $\cos\gamma=\frac{1}{2}$，

于是 $$\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|\,\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{OA}}=6\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right\}=\{3,3\sqrt{2},3\},$$

这就是点 $A$ 的坐标.

**3. 向量在轴上的投影**

为了单独考虑向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 与 $x$ 轴的关系，过点 $M$ 作与 $x$ 轴垂直的平面. 设平面与 $x$ 轴交于点 $P$，则向量 $\overrightarrow{OP}$ 是向量 $\boldsymbol{r}$ 在 $x$ 轴的分向量，若 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，则得 $\boldsymbol{r}$ 向量在 $x$ 轴的坐标 $x$，且 $x=|\boldsymbol{r}|\cos\alpha$，这里 $\alpha$ 是向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $x$ 轴的方向角.

一般地，设点 $O$ 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定 $u$ 轴(图 8－12). 任给向量 $\boldsymbol{r}$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，再过点 $M$ 作与 $u$ 轴垂直的平面，交 $u$ 轴于点 $M'$，则向量 $\overrightarrow{OM'}$ 叫做向量 $\boldsymbol{r}$ 在 $u$ 轴上的分向量，点 $M'$ 叫做点 $M$ 在 $u$ 轴上的投影. 设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$，则 $\lambda$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 $u$ 轴上的投影，记为 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}$ 或 $(\boldsymbol{r})_u$.

显然，向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标，就是 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影，即 $a_x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}$，$a_y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a}$，$a_z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}$.

由此可知，向量的投影具有与坐标相同的性质：

(1) $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$，

其中，$\varphi$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $u$ 轴的夹角；

(2) $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$；

(3) $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$.

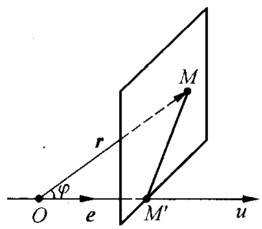

图 8－12

## 8.2.4 两点间的距离公式

设空间中两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，则点 $M_1$ 与 $M_2$ 之间的距离 $|M_1M_2|$ 就是向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模. 因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=\{x_2,y_2,z_2\}-\{x_1,y_1,z_1\}\\&=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\},\end{aligned}$$

所以，$M_1$ 与 $M_2$ 之间的距离为

$$|M_1M_2|=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

**例 6** 验证以 $O(0,0,0)$，$A(1,-2,2)$，$B(3,-1,0)$ 三点为顶点的三角