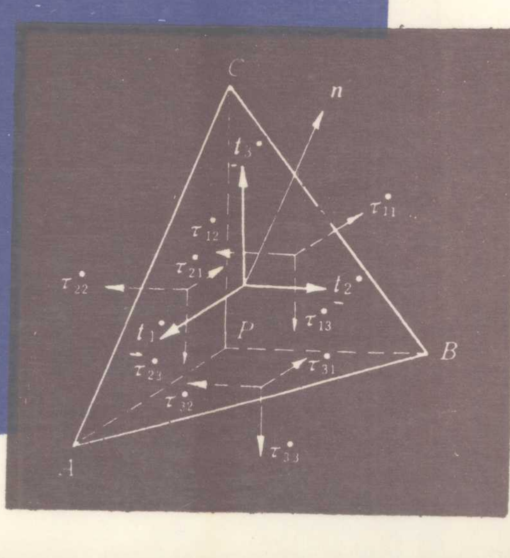
高等学校教材

弹性波动力学

胡德绥 编著



地质出版社

高等学校教材

弹性波动力学

胡德绥 编著

地质出版社

内 容 简 介

本书采用张量运算为工具，系统而简捷地介绍了弹性波动力学的基本理论和方法，并在此基础之上讨论了一些有关弹性波的激发和传播问题。

本书可作为地质院校应用地球物理等专业本科生的教材，也可供有关专业的研究生和工程技术人员参考。

高等学校教材
弹性波动力学
胡德绥 编著

责任编辑：林清溪
地质出版社出版
（北京和平里）
地质出版社印刷厂印刷
（北京海淀区学院路29号）
新华书店总店科技发行所发行

开本：787×1092 1/16 印张：15 字数：353000
1989年11月北京第一版·1989年11月北京第一次印刷
印数：1—1880册 定价：3.35元
ISBN 7-116-00520-X/P·445

前言

在地震学和地震勘探中都必须探讨、处理有关地壳介质中的机械波动问题。实践表明，在许多情况下，可以把地震波视为弹性波。因此，弹性波的激发和传播规律就是学习、研究地震学和地震勘探方法的重要基础。本书先介绍弹性动力学的基本理论，在此基础之上再讨论一些有关弹性波激发和传播的规律。

本书是作者自1980年以来，为石油物探、地球深部探测两专业大学本科生讲授弹性力学课程编写的讲义进一步发展而成的。编写本书时，注意取材密切结合专业需要，为大学本科学生在专业学习和今后实践上打下必要的基础。同时，力求突出主干，积极贯彻少而精的原则。本书使用仿射正交张量运算为工具，从而简化数学推导以突出物理概念，并且也有利于学生掌握张量运算这一强有力的数学工具。

本书第一章作为对后继各章的预备而介绍了仿射正交张量，以使学生学习和熟悉张量记号及运算规律。第二章至第六章为弹性动力学的基本理论。第七、第八章讨论了一些有关弹性波的激发和传播问题。有些章节的内容教员可以根据专业教学计划安排及学生的实际情况取舍。

在编写本书的过程中得到了成都地质学院教务处及物探系许多同志的鼓励和帮助，谨在此一并表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，错误与不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

胡德绥

1988年12月于成都地质学院

主要符号表

e_1, e_2, e_3 直角坐标系的单位基向量

e_r, e_θ, e_z 柱面坐标系的单位基向量

e_R, e_θ, e_ϕ 球面坐标系的单位基向量

β_{ij} 坐标变换系数

$\delta_{ij}, \delta_{\alpha\beta}$ Kronecker符号

e_{ijk} 排列符号

$H(t)$ 单位阶跃函数

$\delta(x)$ Dirac delta函数

x 质点的向径

u 质点的位移向量

$u^{(1)}$ 位移u的无旋部分

$u^{(2)}$ 位移u的等体积部分

u_1, u_2, u_3 位移在直角坐标系内的分量

u_r, u_θ, u_z 位移在柱面坐标系内的分量

u_R, u_θ, u_ϕ 位移在球面坐标系内的分量

$e_{ij}, e_{\alpha\beta}$ 应变张量分量

ω_{ij} 转动张量分量

ω_i 转动向量的分量

$\theta = e_{ii} = I_e$ 体积应变

e_1, e_2, e_3 主应变

$\mathrm{I}_e, \mathrm{II}_e, \mathrm{III}_e$ 应变张量不变量

e_{ij} 应变偏张量分量

f 单位质量所受的体力

t 应力向量

τ_n 面元上的正应力

τ_s 面元上的剪应力

τ_{ij} 应力张量分量

τ_1, τ_2, τ_3 主应力

$\mathrm{I}_\tau, \mathrm{II}_\tau, \mathrm{III}_\tau$ 应力张量不变量

s_{ij} 应力偏张量分量

K 弹性体的动能

U 弹性体的内能

A 功

W 应变能密度

$\mathscr{U}$ 弹性体的总能量

ε 能量密度

φ 能通量密度向量

C_{ijkl} 弹性系数张量分量

λ, μ Lamé系数

E 弹性模量

G 剪切弹性模量

ν Poisson比

κ 体积弹性模量

ρ 密度

ϕ, ψ Lamé势

c_1 无旋波的传播速度

c_2 等体积波的传播速度

k 圆波数

ω 圆频率

T 周期

α 频率

Λ 波长

目　录

第一章　仿射正交张量

在高等数学里学习了标量函数和向量函数的运算规律。但是，仅有标量、向量这两类量还是不够的，还需要引入张量以描述具有更复杂性质的量。以后会知道标量和向量都是张量的特殊情形。

自然界中客观存在的几何量、物理量以及它们的变化规律都是不依赖于坐标系的选取而存在的。可是，为了进行数量化的描述和计算，常常又需要选取某种坐标系。使用张量来描述这些几何量和物理量，就可以用张量方程来表达、叙述客观的自然规律。正如我们以后将会看到的：张量方程的形式是不随坐标系变换而变的，所以使用张量方程所作的表述就能适应自然规律与坐标系选取无关的这一客观要求。同时，使用张量可使方程书写紧凑、数学推导简捷，从而突出了物理概念，使我们能够更加深入地探讨问题。

就一般曲线坐标系讨论的张量称为**普遍张量**，而就Descartes直角坐标系讨论的张量称为**仿射正交张量**。作为对本书以后各章内容的预备，本章只就三维Descartes直角坐标系（以下简称直角坐标系）简要地介绍仿射正交张量。今后，如无特别申明，凡说到坐标系都是指上述的直角坐标系；凡说到张量都是指三维空间中的仿射正交张量。

为了讨论张量，我们先来介绍指标记号及两个符号。

§1.1 指标记号及两个符号

1.1.1　指　标　记　号

设有一个坐标系$ox_1x_2x_3$，选沿坐标轴的单位向量$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$及$\boldsymbol{e}_3$为**基向量**，这些基向量是相互正交的，如图1.1-1所示。我们可以把此坐标系的基向量及空间内任意一点P的坐标分别写为

$$\boldsymbol{e}_i,\quad i=1,2,3$$

及

$$x_i,\quad i=1,2,3$$

我们称上述书写中的i为**指标**，$i=1,2,3$就标示了指标i的**取值范围**，并且称凡使用指标的记号系统为**指标记号**。使用指标记号也可把上述点P的向径$\boldsymbol{x}$表示为

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{3}x_i\boldsymbol{e}_i \qquad (1.1—1)$$

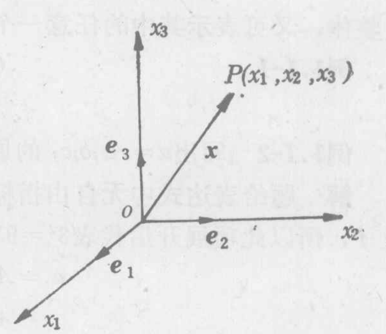


图 1.1-1

为了简化书写，我们采用所谓的**求和约定**：如果在数学式内同一项中，有某个指标重复出现一次且仅一次，就表示对该指标在其取值范围内取一切值，并对所得的对应项进行求和。例如，使用此求和约定后，式（1.1—1）就可写为

$$\boldsymbol{x}=x_i\boldsymbol{e}_i,\quad i=1,2,3 \qquad (1.1—2)$$

又如可以把方程组

$$\left.\begin{aligned}A_{11}x_1+A_{12}x_2+A_{13}x_3=b_1\\A_{21}x_1+A_{22}x_2+A_{23}x_3=b_2\\A_{31}x_1+A_{32}x_2+A_{33}x_3=b_3\end{aligned}\right\}$$

写为

$$A_{ij}x_j=b_i,\quad i,j=1,2,3 \qquad (1.1\text{—}3)$$

在同一项中重复出现一次、从而对其应用求和约定的指标称为**哑指标**；不重复出现、因而不参与约定求和的指标称为**自由指标**。式（1.1—2）中的 i 、式(1.1—3)中的 j 都是哑指标，而式（1.1—3)中的 i 却是自由指标。由于哑指标只是表示要进行约定的求和，所以使用什么字母来表示它就无关紧要，例如可以用$x_k\boldsymbol{e}_k$及$A_{il}x_l$去分别代替$x_i\boldsymbol{e}_i$及$A_{ij}x_j$。在同一式中的每一项必须出现相同的自由指标，如式（1.1—3）所示。像$A_{ij}x_j=b_k$这样的方程就不能成立，因为此式中项$A_{ij}x_j$的自由指标为 i ，而项b_k的自由指标为 k，该方程就无意义了。

自由指标的个数决定了简写方程代表实际方程的个数，而哑指标的个数决定了该项所代表的实际求和项的项数。例如式（1.1—2)无自由指标，所以它实际上只代表$3^0=1$个表达式，而其右端项有一个哑指标 i ，所以它代表$3^1=3$项的和；式(1.1—3）有一个自由指标 i ，所以它实际上代表$3^1=3$个表达式，其左端项有一个哑指标 j ，所以它代表$3^1=3$项的和。

为了进一步简化表述，我们采用如下的**指标取值范围约定**：今后如果没有特别说明，用拉丁字母书写的指标其取值范围是1，2，3，而用希腊字母书写的指标其取值范围是1，2. 使用这项约定后，式（1.1—2)、(1.1—3）就可分别写为

$$\boldsymbol{x}=x_i\boldsymbol{e}_i,\quad A_{ij}x_j=b_i$$

而不必在其后写出 $i=1,2,3$及$i,j=1,2,3$了。

今后，例如写出A_{ij}，它既可表示$3^2=9$个量

$$A_{11},\ A_{12},\ A_{13},\ A_{21},\ A_{22},\ A_{23},\ A_{31},\ A_{32},\ A_{33}$$

的整体，又可表示其中的任意一个，而由上下文的叙述来确定。

例1.1-1

$$Q_{ii}=Q_{11}+Q_{22}+Q_{33}$$

$$S_{\alpha\alpha}=S_{11}+S_{22}$$

例1.1-2 写出$a=A_{ij}b_ic_j$ 的展开式。

解 题给表达式中无自由指标，所以只代表 $3^0=1$个表达式；右端项有两个哑指标 i 及 j，所以此项展开后代表$3^2=9$项的和。展开为

$$\begin{aligned}a=&A_{11}b_1c_1+A_{12}b_1c_2+A_{13}b_1c_3\\&+A_{21}b_2c_1+A_{22}b_2c_2+A_{23}b_2c_3\\&+A_{31}b_3c_1+A_{32}b_3c_2+A_{33}b_3c_3\end{aligned}$$

例1.1-3 写出$t_i=\tau_{ji}n_j$的展开式。

解 题给式中有一个自由指标 i ，所以实际上它代表$3^1=3$个表达式；右端项有一个哑指标 j，所以该项展开后是$3^1=3$项的和。

$i=1$时， $t_1=\tau_{j1}n_j=\tau_{11}n_1+\tau_{21}n_2+\tau_{31}n_3$

$i=2$时， $t_2=\tau_{j2}n_j=\tau_{12}n_1+\tau_{22}n_2+\tau_{32}n_3$

$$i=3\text{时，}\quad t_3=\tau_{j3}n_j=\tau_{13}n_1+\tau_{23}n_2+\tau_{33}n_3$$

例1.1-4 写出$A_{jk}=B_{ij}C_{ik}$的展开式。

解 题给式中有两个自由指标 j 及 k，所以实际上它代表$3^2=9$个表达式；右端项有一个哑指标 i，所以该项展开后是$3^1=3$项的和。请读者自己一一写出展开式。

1.1.2 两个符号

使用下述的两个符号，可以简化书写和运算。

1. Kronecker符号

Kronecker符号定义为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1，当 i=j\\0，当 i\neq j\end{cases}\tag{1.1—4}$$

亦即

$$\delta_{11}=\delta_{22}=\delta_{33}=1$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\delta_{23}=\delta_{32}=\delta_{31}=\delta_{13}=0$$

由此定义可以推知：

（1）
$$\delta_{ij}=\delta_{ji}\tag{1.1—5}$$
（2）
$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}\tag{1.1—6}$$
（3）
$$\delta_{ii}=\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=3\tag{1.1—7}$$
（4）
$$a_j\delta_{ij}=a_i\tag{1.1—8}$$
（5）
$$A_{kj}\delta_{ik}=A_{ij}\tag{1.1—9}$$
（6）
$$\delta_{ik}\delta_{kj}=\delta_{ij}\tag{1.1—10}$$

式（1.1—5）—（1.1—7）是显然的，对式（1.1—8）可证明如：

$$当 i=1 时，\quad a_j\delta_{1j}=a_1\delta_{11}+a_2\delta_{12}+a_3\delta_{13}=a_1$$

$$当 i=2 时，\quad a_j\delta_{2j}=a_1\delta_{21}+a_2\delta_{22}+a_3\delta_{23}=a_2$$

$$当 i=3 时，\quad a_j\delta_{3j}=a_1\delta_{31}+a_2\delta_{32}+a_3\delta_{33}=a_3$$

因此，一般地有

$$a_j\delta_{ij}=a_i$$

用类似方式可以证明式（1.1—9）及（1.1—10）。

例1.1-5 设有向量$\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{e}_i$及$\boldsymbol{b}=b_i\boldsymbol{e}_i$，则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_i\pm b_i)\boldsymbol{e}_i$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_i\boldsymbol{e}_i\cdot b_j\boldsymbol{e}_j=a_ib_j\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=a_ib_j\delta_{ij}=a_ib_i$$

$$a^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=a_ia_j\delta_{ij}=a_ia_i$$

例1.1-6 设$\boldsymbol{n}=n_i\boldsymbol{e}_i$为一个单位向量，$n_i=\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{e}_i)$，显然 $(n_1)^2+(n_2)^2+(n_3)^2=1$。使用指标记号就可以表示成$n_in_i=1$或$n_in_j\delta_{ij}=1$。

例1.1-7 利用式（1.1—8），可以把 $ds^2=dx_idx_i$ 写为 $ds^2=\delta_{ij}dx_idx_j$。

2. 排列符号

排列符号定义为

$$e_{ijk}=\begin{cases}1，&当 i，j，k 为1,2,3 的偶排列\\-1，&当 i，j，k 为1,2,3 的奇排列\\0，&当 i，j，k 中有相同取值时\end{cases}\tag{1.1—11}$$

亦即
$$e_{123}=e_{231}=e_{312}=1$$
$$e_{132}=e_{321}=e_{213}=-1$$
其余21个都为零。

由此定义显然有
$$e_{ijk}=e_{jki}=e_{kij}=-e_{jik}=-e_{ikj}=-e_{kji} \tag{1.1-12}$$

例1.1-8 右手坐标系基向量$\boldsymbol{e}_i$之间的叉积关系为:
$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_1=-\boldsymbol{e}_3,\ \cdots$$
利用排列符号可以把这些关系式的全体缩写为:
$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=e_{ijk}\boldsymbol{e}_k$$

例1.1-9 设$\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{b}=b_i\boldsymbol{e}_i$, 则
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_i\boldsymbol{e}_i)\times(b_j\boldsymbol{e}_j)=a_ib_j(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j)=e_{ijk}a_ib_j\boldsymbol{e}_k$$
因而
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_k=e_{ijk}a_ib_j$$

例1.1-10
$$\det A_{st}=\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{vmatrix}$$
$$=A_{11}A_{22}A_{33}+A_{21}A_{32}A_{13}+A_{31}A_{12}A_{23}$$
$$-A_{11}A_{32}A_{23}-A_{21}A_{12}A_{33}-A_{31}A_{22}A_{13}$$
$$=e_{pqr}A_{p1}A_{q2}A_{r3}=e_{pqr}A_{1p}A_{2q}A_{3r}$$
交换行列式中任意两行（列），行列式的值要变号，而交换e_{ijk}的任意两个指标也要变号，所以有
$$e_{ijk}\det A_{st}=\begin{vmatrix}A_{i1} & A_{i2} & A_{i3}\\ A_{j1} & A_{j2} & A_{j3}\\ A_{k1} & A_{k2} & A_{k3}\end{vmatrix}=e_{pqr}A_{ip}A_{jq}A_{kr}$$
$$e_{lmn}\det A_{st}=\begin{vmatrix}A_{1l} & A_{1m} & A_{1n}\\ A_{2l} & A_{2m} & A_{2n}\\ A_{3l} & A_{3m} & A_{3n}\end{vmatrix}=e_{pqr}A_{pl}A_{qm}A_{rn}$$
$$e_{ijk}e_{lmn}\det A_{st}=\begin{vmatrix}A_{il} & A_{im} & A_{in}\\ A_{jl} & A_{jm} & A_{jn}\\ A_{kl} & A_{km} & A_{kn}\end{vmatrix}$$

3. δ_{ij}与e_{ijk}的关系

由
$$\det\delta_{ij}=\begin{vmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1$$
及例1.1-10的结果可得
$$e_{ijk}e_{lmn}=\begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}$$

将此式右端行列式展开，就有

$$e_{ijk}e_{lmn}=\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km}+\delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}$$
$$+\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl}-\delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} \tag{1.1—13}$$

这就是δ_{ij}和e_{ijk}之间的一般关系式。

若将式（1.1—13）中的 l 换为 i，则有

$$\begin{aligned}e_{ijk}e_{imn}&=\delta_{ii}\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{ii}\delta_{jn}\delta_{km}+\delta_{in}\delta_{ji}\delta_{km}-\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{ki}\\&\quad+\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{ki}-\delta_{im}\delta_{ji}\delta_{kn}\\&=3\delta_{jm}\delta_{kn}-3\delta_{jn}\delta_{km}+\delta_{jn}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kn}+\delta_{jn}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kn}\\&=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}\end{aligned} \tag{1.1—14}$$

若将式（1.1—14）中的m换为j，则有

$$e_{ijk}e_{ijn}=2\delta_{kn} \tag{1.1—15}$$

若再将式（1.1—15）中的n换为k，则有

$$e_{ijk}e_{ijk}=6=3! \tag{1.1—16}$$

例1.1-11　如$\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{b}=b_i\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{c}=c_i\boldsymbol{e}_i$，

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})&=\boldsymbol{a}\times(e_{lmn}b_lc_m\boldsymbol{e}_n)=e_{ijk}a_ie_{lmj}b_lc_m\boldsymbol{e}_k\\&=e_{jki}e_{jlm}a_ib_lc_m\boldsymbol{e}_k=(\delta_{kl}\delta_{im}-\delta_{km}\delta_{il})a_ib_lc_m\boldsymbol{e}_k\\&=a_ic_ib_k\boldsymbol{e}_k-a_ib_ic_k\boldsymbol{e}_k=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

§ 1.2　坐　标　变　换

空间中同一个点在不同直角坐标系内的坐标值是不同的，本节要讨论它们之间的变换关系。

由解析几何学知道，空间中如有两个不同的直角坐标系，则总可以通过坐标系的平移、旋转和反射变换把其中一个直角坐标系变换为另一个。但是，平移和旋转使原来的右（左）手系仍变换为右（左）手系；而反射却使原来的右（左）手系变换为左(右)手系。今后我们只限于讨论右手系之间的变换，所以就不涉及坐标系的反射变换。又因为直角坐标系发生平移时空间中同一点坐标值的变换关系较为简单，因而以下只讨论直角坐标系的旋转变换。

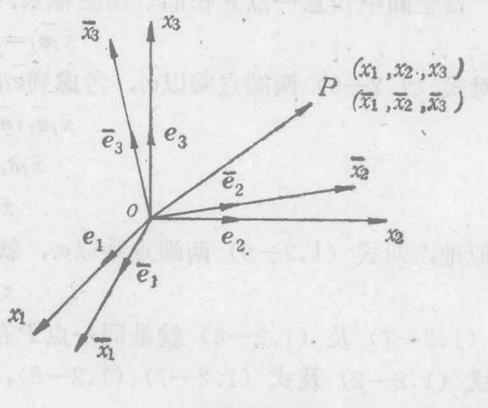


图 1.2-1

设在三维空间中选了两个共原点的右手直角坐标系$ox_1x_2x_3$及$o\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$，为了叙述的方便分别称它们为旧系及新系，其中一个坐标系经旋转可变换到另一个。分别用$\boldsymbol{e}_i$及$\bar{\boldsymbol{e}}_i$表示旧系及新系的单位基向量，如图1.2-1所示。如以β_{ij}表示$o\bar{x}_i$轴与ox_j轴之间夹角的余弦，则

$$\beta_{ij}=\bar{\boldsymbol{e}}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\cos(\bar{\boldsymbol{e}}_i,\boldsymbol{e}_j) \tag{1.2—1}$$

从而可以列出新系与旧系各坐标轴之间夹角余弦表如下：

	x_1	x_2	x_3
$\bar{x}_1$	β_{11}	β_{12}	β_{13}
$\bar{x}_2$	β_{21}	β_{22}	β_{23}
$\bar{x}_3$	β_{31}	β_{32}	β_{33}

如果给定了β_{ij}，就确定了直角坐标系的一个旋转变换，称β_{ij}为**变换系数**。

上述表中把β_{ij}按行列排出，其中每一行都是所对应的新轴单位基向量在旧坐标系中的分量；每一列都是所对应的旧轴单位基向量在新坐标系中的分量。所以，有

$$\bar{e}_i=\beta_{ij}e_j,\quad e_i=\beta_{ji}\bar{e}_j \tag{1.2—2}$$

式（1.2—2）就是上述新、旧坐标系基向量之间的变换关系式。由于$\bar{e}_i(i=1,2,3)$是正交的，即$\bar{e}_i\cdot\bar{e}_j=\delta_{ij}$，我们对式（1.2—2）$_1$两端点乘以$\bar{e}_j$，并应用式（1.2—1），就得

$$\bar{e}_i\cdot\bar{e}_j=\beta_{ik}e_k\cdot\bar{e}_j=\beta_{ik}\beta_{jk}$$

即

$$\beta_{ik}\beta_{jk}=\delta_{ij} \tag{1.2—3}$$

类似地，由于$e_i(i=1,2,3)$是正交的，即$e_i\cdot e_j=\delta_{ij}$，我们对式（1.2—2）$_2$两端点乘以e_j，并应用式（1.2—1），就得

$$\beta_{ki}\beta_{kj}=\delta_{ij} \tag{1.2—4}$$

因为e_i及$\bar{e}_i$都是右手系，$e_1\cdot(e_2\times e_3)=\bar{e}_1\cdot(\bar{e}_2\times\bar{e}_3)=1$，则由式（1.2—2）可得

$$\begin{vmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23}\\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33}\end{vmatrix}=\bar{e}_1\cdot(\bar{e}_2\times\bar{e}_3)=1 \tag{1.2—5}$$

即，直角坐标系旋转时上述变换系数行列式的值为$+1$。

设空间中任意一点P在旧、新坐标系内的坐标分别为x_i及$\bar{x}_i$，则通过点P的向径可得

$$\bar{x}_j\bar{e}_j=x_je_j \tag{1.2—6}$$

若对式（1.2—6）两端点乘以$\bar{e}_i$，考虑到$\bar{e}_i$的正交性及式（1.2—1），就有

$$\bar{x}_j\bar{e}_j\cdot\bar{e}_i=x_je_j\cdot\bar{e}_i$$

$$\bar{x}_j\delta_{ij}=\beta_{ij}x_j$$

$$\bar{x}_i=\beta_{ij}x_j \tag{1.2—7}$$

类似地，对式（1.2—6）两端点乘以e_i，就得

$$x_i=\beta_{ji}\bar{x}_j \tag{1.2—8}$$

式（1.2—7）及（1.2—8）就是同一点P在此两坐标系中不同坐标值之间的变换关系式。由式（1.2—2）及式（1.2—7）、(1.2—8)，可见直角坐标系旋转变换时，基向量与点的坐标都服从相同的变换规律。

例1.2-1 当直角坐标系$ox_1x_2x_3$绕ox_3轴旋转90°而成为直角坐标系$o\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$时，两坐标系间的变换系数$\beta_{ij}$的阵列形式可写为

$$(\beta_{ij})=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

例1.2-2 旧系绕ox_3轴旋转180°而得一新系时，两坐标系间的变换系数β_{ij}的阵列形式

为

$$(\beta_{ij})=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例1.2-3 旧系$ox_1x_2x_3$绕$n=\frac{1}{\sqrt{3}}e_1+\frac{1}{\sqrt{3}}e_2+\frac{1}{\sqrt{3}}e_3$方向为轴旋转，使所得新系$o\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$的轴$o\bar{x}_1$、$o\bar{x}_2$、$o\bar{x}_3$分别依次与轴$ox_2$、$ox_3$、$ox_1$重合，则此两坐标系间的变换系数$\beta_{ij}$的阵列形式为

$$(\beta_{ij})=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

设有任意一向量**f**，它在旧系及新系中的分量分别为f_i及$\bar{f}_i$，则用类似于推出式（1.2—7）及（1.2—8）的做法，就得

$$\bar{f}_i=\beta_{ij}f_j,\qquad f_i=\beta_{ji}\bar{f}_j \tag{1.2—9}$$

这就是说，直角坐标系旋转变换时，同一向量在不同坐标系内不同分量之间的变换规律与基向量、点坐标的变换规律都相同。通常把向量定义为有大小、有方向的量，现在可以由式（1.2—9)出发重新给出向量的定义：如有3个量，它们在$ox_1x_2x_3$系及$o\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$系中分别为$f_i$及$\bar{f}_i$，当这两个坐标系之间的变换系数为$\beta_{ij}$时，$f_i$与$\bar{f}_i$之间按式（1.2—9）而变换，则这3个量的有序整体形成一个向量f，此3个量为f的分量。称此定义为**向量的解析定义**。在下一节中，把向量的这个解析定义加以推广就可得到张量的定义。

§1.3 张量的定义

在所选的坐标系中，一般需要用一组有序数才能描述一个量（物理量或几何量）。在不同坐标系内，用来描述同一个量的有序数组的值一般是不相同的。我们就是根据坐标系变换时有序数组中各个数所遵从的变换规律，来确定该有序数组整体是否形成一个张量。

设$ox_1x_2x_3$及$o\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$是两个直角坐标系，它们之间由点坐标的变换规律

$$\bar{x}_i=\beta_{ij}x_j\quad 或\quad x_i=\beta_{ji}\bar{x}_j \tag{1.3—1}$$

相联系着。我们对各阶仿射正交张量定义于下。

1．零阶张量（标量）

设有一个量，它有$3^0=1$个分量，在上述两个直角坐标系中分别为$\varphi(x_1,x_2,x_3)$及$\overline{\varphi}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$。当直角坐标系按式（1.3—1）变换时，如果

$$\overline{\varphi}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)=\varphi(x_1,x_2,x_3) \tag{1.3—2}$$

则称此量为**零阶张量或标量**，它是坐标变换下的**不变量**。

例如，物体的质量、温度及空间中两点间的距离的值都不因坐标系变换而改变，它们都是标量。

2．一阶张量（向量）

设有一个量，它有$3^1=3$个有序分量，在前述两个直角坐标系中这个量的分量分别为a_i及$\bar{a}_i$。当坐标系按式（1.3—1）变换时，如果这两组分量满足

$$\bar{a}_i=\beta_{ij}a_j\quad 或\quad a_i=\beta_{ji}\bar{a}_j \tag{1.3—3}$$

则称这个量为**一阶张量**或**向量**，记为❶ $\boldsymbol{a}=(a_i)$。

例如，空间中一点的向径、质点的速度及加速度等都是一阶张量。

3．二阶张量

设有一个量，它有$3^2=9$个有序分量，在前述两个直角坐标系中这个量的分量分别为T_{ij}及$\bar{T}_{ij}$。当坐标系按式（1.3—1）变换时，如果这两组分量满足

$$\bar{T}_{ij}=\beta_{im}\beta_{jn}T_{mn} \quad \text{或} \quad T_{ij}=\beta_{mi}\beta_{nj}\bar{T}_{mn} \tag{1.3—4}$$

则称这个量为**二阶张量**，记为❷ $\mathbf{T}=(T_{ij})$，也可写成矩阵形式

$$\mathbf{T}=(T_{ij})=\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

例如，以后我们将要遇到的应变张量、应力张量等都是二阶张量。

4．n阶张量

设有一个量，它有3^n个有序分量，在前述两个直角坐标系中这个量的分量分别为$T_{i_1i_2\cdots i_n}$及$\bar{T}_{i_1i_2\cdots i_n}$。当坐标系按式（1.3—1）变换时，如果这两组分量满足

$$\left.\begin{aligned} &\bar{T}_{i_1i_2\cdots i_n}=\beta_{i_1j_1}\beta_{i_2j_2}\cdots\beta_{i_nj_n}T_{j_1j_2\cdots j_n} \\ \text{或}\quad &T_{i_1i_2\cdots i_n}=\beta_{j_1i_1}\beta_{j_2i_2}\cdots\beta_{j_ni_n}\bar{T}_{j_1j_2\cdots j_n} \end{aligned}\right\} \tag{1.3—5}$$

则称这个量为**n阶张量**，记为❸ $\mathbf{T}=(T_{i_1i_2\cdots i_n})$。

例如，以后要讨论的弹性系数张量就是四阶张量。

利用式（1.3—2）—（1.3—5）可以判断一个量是否为张量。另一方面，如已知一个张量在某个直角坐标系内的分量以及由此坐标系变换至另一直角坐标系的变换系数，则可利用式（1.3—2）—（1.3—5）求出该张量在另一直角坐标系内的分量。显然，如果一个张量在某个直角坐标系内的所有分量都等于零，则此张量在其它直角坐标系中的分量也都一定全为零。

设在某个直角坐标系$ox_1x_2x_3$中，例如有张量A_{ij}及B_{ij}满足张量方程

$$A_{ij}(x_1,x_2,x_3)=B_{ij}(x_1,x_2,x_3) \tag{1.3—6}$$

当坐标系按式（1.3—1）而变换到直角坐标系$o\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$时，则用$\beta_{mi}\beta_{nj}$乘张量方程（1.3—6）的两端，并使用求和约定及张量的定义，就得该张量方程在直角坐标系$o\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$中的形式

$$\bar{A}_{mn}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)=\bar{B}_{mn}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3) \tag{1.3—7}$$

由式（1.3—6）和（1.3—7）看出：坐标系变换时张量方程的形式是不变的。张量方程形式所具有的这种性质是和客观物理规律与坐标系选法无关相适应的。

例1.3-1 试证空间中任意两点之间的距离对坐标变换来说都是个不变量（标量）。

证 设空间中任意两点P及Q在$ox_1x_2x_3$系内的坐标分别为x_i及y_i，则这两点间距离的平方为

$$d^2=(x_i-y_i)(x_i-y_i)$$

当坐标系变换到$o\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$时，点$P$及$Q$的坐标分别变换为

---

❶ 在今后的叙述中也说“向量a_i”。
❷ 在今后的叙述中也说“二阶张量T_{ij}”。
❸ 在今后的叙述中也说“n阶张量$T_{i_1i_2\cdots i_n}$”。