普通高等教育“十一五”国家级规划教材

普通高等院校大学数学系列教材

微积分（下）

修订版

萧树铁　扈志明　编著

3

清华大学出版社

http://www.tup.com.cn

普通高等教育“ 材

普通高等院校大学数学系列教材

微积分（下）

修订版

萧树铁　扈志明　编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

全书分上、下两册. 下册包括二元函数、二元函数的偏导数和全微分、重积分、向量值函数的积分、无穷级数、常微分方程 6 章内容. 书中每节都配有适量的习题,每章配有部分具有一定难度的复习题,书末对大部分题目都给出了答案或提示.

本书结构严谨,例题与插图丰富,叙述直观清晰、通俗易懂,可供普通高等院校非数学专业的学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

微积分. 下/萧树铁,扈志明编著. —修订版. —北京: 清华大学出版社,2008.4

(普通高等院校大学数学系列教材)

ISBN 978-7-302-17210-9

Ⅰ. 微…　Ⅱ. ①萧… ②扈…　Ⅲ. 微积分—高等学校—教材　Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 034812 号

责任编辑: 佟丽霞　王海燕
责任校对: 赵丽敏
责任印制: 李红英
出版发行: 清华大学出版社　　**地　址**: 北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**: 100084
社　总　机: 010-62770175　　**邮　购**: 010-62786544
投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者: 北京四季青印刷厂
装 订 者: 三河市金元印装订有限公司
经　销: 全国新华书店
开　本: 170×230　**印　张**: 14.75　**字　数**: 262 千字
版　次: 2008 年 4 月第 1 版　　**印　次**: 2008 年 4 月第1 次印刷
印　数: 1～3000
定　价: 21.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话: (010)62770177 转 3103　　产品编号: 029322-01

序

大学数学系列课程“微积分”、“线性代数”和“概率论与数理统计”是大学理工、管理等各专业的重要基础课程. 随着我国经济的高速发展，高等教育的日益普及，需要培养出大批应用型工程技术人员. 同重点大学相比，以培养应用型人才为主的普通高校在教学目标、教学内容、教学方式等方面都有很大的不同. 而这类普通高校学生规模更大，但师资力量和教学条件却相对较弱. 因此，编写高质量的面向此类高校的教材，对于促进教学改革，提高我国高等教育的教学质量，更具迫切性和非常重要的现实意义.

为此，我们组织清华大学、北京大学、哈尔滨理工大学、北京联合大学等高校的老师，编写了这套面向普通高校的“普通高等院校大学数学系列教材”，包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》及与每门课程主教材配套的教师用书（习题详细解答）、电子教案和学习指导. 本套教材的作者均长期从事大学数学的教学工作，学术水平高，教学经验丰富，并编写出版过相关的教材，对大学数学系列课程的教学内容和课程体系改革有深入的研究. 同时，来自于普通高校教师的参与使本套教材更有针对性，更符合当前这类高校培养目标的要求和基础数学教学的实际情况.

本套教材编写的主要原则是：强调各门课程整体的理念、基本方法和适当的应用. 由于这三门课都属于基础课程，所以对其内容的改革应当慎重. 这套教材内容涵盖了教育部发布的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”. 在取材方面，不是简单地对内容进行增删，而是在努力深入的基础上尽量做到“浅出”.

本套教材的全部讲授时间大约为 250 学时，其中微积分

140学时，线性代数50学时、概率论与数理统计60学时．教师还可以根据本校的实际情况对课时作一定的增减，重要的是每门课都应配置适当学时（例如，总学时的1/3左右）的习题课．

清华大学出版社对本套教材的编写和出版给予了各方面的支持，佟丽霞编辑为本书做了大量的组织和文字工作．

尽管作者都有良好的愿望和多年的教学经验，但由于这一工作的难度较大，时间又比较仓促，各方面的问题肯定不少．欢迎广大师生和各方人士提出宝贵意见，以便进一步修改．

萧树铁

2006年4月

前言

本书自 2006 年出版以来已连续印刷了 4 次. 同时收到不少的意见和建议.

最近在北京、南京、广州等地召开的有关普通高等院校微积分教学的研讨会上,也围绕这本教材进行了讨论. 在此基础上,我们对第一版进行了修订.

在本书第一版的“前言”中,我们提到了有关本书内容安排的原则. 在教学中如何具体地体现这些原则,当然有赖于使用本教材的广大师生的创造. 乘本书修订之机,这里再多说几句.

微积分这门课程,是一般大专院校绝大多数学生的必修课. 对其中一部分学生来说,也许是他们大学阶段惟一的一门数学课. 而在当今时代,数学修养已经是衡量一个人潜在能力的重要标志. 因此我们的重点应该是在这门课的教学中,力求使学者通过清晰的直觉和必要的推理,比较全面地、形象地理解这门课的基本内容,而不只是孤立地、表面地、形式地背诵一些结论.

本书的对象是普通高等院校的学生. 在现行的教育体制下,他们的入学分数一般是中等,入学后数学课的学时偏少. 因而需要把数学教学的内容作适当的精简. 但在精简中必须注意不能削弱对学生“清晰的直觉和必要的推理”这方面的训练;也不能把理应启发、引导学生思维的教材变成只剩下一堆彼此不相干的定理、公式和“题型”的堆砌.

为了落实这种理念,在本版中,我们进一步强调了基本内容之间的联系,即弄清新知识和原有知识之间的逻辑关系以及新知识彼此间的联系. 前者如初等数学和微积分之间的异同(不同之处在于有理数中的有限运算和实数中的无穷运算,

而其中很多运算规则又是相同的)，一元微积分和二元微积分之间的异同；后者如可导与可微，导数与积分(都是利用无穷小化不均匀为均匀，但一个是无穷小之商，另一个是无穷小的无穷和)，以及各种积分(一维定积分，二维曲线积分，二重积分等)的牛顿-莱布尼茨公式等. 此外，本书还尽可能从多种角度来阐明一些基本概念和方法，例如求定积分时不同微元的选取，求多元函数极值中必要条件的引出等. 希望这些安排能有助于学者对微积分的全面理解.

清晰的直觉除了有助于得到真正的知识以外，也是记住这些知识的重要方法. 微积分是一门以极限为主要工具，以函数的各种性质为主要研究对象的基础课. 应该尽可能使学者学完后，在头脑中留下一些比较鲜明的形象. 所以本书增加了一些曲线和曲面的图形，把一些通过推理所得的函数的重要性质体现于典型的图像之中(诸如曲线的升降、对称、凹凸、弯曲、连续、光滑、微分和积分中值公式等). 对一些一般书中往往只给出定义的梯度、散度和旋度这些重要的概念，本书也说明了它们的几何与物理意义.

为了便于读者自学，在本版中，还增加了一批比较简明的例题和习题. 在内容方面，增加了一节“广义积分”.

对于对本书提出意见的读者，编者在此表示诚挚的谢意，并希望更多的读者对本书提出批评和建议.

编 者

2007 年 12 月

第一版前言

本书是为普通高等院校非数学专业的学生编写的. 考虑到这类院校学生的特点，这本教材从内容上作了一些改动. 由于微积分这门课程已有近 300 年的历史，经过长时期的锤炼，对内容作重大精简的空间已经很小了. 故所作的改动主要是相对当前流行的教材而言的.

时下国内流行的教材基本上是在 20 世纪 50 年代前苏联各类“高等数学”教材的基础上加工精练而成的，其内容大致都包括两部分：微积分及数学分析，前者已被历史证明是一个强有力的工具，后者主要为前者奠定一个坚实的理论基础，其自身已发展为数学的一个强大的分支. 在一般情况下，它们各有其重要性，但从教学的角度来看，作为教学内容，对不同的学习者，二者之间的分寸的确不易把握.

笛卡儿曾经说过，只有两种方法使人们得到真正的知识：清晰的直觉和必要的推理. 这句话对微积分的教学很有现实意义. 直觉必须尽可能“清晰”，这是对微积分教材的基本要求，尽管做到这一点的难度很大；而推理则应根据不同的对象确定其“必要”的程度. 总的来说，应该在教学内容的安排上，尽可能使学者都能体会到这两者的作用. 通过学习，能把微积分看成一个整体. 所谓必要的推理，就是根据它们在整体中所处的地位给它一个合适的安排，而不是使学生只知道一些名词、一些彼此孤立的定理及其证明.

本书力图按此原则来安排内容. 首先，对本书的核心内容——微分和积分基本上使其“返璞归真”. 例如，为了描述不均匀(非线性)变化和不规则几何图形的某些性质，引入无穷小量及线性逼近的概念(微分)是很直观很自然的，但它的合理性则需要大量的推理，这就是极限理论. 本书强调了前

者，而对极限理论只作了我们认为是起码必要的推理. 同样，在积分部分我们没有从黎曼-达布和出发而直接从微分的反运算入手引入了定积分并推出了牛顿-莱布尼茨公式，这样不仅节省了课时，而且突出了微积分的统一性，突出了微积分应用的有力工具——微元法.

对于微积分早期描述函数性态的一些直观性较强的命题，本书尽可能加以证明，以完成一个从直观到理性的认识过程，例如罗尔定理，微分和积分的中值定理，微积分基本定理，等等；有一些属于数学分析范畴的命题则只给出直观的描述而不加证明，例如闭区间上连续函数的某些性质等；还有少数直观性不强，但很有用的内容，例如洛必达法则，也给出了必要的推理说明. 此外，在进行推理前，应说明这种推理的必要性，例如极限的惟一性，泰勒公式等.

人们得到的知识还必须在使用中得到巩固和深化，尤其是像微积分这种基础性的知识，因此计算和应用应该是不可缺少的内容. 除了较多的例题之外，本书还附有大量的习题，这就需要有相应的习题课加以配合. 近年来基本上取消习题课的消极后果已经有所体现，应当很好总结一下.

书中带 * 号的小字部分是供学生阅读的，不必在课堂上讲授.

编写本书的目的，只是试图为普通高等院校的学生提供一本比较合适的教材. 由于我们自己在这方面的经验也很缺乏，因此特别需要广大师生的批评帮助，以期能不断改进.

编　者

2006 年 1 月

目录

二 元 函 数

第7章

7.1 二元函数及其图形

7.1.1 二元函数的概念

前面已经讲过,函数就是一种对应关系. 如果 x,y 表示两个可变化的实数,而且 y 的变化由 x 惟一确定,我们就说 y 是 x 的一元函数,记为 $y=f(x)$,其中称 x 为自变量,而称 y 为因变量. x 的变化范围称为函数 $f(x)$ 的定义域,实数 $y=f(x)$ 的变化范围称为函数的值域.

如果我们研究的对象有三个变量 x,y,z,其中变量 z 依赖于 x,y(即 x,y 的值确定后,z 的值也随之确定),但 x,y 之间没有彼此依赖的关系,这时就说 z 是自变量 x,y 的一个**二元函数**,记为 $z=f(x,y)$,其中 x,y 称为自变量,它们的变化范围称为**函数的定义域**(它一般是一个平面区域). 实数 $z=f(x,y)$ 的变化范围称为函数的**值域**. 例如,对一个底半径为 r,高为 h 的圆柱体,其体积 $V=\pi r^2 h$ 及其表面积 $S=2\pi rh+2\pi r^2$ 都是自变量 r,h 的二元函数,它们的定义域是半无界的四分之一平面:$0<r<+\infty, 0<h<+\infty$. 又如,在某个平面区域 D(例如一个县的范围)中引进了坐标,使 D 中的任意一点可以用平面坐标 (x,y) 来表示,那么这一点的海拔高度 z 就是 x,y 的二元函数 $z=f(x,y)$,这个函数的定义域就是 D,而值域就是区间 $[a,b]$,其中 a,b 分别是全县最低和最高处的海拔高度.

定义 7.1 设 D 是平面上的实数点 (x,y) 的一个非空集合,f 是定义在 D 上的一个对应关系. 如果对任意点 $(x,y)\in D$ 都有一个惟一的实数 z 通过 f 与之对应,我们就说 f 是定义在

D 上的一个二元函数，记为

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D,$$

其中(x,y)称为自变量，z 称为因变量；D 称为函数的定义域，而集合 $\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为函数的值域.

平面上的点(x,y)可以看成是一个向量，所以二元函数也可以看成是一个平面向量到实数域$\mathbb{R}$ 的一个对应.

可以类似地定义任意 n 元函数. 例如，一些生活中常碰到的如大气中一点的温度、湿度等都是这点的位置(体现为它在三维空间的坐标(x,y,z))及时间 t 的四元函数.

* 如果 A,B 分别表示两个集合，则集合 $A\times B$ 就表示所有的元素对(a,b)所组成的集合，其中 $a\in A,b\in B$. 用这个符号，上述圆柱体积和其表面面积作为 r,h 的二元函数，其定义域就可以写成$(0,+\infty)\times(0,+\infty)$.

一般二元函数在平面上定义域的结构要比一元函数的定义域(直线上的点集)复杂. 本书不会对它们进行研究，只是把一些常碰到的名词列在下面，请读者将它们与直线上的情况加以比较.

(1) **邻域** 平面$\mathbb{R}^2$ 上一个点 $A(a,b)$的 δ 邻域是指平面上所有与点(a,b)的距离 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 小于正实数 δ 的点(x,y)的集合. 记为 $U(A,\delta)$.

邻域是一个基本的定义，由此而得到下面一系列定义.

(2) **内点** S 是平面上的一个点集. 所谓 S 的内点，指的是平面中满足下列条件的点 A：对此点 A 存在正实数 δ，使 $U(A,\delta)\subset S$.

(3) **边界点** 所谓 S 的边界点，指的是平面中满足下列条件的点 A：对任意 $\delta>0$，$U(A,\delta)$都不包含于 S，而 $U(A,\delta)\cap S\neq\varnothing$(空集).

(4) **开集** 指平面$\mathbb{R}^2$ 上这样的集合：集合中的每一点都是内点.

(5) **闭集** 如果 $\mathbb{R}^2\backslash S$ 是开集，则称 S 是闭集.

(6) **集合的内部** 平面集合 S 的内部就是 S 中所有内点的集合.

(7) **集合的边界** 平面集合 S 的全体边界点所组成的集合. 记为∂S.

(8) **集合的闭包** 平面集合 S 的闭包就是集合 $S\cup\partial S$，记为 $\bar{S}$.

(9) **连通集** 一个平面集合 D，如果其中任意两点都可以用位于 D 内部的有限条直线段连接起来，就说 D 是一个连通集.

(10) **区域** 平面上的连通开集就称为区域. 如果对某个区域存在两个实数 k,K，使得对此区域中所有点 $P(x,y)$，都满足不等式 $k\leqslant x\leqslant K,k\leqslant y\leqslant K$，则称这个区域是**有界区域**；否则就称为**无界区域**.

例 7.1 $z=ax+by$，a,b 为常数，这是一个标准的二元线性函数，它在三维空间中表示一张平面. 它的定义域是全平面$\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

例 7.2 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$. 这是一个以原点为中心，半径为 1 的上半球

面，定义域为$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$.

例 7.3 $f\left(\dfrac{x}{z},\dfrac{y}{z}\right)=0$. 这是一个以原点为顶点的锥面(见例 6.12)，定义域为全平面；即对$\forall x,y\in\mathbb{R}$，这个方程确定惟一的一个值z.

例 7.4 $z=a^2x^2+b^2y^2$. 这是一个椭圆抛物面，定义域为全平面.

例 7.5 $z=xy$. 这是一个马鞍面，定义域为全平面.

例 7.2～例 7.5 的图形见 6.5 节.

与一元函数的情况一样，求函数定义域的一般办法是：当自变量都有实际背景时，其实际变化的范围就是函数的定义域；当自变量没有具体的实际意义，但函数有明显的表达式时，函数的定义域就是使表达式中的运算都有意义的那些实数的集合.

以上我们讨论了一元函数$y=f(x)$和二元函数$z=f(x,y)$. 它们分别是直线上点(实数)和平面区域上点(二维向量)与实数之间的对应. 其共同点是它们对应的都是实数；不同点是自变量，一个是实数，而另一个则是向量.

有没有把实数或向量对应到二维(或多维)向量的函数呢？当然是有的. 例如对于地面上任一点(x,y)，在它 1000 米高空中相应点$(x,y,1000)$的风速就是一个向量$\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,v_z)$，括号中的变量分别表示在$x,y,z$方向的风速. 对于不同的点$(x,y)$，对应的风速$\boldsymbol{v}$未必相同，在规定了点$(x,y)$的范围后，就得到一个依赖于两个自变量$x,y$的三个函数：$v_x=f(x,y)$，$v_y=g(x,y)$，$v_z=h(x,y)$，给定一个$(x,y)$，就得到所对应的一个三维向量$\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,v_z)$，这就是一个取值为三维向量的二元函数.

凡是取值为向量的函数都叫做**向量值函数**，不管它们的自变量取实数值还是向量值.

7.1.2 二元函数的图形

二元函数的表示方法有以下三种：列表表示，数学表达式表示和图形表示. 用数学表达式来表示函数又分为显函数形式与隐函数形式. 对于二元函数来说，所谓显函数形式就是常用的$z=f(x,y)$形式；而隐函数形式则是用一个三元方程的一个解来表示一个函数：一个三元方程$F(x,y,z)=0$只能解出一个未知数，在某个范围内可以把x,y看成参数而解出z，得到$z=f(x,y)$，也可以把x,z看成参数解出y，得到$y=g(x,z)$. 所以一个n元方程一般表示一个$n-1$元函数. 再推广一下：含有n个变量，m个方程的方程组一般可以解出m个显函数(当然要有条件). 至于用图形来表示一个二元函数，又分为用三维曲面表示和用平面等值线表示.

所谓一个函数的等值线(或等高线)，是指曲面$z=f(x,y)$和平面

$z=a$(a 是任意常数)相交所得的平面曲线在 xOy 平面上的投影,即 $\{(x,y)\mid f(x,y)=a\}$.

*并不是任何一个三元方程一定可以解出一个变量为其他两个变量的函数.例如,在方程

$$x^2+(x-1)^2+y^2+(y+1)^2+z^2=0$$

中,给定其中任意两个变量的一对实数值,都无法找到另外一个变量的实数值使之满足方程.有一些使方程有解的充分条件,这里就不提了.

下面举几个图形表示函数的例子.

例 7.6　$z=x-2y$.

这是一个平面.图 7.1 是它的三维图形,图 7.2 是它的平面等值线图.

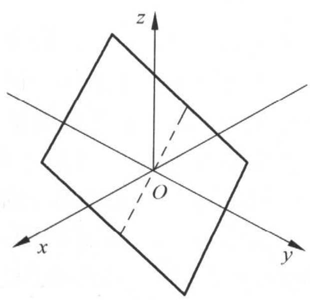

图　7.1

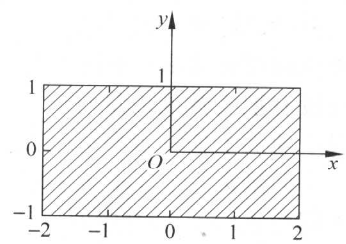

图　7.2

例 7.7　$z=x^2-y^2$.

这是一个双曲抛物面(马鞍面).图 7.3 是它的三维图形,图 7.4 是它的平面等值线.

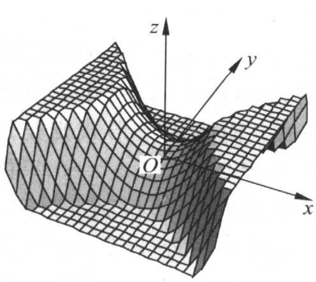

图　7.3

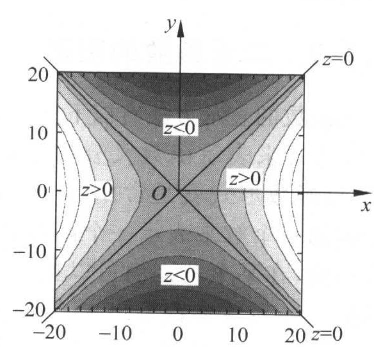

图　7.4

如果把图 7.3 看做是一座山的话,可以看出,如果我们站在 O 点,沿着平面直线 y 轴正反两个方向走都是下山的路;而沿着 x 轴往正反两方向走就都