

流体力学中数值方法

第二届会议论文集

(三)

会议组织委员会编辑

西安交通大学印刷

一九八三年十月

三、不可压缩粘性流动

在极坐标系中二维不定常流体力学

问题的欧拉数值方法 于志鲁 (应物计算所)

§1 序

由于二维非定常流体运动的复杂性, 至今发展起来的二维非定常流体力学数值方法, 虽然以前有了很大改进, 但是它们还是处于每个方法或者每个程序只能适用某些特定的问题的计算。

以前我们一直从事欧拉方法的研究, 如PIC方法和流体网格法等等。所有这些方法都是建立在笛卡尔坐标系或者柱坐标系中的。对于其它坐标系, 如极坐标系的研究甚少。在用柱坐标系计算具有球对称的二维问题时, 对称性总不能得到很好的保证。为了对一类球对称性要求较高的二维流体力学问题能够得到有较好的对称性, 显然最有效的办法是采用极坐标系。下面我们将给出极坐标系中流体网格法的差分格式及其计算方法。

§2 计算方法简介

数值过程与通常的流体网格法相似。首先将计算区域分成若干欧拉网格, 在一个时间间隔 Δt 内, 计算分二步来处理: 第一步把网格当作质点进行拉代运动, 其运动方程在极坐标系中取成如下形式

$$\frac{d}{dt}u_r = \frac{u_\theta^2}{r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(p+q)}{\partial r} \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dt}u_\theta = -\frac{u_\theta u_r}{r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(p+q)}{r \partial \theta} \quad (2.2)$$

$$\rho \frac{d}{dt}e = -p \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 u_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta \sin \theta}{\partial \theta} \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 q_r u_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (q_\theta u_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} \right\} \\
& + u_r \frac{\partial q_r}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta}
\end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 u_r , u_θ 分别表示网格沿 r 方向和 θ 方向的分速度, ρ , e 和 p 分别表示网格的密度、比内能和压力, 压力 $p = p(\rho, e)$ 是依物质而定的已知函数。通常称作状态方程, 这一步用差分计算出的值又常叫做中间值, 并记作 “ $\sim$ ”。

计算过程的第二步是把第一步计算出的结果对网格边界进行输运计算, 最后, 对欧拉网格作质量、动量和能量的重新分配, 求得最终值。

输运计算公式为

$$\frac{d}{dt} \int_{V_E} \rho f dV = \frac{d}{dt} \int_{V_L} \rho f dV - \oint_{\partial V_E} f \rho u_{\vec{n}} ds \quad (2.4)$$

其中 V_E 为某一欧拉网格, 作为质团记为 V_L , 在时刻 t^n 有 $V_E^n = V_L^n$ 对上式作差分近似有

$$(Mf)_{V_E}^{n+1} = (\tilde{Mf})_{V_L}^{n+1} - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \oint_{\partial V_E} f \rho u_{\vec{n}} ds dt$$

其中

$$(Mf)_{V_E}^{n+1} = \int_{V_E^{n+1}} f \rho dV$$

$$(\tilde{Mf})_{V_L}^{n+1} = \int_{V_L^{n+1}} f \rho dV$$

令 $f = (1, u_r, u_\theta, E)^T$ 便可得到质量、动量和能量的输运公式。

输运计算之后, 最后求得 (如果 $M_E^{n+1} \neq 0$)

$$u_{\gamma E}^{n+1} = x_E^{n+1} / M_E^{n+1} \quad (2.5)$$

$$u_{\theta E}^{n+1} = y_E^{n+1} / M_E^{n+1} \quad (2.6)$$

$$e_E^{n+1} = E_E^{n+1} / M_E^{n+1} - \frac{1}{2} \left[(u_{\gamma E}^{n+1})^2 + (u_{\theta E}^{n+1})^2 \right] \quad (2.7)$$

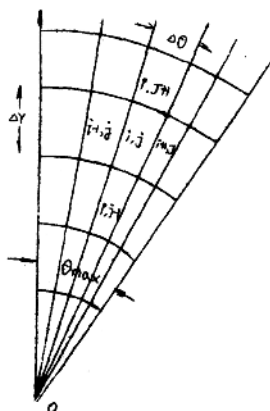
其中 x_E^{n+1} , y_E^{n+1} 和 E_E^{n+1} 分别为输运计算之后的网格 V_E 的 r 方向、 θ 方向动量和总能量。

这个数值过程就是根据以上给出的计算公式及其思想进行的。可以看出整个数值过程除拉氏计算与一般坐标系中的计算不同之外, 其它计算都是非常相似的。

§3 拉氏计算的差格式

假设计算区域为一扇形 ($0 \leq \gamma \leq \gamma_{\max}$, $0 \leq \theta \leq \theta_{\max}$) 按右图划分网格, 每个网格给予编号 (i, j) , 各力学量均定义在网格的中心, 并假定 $\Delta\gamma = \gamma_{\max}/J_{\max}$, $\Delta\theta = \theta_{\max}/I_{\max}$, 沿 γ 方向分 $J_{\max}$ 个点, 沿 θ 方向分 $I_{\max}$ 个点。

关于方程 (2.1) — (2.3) 的差分近似, 通常可按如下方式建立, 即对方程的左端对时间取向前差分, 对方程的右端对空间取中心差分, 对方程的右端对空间取中心差分, 这样便



可得到一个简单的显式差分格式。

但是，正如大家所知，对于流体力学问题的计算，守恒性的好坏是一个十分重要的问题，因此在我们建立差分格式时，总要尽量使其有一个较好的守恒性质。为此，为了保证格式在拉氏计算时，不仅动量保证守恒，总能量也能保证守恒，我们将(2.1) — (2.2)改写成如下形式

$$\frac{du_r}{dt} = \frac{u_\theta^2}{r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \gamma^2 p}{\partial \gamma} + \frac{1}{\rho} \frac{2p}{\gamma} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial q}{\partial \gamma} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_\theta}{dt} = & -\frac{u_\theta u_r}{r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{p}{\sin \theta} \frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial q}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (3.2)$$

直接对方程(3.1)，(3.2)和(2.3)的右端取中心差分，便可得到在极坐标系中一个守恒的流体力学差分格式：

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{r i j} = & u_{r i j}^n + \Delta t \left\{ \frac{u_{\theta i j}^n}{r_j} - \frac{1}{M_{i j}^n} \left(S_{i j + \frac{1}{2}}^\gamma (P_{i j + \frac{1}{2}}^n - P_{i j}^n) \right. \right. \\ & \left. \left. - S_{i j - \frac{1}{2}}^\gamma (P_{i j - \frac{1}{2}}^n - P_{i j}^n) + \nabla_{i j} \frac{q_{i j + \frac{1}{2}}^n - q_{i j - \frac{1}{2}}^n}{\Delta \gamma} \right) \right\} \\ & - \frac{u_{r i j}^n}{r_j} \frac{u_{\theta i j}^n}{r_j} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\theta i j} = & u_{\theta i j}^n - \Delta t \left\{ \frac{u_{r i j}^n}{r_j} + \frac{1}{M_{i j}^n} \left(S_{i + \frac{1}{2} j}^\theta (P_{i + \frac{1}{2} j}^n - P_{i j}^n) \right. \right. \\ & \left. \left. - S_{i - \frac{1}{2} j}^\theta (P_{i - \frac{1}{2} j}^n - P_{i j}^n) + \nabla_{i j} \frac{q_{i + \frac{1}{2} j}^n - q_{i - \frac{1}{2} j}^n}{r_j \Delta \theta} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
 m_{ij}^n \sim e_{ij}^n &= m_{ij}^n e_{ij}^n - \Delta t \{ S_{ij+\frac{1}{2}}^Y \bar{u}_{ij+\frac{1}{2}}^n (p_{ij+\frac{1}{2}}^n + q_{ij+\frac{1}{2}}^n) \\
 &\quad - S_{ij-\frac{1}{2}}^Y \bar{u}_{ij-\frac{1}{2}}^n (p_{ij-\frac{1}{2}}^n + q_{ij-\frac{1}{2}}^n) \\
 &\quad + S_{i+\frac{1}{2}j}^0 \bar{u}_{i+\frac{1}{2}j}^n (p_{i+\frac{1}{2}j}^n + q_{i+\frac{1}{2}j}^n) \\
 &\quad - S_{i-\frac{1}{2}j}^0 \bar{u}_{i-\frac{1}{2}j}^n (p_{i-\frac{1}{2}j}^n + q_{i-\frac{1}{2}j}^n) \\
 &\quad - \bar{v}_{ij} (\bar{u}_{ij} \frac{(q_{ij+\frac{1}{2}}^n - q_{ij-\frac{1}{2}}^n)}{\Delta Y} \\
 &\quad - \bar{u}_{ij} \frac{(q_{i+\frac{1}{2}j}^n - q_{i-\frac{1}{2}j}^n)}{Y_j \Delta \theta} \} \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

其中 $\bar{u}_{ij} = \frac{1}{2}(\tilde{u}_{ij}^n + u_{ij}^n)$, $u_{ij+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{ij+\frac{1}{2}+1} + u_{ij+\frac{1}{2}})$,
 $u_{i+\frac{1}{2}j} = \frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2}+1j} + u_{i+\frac{1}{2}j})$, $p_{ij+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(p_{ij+\frac{1}{2}+1} + p_{ij+\frac{1}{2}})$,
 $p_{i+\frac{1}{2}j} = \frac{1}{2}(p_{i+\frac{1}{2}+1j} + p_{i+\frac{1}{2}j})$, $q_{ij+\frac{1}{2}}^n = a(\rho_{ij+\frac{1}{2}+1}^n + \rho_{ij+\frac{1}{2}}^n)$
 $(|u_{ij+\frac{1}{2}+1}^n - u_{ij+\frac{1}{2}}^n| - (u_{ij+\frac{1}{2}+1}^n - u_{ij+\frac{1}{2}}^n))^2$,
 $q_{i+\frac{1}{2}j}^n = a(\rho_{i+\frac{1}{2}+1j}^n + \rho_{i+\frac{1}{2}j}^n)(|u_{i+\frac{1}{2}+1j}^n - u_{i+\frac{1}{2}j}^n| -$
 $(u_{i+\frac{1}{2}+1j}^n - u_{i+\frac{1}{2}j}^n))^2$, $S_{ij+\frac{1}{2}}^Y = 2\pi(j\Delta Y)^2 \Delta \theta \sin((i-\frac{1}{2})\Delta \theta)$
 $S_{i+\frac{1}{2}j}^0 = 2\pi(j-\frac{1}{2})\Delta Y^2 \sin i\Delta \theta$.

$$\bar{V}_{1j} = 2\pi((j - \frac{1}{2})\Delta\gamma)^2 \sin((1 - \frac{1}{2})\Delta\theta)\Delta\gamma\Delta\theta$$

§4 能量守恒的验证及边界条件

将(3.3)乘以 $M_{1j}^n \bar{u}_{\gamma 1j}$, (3.4)乘以 $M_{1j}^n \bar{u}_{\theta 1j}$ 与(3.5)

相加并令 $E_{1j} = e_{1j} + \frac{1}{2}(u_{\gamma 1j})^2 + \frac{1}{2}(v_{\theta 1j})^2$ 可得

$$\begin{aligned} M_{1j}^n (\tilde{E}_{1j} - E_{1j}^n) = & -\Delta t (S_{1j+\frac{1}{2}}^{\gamma} + \frac{1}{2}(\bar{u}_{\gamma 1j+1}^n P_{1j}^n + \bar{u}_{\gamma 1j}^n P_{1j+1}^n \\ & - S_{1j-\frac{1}{2}}^{\gamma} \frac{1}{2}(\bar{u}_{\gamma 1j}^n P_{1j-1}^n + \bar{u}_{\gamma 1j-1}^n P_{1j}^n) + S_{1+\frac{1}{2}}^{\theta} \frac{1}{2} \\ & \cdot (\bar{u}_{\theta 1+1j}^n P_{1j}^n + \bar{u}_{\theta 1j}^n P_{1+1j}^n) \\ & - S_{1-\frac{1}{2}}^{\theta} \frac{1}{2}(\bar{u}_{\theta 1j}^n P_{1-1j}^n + \bar{u}_{\theta 1-1j}^n P_{1j}^n) \\ & + S_{1j+\frac{1}{2}}^{\gamma} \bar{u}_{\gamma 1j+\frac{1}{2}}^n q_{1j+\frac{1}{2}}^n - S_{1j-\frac{1}{2}}^{\gamma} \bar{u}_{\gamma 1j-\frac{1}{2}}^n q_{1j-\frac{1}{2}}^n \\ & + S_{1+\frac{1}{2}}^{\theta} \bar{u}_{\theta 1+\frac{1}{2}}^n q_{1+\frac{1}{2}}^n - S_{1-\frac{1}{2}}^{\theta} \bar{u}_{\theta 1-\frac{1}{2}}^n q_{1-\frac{1}{2}}^n) \end{aligned}$$

在整个空间求和得 (注意 $S_{1, \frac{1}{2}}^{\gamma} = 0$, $S_{\frac{1}{2}j}^{\theta} = 0$)

$$\begin{aligned} i=\text{IM} \quad j=\text{JM} \quad \sum_{i=1}^i \sum_{j=1}^j M_{1j}^n (\tilde{E}_{1j} - E_{1j}^n) = \\ -\Delta t \{ \sum_{i=1}^{i=\text{IM}} S_{1-JM+\frac{1}{2}}^{\gamma} (\frac{1}{2}(\bar{u}_{\gamma 1, JM+1}^n P_{1, JM}^n + \bar{u}_{\gamma 1, JM}^n P_{1, JM+1}^n \\ + (\bar{u}_{\gamma}^n q_{1JM+\frac{1}{2}}^n) + \sum_{j=1}^{j=\text{JM}} S_{1M+\frac{1}{2}, j}^{\theta} (\frac{1}{2}(\bar{u}_{\theta 1M+1j}^n P_{1Mj}^n \end{aligned}$$

$$+ \bar{u}_{\theta IMJ}^n P_{IM+1J}^n + (\bar{u}_{\theta}^n q^n)_{IM+\frac{1}{2}J} \} \quad (4.1)$$

假设外边界为固壁边界，为保证格式的守恒性，利用边界条件

$$\begin{aligned} \bar{u}_{Y1, JM+\frac{1}{2}} &= 0 \quad (\text{或者 } \bar{u}_{Y1, JM+1} = -\bar{u}_{Y1, JM}) \\ \bar{u}_{\theta IM+\frac{1}{2}J} &= 0 \quad (\text{或者 } \bar{u}_{\theta IM+1J} = -\bar{u}_{\theta IM, J}) \end{aligned}$$

为了要

$$\bar{u}_{Y1JM+1}^n P_{1JM}^n + \bar{u}_{Y1JM}^n P_{1JM+1}^n = 0$$

$$\bar{u}_{\theta IM+1J}^n P_{IMJ}^n + \bar{u}_{\theta IMJ}^n P_{IM+1J}^n = 0$$

只须令 $P_{1, JM+1}^n = P_{1, JM}^n$, $P_{IM+1, J}^n = P_{IM, J}^n$ 即可保证格式

(4.1) 的右端为零，格式的总能守恒得到保证。

同样，对于自由面边界，以 JM 为例，这时只要

$$\bar{u}_{Y1JM+1}^n = \bar{u}_{Y1JM}^n$$

$$P_{1JM+1}^n = -P_{1JM}^n \quad (\text{或者 } P_{1, JM+\frac{1}{2}}^n = 0)$$

同样保证格式的总能守恒性。（即方程(4.1)右端为0）

关于格式的动量守恒只须对方程(3.3)和(3.4)直接对区域求和便可看出。

狭缝中不可压粘性流

的一种差分解法

王厘尔 郝景洲 (数学研究所)

摘 要

本文给出了狭缝中不可压粘性流动的一种快速求解方法。计算数据为胶片挤压涂布工艺的挤压咀结构设计提供了参考。

一、在胶片挤压涂布工艺中, 提出探讨挤压咀的狭缝结构, 使从缝中挤压出来的涂液具有横向的均匀性。在缝隙 $ABCD - \overset{\cdot\cdot}{A}\overset{\cdot\cdot}{B}\overset{\cdot\cdot}{C}\overset{\cdot\cdot}{D}$ 中流体的运动满足粘性方程

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= - \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq y \leq Y, \quad 0 \leq z \leq Z$$

其中 u, v, w 分别为沿 x, y, z 方向的速度分量, p 为液压, ν 为粘性系数, 流体从 $ABCD$ 流入, 从 $\overset{\cdot\cdot}{A}\overset{\cdot\cdot}{B}\overset{\cdot\cdot}{C}\overset{\cdot\cdot}{D}$ 流出, 假定缝宽 AD 不大于边界层厚度则可认为 $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ 。

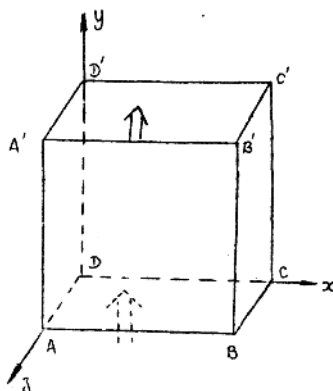
进一步简化问题: 假定入口处, $w = 0$ 缝隙高度 AA' 足够高, 在出口处 $w = 0$, 考虑到固壁条件 ($w = 0$) 由 (1) 的第三个方程, 可

以看出在整个隙缝里 $w = 0$ 于是(1)可简化为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \end{array} \right. \quad (2.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (2.3)$$



入口处 $y = 0$ $u = u_0(x, z)$, $v = v_0(x, z)$

出口处 $y = y$ $u = 0$ $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$

固壁 $x = 0, X$; $z = 0, Z$; $u = v = 0$

出口处某一点 $y = y$ $x = x$, 时 $p = p_0 = \text{常数}$

u , v , p 的初始值的给法, 具有很大的自由度, 我们选取 u , v 为 y 的线性函数, p 为常数 p_0 。

二、目前已有许多求解不可压粘性方程的方法, 如 MAC, SMAC 方法和分裂法(1)。我们采用与(1)不同的分裂方法求解(2), 引

进中间函数 $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ 及时间步长 Δt

$$\frac{\tilde{u} - u^n}{\Delta t} = -u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial u^n}{\partial y} \quad (3.1)$$

$$\frac{\tilde{v} - v^n}{\Delta t} = -u^n \frac{\partial v^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial v^n}{\partial y} \quad (3.2)$$

利用连续方程从(2)可得

$$\frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial y^2} = (\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}) / \Delta t \quad (3.3)$$

最后计算

$$u^{n+1} \sim u - \Delta t \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} + \Delta t v (\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial z^2}) \quad (3.4)$$

$$v^{n+1} \sim v - \Delta t \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} + \Delta t u (\frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial z^2}) \quad (3.5)$$

其中 u^n , v^n , P^n 指 $n\Delta t$ 时刻的差分解。

在求解区域引入网格 $\Delta x = X/N$, $\Delta y = Y/(M-1/2)$, $\Delta z = Z/K$

记 $P_{i,j,k}^n$, $u_{i+1/2,j,k}^n$, $v_{i,j+1/2,k}^n$ 分别为压力和速度的离

散值 $P(x_i, y_j, z_k, t_n)$, $u(x_{i+1/2}, y_j, z_k, t_n)$ 。

$v(x_i, y_{j+1/2}, z_k, t_n)$ 沿子方向取四个面, 不包括边界面, 当

$z = \text{常数}$ 格子点分布和区域如图(二)

首先利用连续方程(2.3)把(3.1), (3.2)的右端项写成:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y}$$

省略下标 K , (3.1) (3.2) 差分递进为:

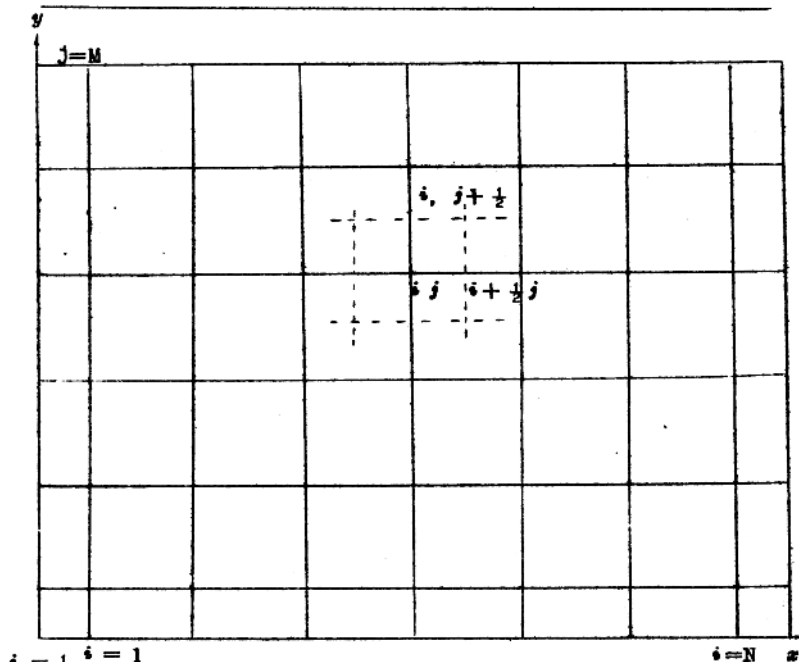


图 (二)

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= -2u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{(n)} (u_{i+1, j+\frac{1}{2}}^{(n)} - u_{i, j+\frac{1}{2}}^{(n)}) / \Delta x \\ &\quad - ((u^n v^n)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - (u^n v^n)_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}) / \Delta y \\ \frac{\tilde{v}_{i, j+\frac{1}{2}} - v_{i, j+\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= -((u^n v^n)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - (u^n v^n)_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}) / \Delta x \end{aligned}$$

$$-(u^n v^n)_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} / \Delta x - 2\bar{v}_{i, j+\frac{1}{2}}^n (v_{i, j+1}^n - v_{i, j}^n) / \Delta y$$

其中 $u_{i, j} = (u_{i+\frac{1}{2}, j} + u_{i-\frac{1}{2}, j}) / 2$,

$$v_{i, j} = (v_{i, j+\frac{1}{2}} + v_{i, j-\frac{1}{2}}) / 2$$

$$2\bar{u}_{i+\frac{1}{2}, j} = u_{i+1, j} + u_{i, j}$$

$$2\bar{v}_{i, j+\frac{1}{2}} = v_{i, j+1} + v_{i, j}$$

$$2u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2}, j+1} + u_{i+\frac{1}{2}, j}$$

$$2v_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = v_{i+1, j+\frac{1}{2}} + v_{i, j+\frac{1}{2}}$$

在高边界半点上可相应推得，例 $i = 1$

$$\tilde{v}_{1, j+\frac{1}{2}} = v_{1, j+\frac{1}{2}}^n$$

边界点上 $\tilde{u}_{\frac{1}{2}, j} = \tilde{v}_{\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = 0$

(3.3) P 方程的解法如下：对 P 方程来说，只需考虑任一个面 $z = k\Delta z$ 的方程

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = (\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}) / \Delta t$$

在出口边界上根据出口条件

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{j=M} = 0 \quad n \Big|_{j=M} = 0$$

在内点

$$\frac{p_{i-1, j} - 2p_{i, j} + p_{i+1, j}}{\Delta x^2} + \frac{p_{i, j-1} - 2p_{i, j} + p_{i, j+1}}{\Delta y^2}$$

$$= \left(\frac{\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}, j} - \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}, j}}{\Delta x} + \frac{\tilde{v}_{i, j+\frac{1}{2}} - \tilde{v}_{i, j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right) / \Delta t$$

在出口边界 $j = M$ 上, 略去高次导数项

$$v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \text{ 后退化为 } - \text{ 常微分方程}$$

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} / \Delta t$$

它可以离散化为:

$$\frac{(P_{i+1, M} - P_{i, M}) - (P_{i, M} - P_{i-1, M})}{\Delta x}$$

$$= (\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}, M} - \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}, M}) / \Delta t$$

$$\text{利用 } \frac{dP_{\frac{1}{2}, M}}{dx} = 0 \quad \text{及 } u_{\frac{1}{2}, M} = 0 \quad \text{可知 } \frac{P_{2, M} - P_{1, M}}{\Delta x} = \tilde{u}_{\frac{3}{2}, M} / \Delta t$$

此外令 $P_{N, M} = P_{N, M}^0$, 不难确定出 $P_{i, M}$ 的值:

$$P_{i, M} = - \sum_{j=0}^i (\tilde{u}_{j+\frac{1}{2}, M} - \tilde{u}_{j-\frac{1}{2}, M}) \frac{\Delta x}{\Delta t} + P_{i+1, M}$$

$i = N-1, N-2, \dots, 1$, 其中 $\tilde{u}_{\frac{1}{2}, M} = 0$ 在 $i = 1$ 利用固壁条件可

$$\text{得 } \frac{-P_{i, j} + P_{i+1, j}}{\Delta x^2} + \frac{P_{1, j-1} - 2P_{1, j} + P_{1, j+1}}{\Delta y^2}$$

$$= \left(\frac{\tilde{u}_{\frac{1}{2}, j}}{\Delta x} + \frac{\tilde{v}_{1, j+\frac{1}{2}} - \tilde{v}_{1, j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right) / \Delta t - \frac{v}{\Delta x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)_{\frac{1}{2}, j}$$

解 P 方程基本方法是赛德尔迭代, 试算表明此法常常不能得到收敛解, 为了使解加快收敛, 采用多重网格法, 设 P^* 是差分方程 $\Delta P =$

f 正确解 P^v 是迭代 $3v$ 次后近似解

$$\Delta(P^v - P^*) = \Delta P^v - f = \gamma^v$$

$$\Delta W = \gamma^v$$

γ^v 是迭代 v 次后的余量。

现有网格为基本网格，作一比基本网格大三倍的辅助网格，在此辅助网格上求解如下误差方程 $\Delta W = R \quad R = \gamma^v$

其解为 $\tilde{W}$ ，通过线性插值得到 $\Delta W = \gamma^v$ 在基本网格上的近似解 $\tilde{W}$ ，然后对 P^v 进行修正， $\tilde{P}^v = P^v - \tilde{W}$ 这样来回反覆。辅助网格可以不止一个，赛德尔迭代方法的特点是比较好的消减余量的高频分量，采用多重网格方法，通过对余量的修正，使低频的余量变成高频，然后再用赛德尔迭代把它消去，这样来回反复，使收敛速度大大提高，方程 (3.4) 的差分格式如下：

$$\begin{aligned} & \left(1 + \Delta t v \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} + \frac{2}{\Delta z^2} \right)\right) u_{i+\frac{1}{2}, j, k}^{n+1} \\ &= \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}, j, k} - \Delta t \frac{P_{i+1, j} - P_{i, j}}{\Delta x} \\ &+ \Delta t \cdot v \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2}, j, k}^n + u_{i-\frac{1}{2}, j, k}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+\frac{1}{2}, j+1, k}^n + u_{i+\frac{1}{2}, j-1, k}^n}{\Delta y^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{u_{i+\frac{1}{2}, j, k+1}^n - u_{i+\frac{1}{2}, j, k-1}^n}{\Delta z^2} \right) \end{aligned}$$

对 (3.5) 差分格式也类似。

特别要提到，在解方程组 (3) 中我们参考了文献 [1]，但与 [1] 不完全相同。我们把粘性项放在最后一步中，这样只要适当处理粘性项就可以放宽稳定性对时间步长的限制，由于我们只对定常解感兴趣

趣,所以在本文处理中最后一步是绝对稳定的,边界处理上也不完全相同。特别是出口边界条件是由我们提出的问题条件本身决定的,在解P方程的过程中参考了文献(2),解方程组(3)主要时间化在解P方程,运用了多重网格法后,收敛速度大大提高,由于合理的简化,使问题的解才可能在DJS-121机上实现。

三、对方程组无量纲化后,我们一共计算了八个例子(参考文献(3))沿X方向取18个格子点沿y方向取36格点,沿z方向取4个点,根据对称性,实际上只需 $z = \text{常数}$ 二个面,对时间 $n\Delta t$ 当 $n = 100$ 左右得到了稳定解,其中一个典型例子的计算参数如下:
 $v = 0.01$, $\Delta x = \Delta y = 0.1$, $\Delta z = 0.01$ 取 $z = z\Delta z$ 面上速度分量沿y方向变化的规律在图(3),通过图可看出流体通过狭缝体后能达到均流分布(离出口还有一段距离)通过对八种情形的计算,对腔体设计提出了一些参考意见,至今还受到实用单位的重视和应用。

参 考 文 献

1. С. М. Белочерковский, В. А. Гущин, В. В. Щершков.
Метод расщепления в применении к решению
задач динамики вязкой несжимаемой нестискуемости
«Журнал вычислительной математики и математи-
ческой физики» т. 15, No1(1975)
2. Р. П. Огороденко,
差分椭圆型方程的迭代解法
«计算机应用和应用数学» 1974. 11

3、挤压涂布挤压咀结构的计算

(内部报告) 数学所计算站彩片组 1976.7

图(三)