

21世纪高等农林院校数学基础课规划教材

线性代数

王秀丽 主编



厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

线性代数

王秀丽 主编

0151.2
W25



厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/王秀丽主编. —厦门:厦门大学出版社,2007.8
ISBN 978-7-5615-2821-1

I. 线… II. 王… III. 线性代数-高等学校-教材
IV. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 094473 号

厦门大学出版社出版发行

(地址:厦门大学 邮编:361005)

<http://www.xmupress.com>

xmup@public.xm.fj.cn

沙县方圆印刷有限公司印刷

2007年8月第1版 2007年8月第1次印刷

开本:787×960 1/16 印张:13.75 插页:2

字数:252千字 印数:0001~6000册

定价:16.00元

本书如有印装质量问题请直接寄承印厂调换

《21世纪高等农林院校数学基础课规划教材》

编 委 会

主 任：宁正元

副主任：范超峰 李德新 黎云芝

委 员：王秀丽 宁正元 李德新 陈超英

陈济斌 陈绩馨 张朝阳 范超峰

姜 永 温永仙 阙树福 黎云芝

内容简介

本书主要内容共分为六章,包括:行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、二次型、线性空间与线性变换.书中配有难易不等的例题及习题,书后备有参考答案.特别是附录中加进了近几年的硕士研究生入学考试题中线性代数的部分内容,便于学生掌握所学内容的考研方向,有针对性地学习本书内容.考研试题前标有($\times\times-\times\times-\times\times$)代表年份、试卷类型、分值,如(02-4-03)代表2002年数学4考研题,分值3分.

本书可供普通高等学校非数学专业教学用书,也可供自学者使用.

前 言

线性代数是一门重要的公共基础课,在自然科学、工程技术和经济管理等诸多领域有着广泛的应用.本书的主要目的是帮助学生掌握以后专业课程所需的基本概念和基本技能.根据《教学大纲》的要求,基于认真分析学生的实际需要和许多不同专业使用线性代数知识的共同点而编写,希望这门课能够成为对大学生最有用、最有趣的数学课程之一.

线性代数是解线性方程组而发展起来的一门学科,它的基本概念有行列式、向量、矩阵、特征值与线性空间等.使用它的基本概念,许多学科和数学的许多分支中的问题有了几何意义,或者几何意义更加丰富凸显,不少复杂的问题可以用简洁的形式来表述;线性代数的重要性现在比过去任何时候都更加突出,它在数学课程中的角色已经上升到了可以与微积分相提并论:线性代数的这种发展首先是人们所研究问题的规模越来越大,越来越复杂,牵涉的变量成百上千,这样复杂的问题,目前只可能把变量之间的关系化为线性的才有可能求解.其次,计算机技术的飞速发展给线性代数的研究和应用提供了前所未有的空间和机遇.例如,哈佛大学教授列昂惕夫(Wassily Leontief)把美国经济分解为500个部门,对每个部门,他列出一个描述该部门的产出如何分配给其他经济部门的线性方程;由于当时的计算机还不能处理500个未知数的500个方程组,列昂惕夫只好把问题简化为42个未知数的42个方程组;当时是1949年,列昂惕夫编写计算机程序用了几个月时间,而当时最大的计算机运算了56个小时,才得到最后的答案.他打开了研究经济数学模型的新时代的大门,并于1973年获得了诺贝尔经济学奖.如今,有了高性能的计算机,处理这些问题已经是轻而易举的事情了.不仅如此,线性代数的应用可以说已经渗透到了社会生活的各个领域.

本书编者结合多年来从事线性代数课程教学和研究的体会,参考了国内外许多同类教材,编成此书.力求由浅入深、循序渐进地阐述线性代数的观点和方方法,并且强调概念和计算同等重要.本书备有各层次的习题.

本书适用于普通高等学校非数学专业学生,也可作为工科、管理类学生硕士研究生入学考试数学复习参考资料.本书第一章至第五章约34学时,第六章约6学时,第六章供对数学要求较高的专业选学.

本书由王秀丽、尤添革共同撰写,其中王秀丽执笔第一、二、三章,尤添革执

笔第四、五、六章,最后由王秀丽统稿、定稿。

在本书的编写过程中,得到了宁正元教授的热情鼓励和大力支持;同行专家学者温永仙、张朝阳、李德新等对本书的编写曾提出过许多宝贵的意见和建议,在此谨表谢意。

由于编者水平有限,虽经多次修改,书中内容不当甚至错误在所难免,敬请读者批评指正。

联系方式: E-mail: nzyfn@126.com
2007年5月

... 联系方式: E-mail: nzyfn@126.com ... 2007年5月 ...

(17)	关于天大研已得向量	4.3.3
(18)	关于天大研已得向量	4.3.3
(18)	关于天大研已得向量	4.3.3
(88)	关于天大研已得向量	4.3.3
(90)	关于天大研已得向量	4.3.3
(92)	关于天大研已得向量	4.3.3
第一章 行列式		(1)
(2) § 1.1 排列及逆序		(1)
(3) 习题 1.1		(2)
(4) § 1.2 n 阶行列式		(3)
(5) 习题 1.2		(9)
(6) § 1.3 行列式的基本性质		(10)
(7) 习题 1.3		(15)
(8) § 1.4 行列式按行(列)展开定理及 Laplace 定理		(16)
(9) 习题 1.4		(25)
(10) § 1.5 克莱姆(Cramer) 法则		(26)
(11) 习题 1.5		(29)
第二章 矩阵		(31)
(12) § 2.1 矩阵的概念		(31)
(13) § 2.2 矩阵的运算		(33)
(14) 习题 2.2		(38)
(15) § 2.3 分块矩阵		(39)
(16) 习题 2.3		(43)
(17) § 2.4 方阵的行列式、逆矩阵		(43)
(18) 习题 2.4		(50)
(19) § 2.5 初等变换与初等矩阵		(51)
(20) 习题 2.5		(56)
第三章 向量空间		(58)
(21) § 3.1 向量的概念及运算性质		(58)
(22) 习题 3.1		(60)
(23) § 3.2 向量的线性相关性		(61)
(24) 习题 3.2		(66)
(25) § 3.3 向量组的线性相关性的判别定理		(68)
(26) 习题 3.3		(73)

§ 3.4	向量组的秩与极大无关组	(74)
习题 3.4		(80)
§ 3.5	矩阵的秩	(81)
习题 3.5		(88)
§ 3.6	向量空间的基本概念	(90)
习题 3.6		(93)
第四章	线性方程组	(95)
§ 4.1	线性方程组的基本概念	(95)
§ 4.2	解线性方程组	(96)
习题 4.2		(101)
§ 4.3	齐次线性方程组解的结构	(102)
习题 4.3		(108)
§ 4.4	非齐次线性方程组解的结构	(109)
习题 4.4		(114)
第五章	二次型	(116)
§ 5.1	预备知识:向量的内积	(116)
习题 5.1		(123)
§ 5.2	二次型及其标准型	(125)
习题 5.2		(130)
§ 5.3	方阵的特征值与特征向量	(131)
习题 5.3		(136)
§ 5.4	相似矩阵	(137)
习题 5.4		(140)
§ 5.5	实对称矩阵的相似对角化	(141)
习题 5.5		(147)
§ 5.6	正定二次型	(148)
习题 5.6		(153)
第六章	线性空间与线性变换	(154)
§ 6.1	线性空间的定义	(154)
习题 6.1		(157)
§ 6.2	线性空间的维数、基与坐标	(158)
习题 6.2		(163)
§ 6.3	子空间与直和	(163)
习题 6.3		(168)

§ 6.4 线性变换..... (168)

习题 6.4 (171)

§ 6.5 线性变换的矩阵表示法..... (172)

习题 6.5 (177)

§ 6.6 线性变换的运算..... (178)

习题 6.6 (180)

附录 历届考研题线性代数部分内容 (181)

习题答案..... (194)

参考书目..... (209)

第一章

行列式

解方程是代数学中一个基本的问题. 在中学代数和解析几何里, 我们用消元法解过一元、二元、三元以及四元一次方程组. 但是许多从理论和实际问题里导出的线性方程组常常含有相当多的未知量, 并且未知量的个数与方程的个数也不一定相等. 这一章和第四章, 我们讨论一般的多元一次方程组, 即线性方程组. 为此, 我们首先着重研究在讨论线性方程组时要用到的一个有力工具——行列式.

§ 1.1 排列及逆序

我们已经学过, 由 $1, 2, \dots, n$ 这 n 数组成的一个有序数组称为一个 n 级 (阶) 排列. 并且这样的 n 个数共可以组成 $p_n^n = n!$ 个不同的排列.

在数学中把考察的对象, 例如上面的 $1, 2, \dots, n$ 叫做元素. 对于 n 个不同的元素, 我们规定各元素之间有一个标准次序, 特别地, 我们把 $1, 2, \dots, n$ 这 n 个自然数规定由小到大的标准次序为自然排列 (一般也称作标准排列).

定义 (1.1.1) 在一个 n 阶排列中, 如果一个较大的数排在一个较小的数的前面, 则称这两个数构成一个逆序. 一个排列中所有逆序的总和叫做这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列叫做奇排列, 逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

例如, 由数字 $1, 2, 3, 4, 5$ 共可以组成 $p_5^5 = 5! = 120$ 种不同的排列, 45321 和 23514 是其中的两个排列, 在 45321 中 $43, 42, 41, 53, 52, 51, 32, 31, 21$, 是逆序, 逆序数为 9 , 为奇排列; 23514 的逆序为 $21, 31, 51, 54$, 逆序数为 4 , 为偶排列. 显然, 此时 12345 也为其中的一个排列, 它是自然排列, 其逆序数为 0 , 也算作偶排列.

我们把一个排列的逆序数记为 τ , 如 $\tau(45321) = 9$.

把一个排列中某两个数的位置交换, 而其余的数不动, 就得到另一个排列. 这样的一个变换称为一个对换. 例如, 经过 $1, 2$ 对换, 排列 2431 就变成了 1432 , 排列 2134 就变成了 1234 . 显然, 如果连续施行两次相同的对换, 那么, 排列就还原了.

定理(1.1.1) 对换改变排列的奇偶性.

这就是说,经过一次对换,奇排列变成偶排列,偶排列变成奇排列.

证 (I) 先看一个特殊的情形,对换的两个数在排列中是相邻的情形. 排列

$$\cdots a, b \cdots \text{ 经过 } a, b \text{ 对换变成 } \cdots b, a \cdots$$

这里“ \cdots ”表示那些不动的数,显然,它们的逆序数经过 a, b 对换后并不改变,而 a, b 两元素的逆序数改变为:当 $a < b$ 时,经对换后, a 的逆序数增加 1,而 b 的逆序数不变;当 $a > b$,经对换后, a 的逆序数不变而 b 的逆序数减小 1. 所以不论增加 1 还是减少 1,其逆序数的奇偶数都改变,定理得证.

(II) 再看一般情形

$$\text{设排列为 } \cdots a, i_1, i_2, \cdots, i_s, b, \cdots \quad (1.1.1)$$

$$\text{经 } a, b \text{ 对换后,排列(1.1.1)变为 } \cdots b, i_1, i_2, \cdots, i_s, a, \cdots \quad (1.1.2)$$

不难看出,这样一个对换可以经过一系列的相邻对换来实现,从(1.1.1)出发,把 b 与 i_s 对换,再与 i_{s-1} 对换, \cdots , 即把 b 经 $s+1$ 次相邻位置的对换, (1.1.1) 式变为

$$\cdots b, a, i_1, \cdots, i_s, \cdots \quad (1.1.3)$$

再把(1.1.3)中 a 一位一位向右做 s 次相邻对换,即得(1.1.2),这样,从(1.1.1)变到(1.1.2)共经过了 $2s+1$ 次相邻对换,而 $2s+1$ 为奇数,故这样的对换的最终结果还是改变奇偶性.

推论(1.1.1) 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证 由定理(1.1.1)知对换次数就是排列奇偶数的变化次数,而标准排列为偶排列(逆序数为 0),因此知,推论成立.

推论(1.1.2) 由 $1, 2, \cdots, n$ 这 n 个数构成的所有排列中(共 $n!$ 个),奇偶排列各占一半,即各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明留作练习,请读者自证.

习题 1.1

1. 按照顺序从小到大为标准顺序,求下列各排列的逆序数,并指出它们是奇排列,还是偶排列.

(1) $4, 1, 3, 2, 5;$

(2) $2, 4, 5, 3, 1, 8, 7, 6;$

(3) $n, n-1, n-2, \cdots, 3, 2, 1;$

(4) $(n-1), (n-2), \dots, 3, 2, 1, n;$

(5) $1, 3, \dots, (2n-1), 2, 4, \dots, (2n);$

(6) $1, 3, \dots, (2n-1), (2n), (2n-2), \dots, 2.$

2. 证明: 由 $1, 2, \dots, n$ 这 n 个数构成的 $n!$ 个排列中, 奇偶排列各半.

3. 假设 n 个数码的排列 i_1, i_2, \dots, i_n 的逆序数为 k , 求排列 $i_n, i_{n-1}, \dots, i_2, i_1$ 的逆序数.

§ 1.2 n 阶行列式

先看两个简单的例子.

解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1.2.1)$$

a_{ij} 叫做 x_j 的系数, 它有两个下脚标(指标). 前一个脚标 i 表示它在第 i 个方程, 后一个脚标 j 表示它是第 j 个未知量的系数, 如 a_{21} 即是第二个方程中第一个未知量的系数. 用消元法消去(1.2.1)中 x_2 , 得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$.

同样, 消去 x_1 , 得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$.

因此, 当 $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

为了便于记忆, 我们引进记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 叫做 2 阶行列式,

它含有两行、两列. 2 阶行列式是这样的两个项的代数和: 一个是在从左上角到右下角的对角线(主对角线)上两个数的乘积, 取正号; 另一个是从右上角到左下角的对角线(副对角线)上两个数的乘积, 取负号. 譬如

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - (-3) \times 1 = 13.$$

根据以上记法 $b_1a_{22} - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $a_{11}b_2 - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

如果记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$,

则方程组(1.2.1)的解就可以写成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D}.$$

像这样用行列式来表示解,形状简便,容易记忆.

例(1.2.1) 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$$

解 这时

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7, D_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -19, D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -11,$$

因此,所给方程组的唯一解是

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-19}{-7} = \frac{19}{7}, y = \frac{D_2}{D} = \frac{-11}{-7} = \frac{11}{7}.$$

我们再来解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1.2.2)$$

看看如何用三阶行列式表示它的解.

同上面一样,用消元法,先从前面两式消去 x_3 ,后两式消去 x_3 ,得到只含 x_1, x_2 的二元线性方程组,再消去 x_2 ,就得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1 = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3.$$

当 x_1 系数不为零,即

$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$ 时,得

$$x_1 = \frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3).$$

同理,可得

$$x_2 = \frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}).$$

$$x_3 = \frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}).$$

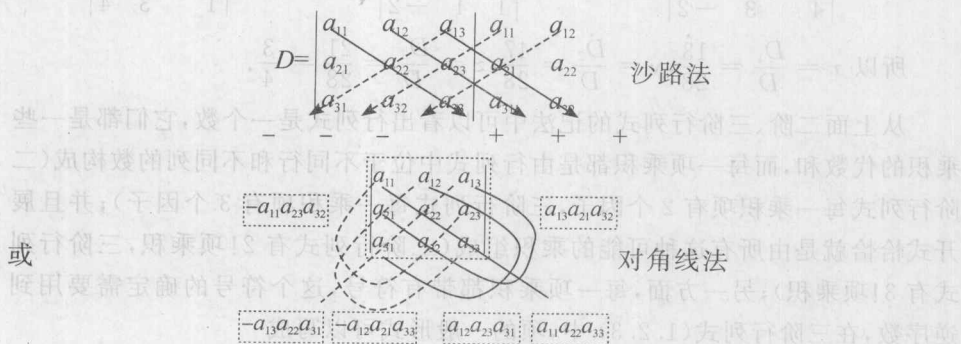
这样的式子很繁,为了便于记忆,我们引进三阶行列式记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (1.2.3)$$

叫做三阶行列式。

它含有三行、三列,共有 $3^2 = 9$ 个数。三阶行列式的值应为六个项的代数和。下面方法可以帮助记忆三阶行列式的计算。



实线上三个数的乘积构成的三项取正号,虚线上三个数乘积构成的三项都取负号。于是,上面三元线性方程组的解 x_1, x_2, x_3 就可以表示成:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D},$$

$$\text{其中 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

这种解结构与前面二阶行列式的解的结构类似。

例(1.2.2) 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 1 \\ x + 3y - 2z = 4 \end{cases}$$

解 此时

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 2 \times (-2) + (-1) \times (-5) \times 1 + 1 \times 3 \times 3 - 1 \times 2 \times 1 - (-5) \times 3 \times 2 - (-2) \times 3 \times (-1) = 28.$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 13, D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 47, D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21,$$

$$\text{所以 } x = \frac{D_1}{D} = \frac{13}{28}, y = \frac{D_2}{D} = \frac{47}{28}, z = \frac{D_3}{D} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}.$$

从上面二阶、三阶行列式的记法中可以看出行列式是一个数,它们都是一些乘积的代数和,而每一项乘积都是由行列式中位于不同行和不同列的数构成(二阶行列式每一乘积项有 2 个因子,三阶行列式每一乘积项有 3 个因子);并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成(二阶行列式有 2! 项乘积,三阶行列式有 3! 项乘积);另一方面,每一项乘积都带有符号,这个符号的确定需要用到逆序数,在三阶行列式(1. 2. 3)中,项的一般形式可以写成

$$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

其中 j_1, j_2, j_3 是 1, 2, 3 的一个排列. 可以看出,当 j_1, j_2, j_3 是偶排列时,对应的项在(1. 2. 3)中取正号;当 j_1, j_2, j_3 是奇排列时,带有负号. 于是三阶行列式(1. 2. 3)可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} \pm a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}.$$

用以上记法表示二阶行列式也成立

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} \pm a_{1j_1} a_{2j_2}.$$

现在,我们就根据这些规律定义 n 阶行列式.

定义(1. 2. 1) 设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

做出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积,并冠以符号 $(-1)^r$, 得到形如

$(-1)^{\tau} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的项, 其中 j_1, j_2, \cdots, j_n 是 $1, 2, \cdots, n$ 的排列, τ 为这个排列的逆序数. 由于这样的排列共有 $n!$ 个, 因而形如 $(-1)^{\tau} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的项共有 $n!$ 个, 所有这 $n!$ 项的代数和 $\sum (-1)^{\tau} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 称为 n 阶行列式, 记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

简记作 $D = \Delta(a_{ij})$ (或记为 $D = \det(a_{ij})$). 数 a_{ij} 称为行列式 $\Delta(a_{ij})$ 中的元素, 或简称为元. 这里, $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

当 $n = 1$ 时, 规定 $|a| = a$. 当 $n = 2, 3$ 时, 按此定义与前面用对角线法则定义的二、三阶行列式, 显然是一致的.

注意: 四阶或四阶以上的行列式就没有像二、三阶行列式那样可以直接用对角线法则计算.

例(1.2.3) 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 这是一个四阶行列式. 计算的结果应该为 $4! = 24$ 项的代数和, 但是这个行列式的零元素较多, 所以不为零的项就不多了. 第一行能取 $a_{11} = 3$ 和 $a_{13} = -1$, 第二行仅能取 $a_{22} = 2$ 和 $a_{24} = -1$. 当取 $a_{11} = 3, a_{22} = 2$ 时, 第三行必取 $a_{33} = 3$. 第四行也仅有一种取法 $a_{44} = 1$. 故而, 这个行列式有

$$a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} = 3 \times 2 \times 3 \times 1 = 18,$$

$$a_{13} a_{24} a_{32} a_{41} = (-1) \times (-1) \times 1 \times (-3) = -3,$$

而第一项的列标排列为 1234, 逆序数为 0, 为偶排列, 取正号; 第二项的列标排列为 3421, 逆序数为 5, 为奇排列, 取负号.

所以原行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} + (-1)^5 a_{13} a_{24} a_{32} a_{41} \\ = 18 - (-3) = 21.$$

例(1.2.4) 计算上三角行列式