



新世纪高等学校教材

公共课系列教材

数学系列教材

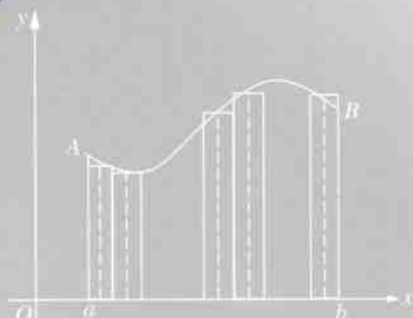
李仲来 王存喜 宣体佐 编著

北京师范大学数学科学学院 主编

高等数学 C

第二版
(上册)

GAODENG SHUXUE C



$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$



北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

新世纪高等学校教材

公共课系列教材
数学系列教材

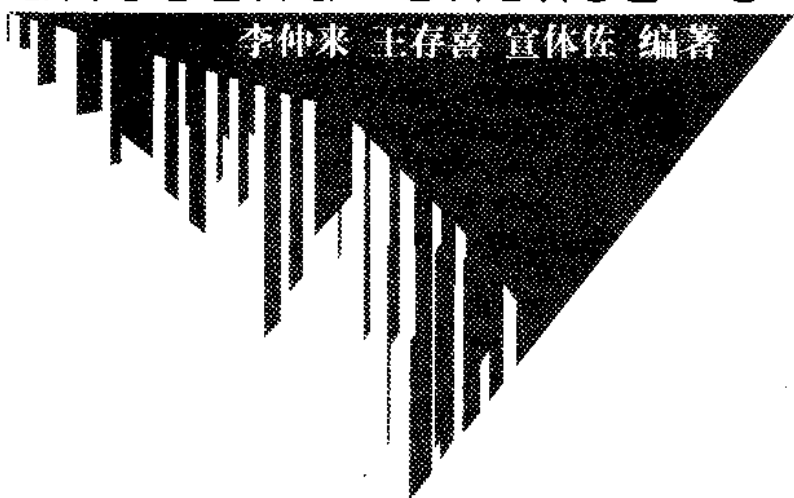
第二版（上册）

北京师范大学数学科学学院 主编

高等数学 C

GAODENG SHUXUE C

李仲来 王存喜 宣体佐 编著



北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

北京

图书在版编目(CIP) 数据

高等数学 C.上册 / 李仲来, 王存喜, 宣体佐主编. —
北京: 北京师范大学出版社, 2007.10
新世纪高等学校教材. 公共课系列教材. 数学系列教材
ISBN 978-7-303-08883-6

I. 高… II. ①李…②王…③宣… III. 高等数学—高
等学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 163740 号

出版发行: 北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码: 100875

印 刷: 北京京师印务有限公司

装 订: 三河万利装订厂

经 销: 全国新华书店

开 本: 170 mm × 230 mm

印 张: 23.5

字 数: 350 千字

印 数: 1~3 000

版 次: 2007 年 10 月第 2 版

印 次: 2007 年 10 月第 1 次印刷

定 价: 32.90 元

责任编辑: 王松浦

装帧设计: 高 霞

责任校对: 李 茵

责任印制: 董本刚

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话: 010-58800697

北京读者服务部电话: 010-58808104

外埠邮购电话: 010-58808083

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话: 010-58800825

内 容 提 要

本书分上、下两册。上册内容主要包括极限与一元函数微积分学；下册内容主要包括常微分方程、级数、向量代数、空间解析几何、多元函数微积分学以及行列式与矩阵简介。本书基本概念清楚，应用性强，各章均配备了一定数量的练习题，并配有单元小结和综合例题，以利于教师教学及读者掌握书中的基本原理和方法。本书是作者多年教学和实践的总结，可作为高等学校生物学、化学等本科生和专科生的教材，也可供有关生物学和化学工作者参考。

北京师范大学数学科学学院简介

北京师范大学数学系成立于1922年，其前身为1915年创建的北京高等师范学校数理部，1983年成立了数学与数学教育研究所，2004年成立了数学科学学院。学院现有教师73人，其中教授32名(博士生导师29名)，副教授23名；有博士学位的教师占90%。特别地，有中国科学院院士2名，国家杰出青年基金获得者4人，教育部长江学者奖励计划特聘教授4人和讲座教授1人，入选新世纪百千万人才工程国家级人选2人，入选教育部跨/新世纪人才培养计划7人。数学科学学院于1981年获基础数学、概率论与数理统计学博士学位授予权，1986年获应用数学博士学位授予权，基础数学、概率论与数理统计学于1988年被评为国家级重点学科，1990年建立了北京师范大学第一个博士后流动站，数学学科于1996年成为国家211工程重点建设的学科，1997年成为国家基础科学人才培养基金基地，1998年获数学一级学科博士授予权，2001年概率论方向被评为国家自然科学基金创新群体，2002年概率论与数理统计学再次被评为国家级重点学科，2005年进入“985工程”科技创新基础建设平台，2006年国家教育部数学与复杂系统重点实验室已经通过专家论证，目前正在建设中。2007年概率论与数理统计学重点学科通过考核评估，基础数学被增补为国家级重点学科，数学被认定为国家级一级重点学科。学院还有基础数学、计算数学、概率论与数理统计学、应用数学、课程与教学论(数学)、科学技术史(数学)、计算机软件与理论、控制理论与控制工程8个硕士点。学院下设数学系、统计与金融数学系，有数学与应用数学、统计学2个本科专业；有分析、代数、几何、方程、概率论、数理统计、计算数学、应用数学、数学教育与数学史9个教研室和《数学通报》杂志编辑部。数学与数学教育研究所有随机数学、生物信息、模糊系统与模糊信息处理、统计数据分析、数学现代分析、科学计算、动力系统7个研究中心，有复杂系统实时控制、数据统计与分析2个实验室。

90多年来，数学科学学院已毕业全日制本科生6467人。20多年来，已毕业博士研究生189人，硕士研究生818人。据不完全统计，在博士毕业生中：有2人当选为中国科学院院士，5人获国家杰出青年基金，4人获国家自然科学奖，3人获国家级有突出贡献的中青年专家称号，2人入选新世纪百千万人才工程国家级人选，2人入选教育部优秀青年教师资助计划，7人入选教育部跨/新世纪人才培养计划，1人入选全国百篇优秀博士学位论文。(李仲来执笔)

2007-09-08

第二版前言

1915年,北京师范大学的前身——北京高等师范学校成立数理部,1922年成立数学系,2004年成立北京师范大学数学科学学院。经过90多年的风风雨雨,数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验。将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的。

1958年以前,我校主要在物理系和化学系开设高等数学课,从1958年开始,由于扩大招生和进行教学改革的需要,于1959年开始成立公共数学教研室,在多个专业开设高等数学课程。针对各系专业课对数学的要求,进行课程内容的改革和教学进度的调整,并要求讲课教师树立为外系专业课“服务”的教学思想。当时,物理系和天文系开设4学期的高等数学课程,内容有解析几何、高等代数、一元和多元微积分及场论;化学系开设3学期的高等数学课程,主要内容是一元微积分;生物系和地理系开设2学期的简明微积分学课程。

1981年3月后,我校除中文系、历史系和外语系外,其余的系都开设高等数学课程,因此,高等数学课程的教学任务日渐增加。1999年高校扩大招生规模后,我校每年有约2500名本科生学习高等数学。从1999年秋季开始,在学校教务处的有力支持下,按照不同专业分层次进行教学的原则,我系制定并统一安排全校非数学专业大学数学教学改革工作,根据各专业对数学知识和数学能力的要求,分为大学数学A(3学期,周6学时),B(2学期,周12学时),C(2学期,平均周4.5学时),D(1学期,周4学时)四个层次。各专业根据需要提供本专业数学课的教学内容。在20世纪80年代,部分教师充分利用在外系讲课的便利条件,合作进行科学研究,或撰写高等数学教学研究论文,或编写教材,编写的教材有物理类用的高等数学,化学、生物学和地理学用的高等数学,生物系用的生物统计。2005年5月,由北京师范大学数学科学学院李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行了沟通和协商,由李仲来教授任主编,准备对北京师范大学出版社出版的5部数学教材修订后再版,再用几年时间,出版大学数学A、B、C、D课程四个层次的系列教材。

经过多年的教学实践,高等数学的教学内容已经比较固定,国内外教材已经有多种版本,国内对几何、物理类联系实际的教材内容比较好,对其他方向联系实际的教材内容还需要大力加强.在这种情况下,本套系列教材力图在与专业的结合上写出特色.当然,这对作者提出了很高的要求.我们希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者提出宝贵的修改意见,使其不断改进和完善.

本套教材可供高等院校非数学专业本/专科生、函授生和在职中学教师等使用和参考.

北京师范大学数学科学学院

2006-10-04

第二版编者的话

自北京师范大学生命科学学院的大学数学课程压缩学时的第二年(2000年),除了继续讲授《生物统计》外,我已经连续给生命科学学院本科生讲授了7轮大学数学。所使用的同济大学应用数学系主编的《高等数学》教材虽然不错,但由于该教材的适用对象为工科类学生,因此不可能照顾到理科类学生,更不可能考虑与生物学发生联系。目前国内见到的理科高等数学教材有4套与生物学与化学有联系:其中为化、生、地专业编写的有两套,为生、化专业编写的有两套。教材中涉及几何、物理和化学的例子较多,而生物学的实例很少。我从1986年开始从事预防医学课题的研究,1988年开始在医学杂志上发表论文,1991年从生态学角度进行研究,1993年开始在生物学杂志上发表论文。已在医学杂志上发表论文64篇(独立和第一作者46篇),生物学杂志34篇(独立和第一作者30篇);已培养了20名生物数学研究生,对数学在生物学中的应用有一定深度的了解和理解。我试图将其贯彻落实在教材的写作中,为此作了一些努力。

1999年前,生物系开设两门数学课程,高等数学开设两学期,每周各5学时;生物统计开一学期,每周4学时。1999年后,新的教学计划对高等数学的教学时数作了较大改变,因此,如何在有限的课时内,将必要的基本概念、定理和方法传授给学生,需要统一地考虑生物专业的数学课程内容。为此,我中断了高等数学A的教学,从2000级开始至今,生命科学学院的高等数学和生物统计均由我开设。在对数学课程内容和体系统一考虑的前提下,对高等数学的内容做了以下处理:

(1)对基本概念和理论,力争从生物背景出发,引出实际模型及概念,并进行一定的理论探讨。当然,也引入一些其他学科的例子来阐明基本概念和理论。教导学生从日常见到的生物现象中提出有意义的理论和实际问题,将其转化为数学问题后加以解决。尽可能地采用较生动有趣的材料讲解高等数学的基本原理。

(2)注意与中学数学内容的衔接,减少与中学数学内容的重复。对中学教材中函数概念及若干性质,选择性地介绍并加以深化,重点讲解与其有关的

新概念和内容。

(3)妥善处理微积分、线性代数和生物统计内容的重叠和衔接部分，尽量简化其知识结构，使前后的教学融为一体，补充了生物学在高等数学应用的例题和习题。

(4)不仅把高等数学作为必需的知识来学习，更着重强调必要的数学思维的训练。

如何修订高等数学基本内容已经比较成熟和相对稳定的教材，是一件很不容易做的事情。本书的不当之处在所难免，错误和不足概由作者负责，恳请使用本教材的老师和同学们以及其他读者提出批评和修改意见。

本书的出版得到了北京师范大学出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢。

本教材可供高等学校生物学和化学类本科生、教育学院、函授和在职中学教师等使用和参考。

李仲来
2007-08-08

第一版前言

北京师范大学是一所具有 80 多年历史的老学校，在学科建设和教学实践中积累了一定的经验，将它贯彻到教材中去无疑是有益的。为了加强教材建设，加强与兄弟院校的交流，我社约请北京师范大学数学和数学教育研究所所长严士健教授等组成教材编委会，研究编写出版一套教材。编委会在研究当前教学改革的新情况和过去的教学经验的基础上，同时参照原教育部 1984 年颁发的中学教师进修大纲，对教材的编写宗旨和要求进行认真地讨论，组织数学系有教学经验的教师进行编写，并且由编委等分工负责对书稿进行审订。

这套教材包括数学分析、解析几何、高等代数、概率论与数理统计、常微分方程、复变函数论、抽象代数基础、高等几何、微分几何、实变函数论与泛函分析、计算方法、理论力学以及高等数学。

这套教材文字通俗易懂、内容由浅入深、循序渐进，便于自学，科学性较强。每章有小结，每节(或几节)后配有习题，每章有总复习题，习题安排由易而难，层次清楚。书后附有习题答案或提示，以利于读者自学时检查自己的作业。

为了适应不同层次学校和人员的需要，书中有些内容加了“*”号，它相对独立，如因学时较少，可以删去。

这套教材可供高等师范院校和教育学院本科生(或专科)、函授、在职中学教师进修等使用。

第一版编者的话

本书是依据我们在北京师范大学化学、地理等系讲授高等数学课程的体会，同时依据高等师范院校化学、生物、地理等专业的“高等数学”课教学大纲，以及原教育部1984年4月颁发的中学教师进修高等师范本科化学专业的“高等数学”课教学大纲编写的。

目前国内已有一些高等数学教材，但是它们大多适应于工科专业的特点，而适应于理科及高等师范院校特点的教材尚且不多，为此我们编写此书，意图是为理科及高等师范院校的化、生、地等系的高等数学课提供教材，同时也可作为广大中学教师进修高师本科化学等专业的高等数学课提供教材。

我们在编写此书时注意突出以下两点：

一、内容紧扣大纲。由于本书的内容完全适应于它所遵循的两个大纲（本文开头已叙）的要求，因此我们的愿望是使本书有较强的针对性，又有较广泛的适用性。

二、内容叙述深入浅出，便于自学。由于在化、生、地等系开设的这门数学课长期以来存在着内容多、课时少的矛盾，因此本书的编写思想又要突出便于自学，我们尽量使讲解较为详尽，例题较为丰富，同时本书每节后配有习题，每章中分单元配有小结和综合例题，本书最后附有习题答案或解题提示，我们的愿望是使读者感到方便。

本书分上、下两册，上册内容主要包括一元函数微分学、一元函数积分学，下册内容主要包括级数、常微分方程、向量代数、空间解析几何、多元函数微积分、以及行列式与矩阵简介，带“*”号的章节，可酌情处理。

我们在编写中主要参考的书目有：樊映川等编的《高等数学讲义》，同济大学编著的《高等数学学习题集》，辛钦（苏）著的《数学分析简明教程》，希尔斯（美）著的《化学数学》，此外还参考了其他有关高等数学教材。

本书上册由宣体佐同志编写，下册由王存喜同志编写。

本书承北师大数学系董延闾教授审阅，并提出许多宝贵意见，对此，我们表示衷心地感谢。

由于编者的水平有限，本书一定存在不少缺点与错误，我们恳切希望读者给予批评指正。

王存喜 宣体佐

1989-04

目 录

第一章 函数	(1)
§ 1.1 变量 区间	(1)
习题 1.1	(4)
§ 1.2 函数概念	(5)
习题 1.2	(12)
§ 1.3 函数的几个特性	(14)
习题 1.3	(18)
§ 1.4 反函数	(18)
习题 1.4	(21)
§ 1.5 基本初等函数及其图形	(21)
习题 1.5	(26)
§ 1.6 复合函数 初等函数	(27)
习题 1.6	(30)
单元小结和综合例题	(31)
第二章 极限与连续	(34)
§ 2.1 数列及其极限	(34)
习题 2.1	(44)
§ 2.2 函数的极限	(45)
习题 2.2	(52)
§ 2.3 无穷小和无穷大	(53)
习题 2.3	(57)
§ 2.4 函数极限的运算法则	(58)
习题 2.4	(66)
§ 2.5 极限存在的两个判定法则 两个重要极限	(67)
习题 2.5	(72)
§ 2.6 无穷小的比较	(73)
习题 2.6	(76)
单元小结和综合例题(一)	(77)

§ 2.7 函数连续性的概念	(84)
习题 2.7	(90)
§ 2.8 连续函数的运算和初等函数的连续性	(91)
习题 2.8	(95)
§ 2.9 闭区间上连续函数的性质	(96)
习题 2.9	(97)
单元小结和综合例题(二)	(98)
第三章 导数与微分	(101)
§ 3.1 导数的概念	(101)
习题 3.1	(109)
§ 3.2 导数的运算	(110)
习题 3.2	(118)
§ 3.3 反函数的导数 初等函数的求导问题	(119)
习题 3.3	(126)
§ 3.4 高阶导数	(127)
习题 3.4	(130)
§ 3.5 隐函数的导数 参数方程所确定的函数的导数	(130)
习题 3.5	(136)
单元小结和综合例题(一)	(137)
§ 3.6 微分的概念与计算	(140)
习题 3.6	(146)
§ 3.7 微分的应用	(148)
习题 3.7	(152)
单元小结和综合例题(二)	(152)
第四章 中值定理和导数的应用	(155)
§ 4.1 中值定理	(155)
习题 4.1	(161)
§ 4.2 洛必达法则	(162)
习题 4.2	(171)
单元小结和综合例题(一)	(172)
§ 4.3 函数单调性的判定法	(175)
习题 4.3	(178)
§ 4.4 函数的极值及其求法	(178)

习题 4.4	(184)
§ 4.5 最大值和最小值的求法	(184)
习题 4.5	(188)
§ 4.6 曲线的凹凸性和拐点	(189)
习题 4.6	(193)
§ 4.7 函数图形的描绘	(193)
习题 4.7	(198)
§ 4.8 方程的近似解	(198)
习题 4.8	(201)
§ 4.9 平面曲线的曲率	(201)
习题 4.9	(207)
单元小结和综合例题(二)	(207)
第五章 不定积分	(213)
§ 5.1 不定积分的概念	(213)
习题 5.1	(216)
§ 5.2 基本积分表和最简单的积分法则	(217)
习题 5.2	(222)
§ 5.3 第一类换元积分法	(222)
习题 5.3	(230)
§ 5.4 第二类换元积分法	(231)
习题 5.4	(236)
§ 5.5 分部积分法	(236)
习题 5.5	(240)
单元小结和综合例题(一)	(241)
§ 5.6 有理函数的不定积分	(246)
习题 5.6	(255)
§ 5.7 三角函数有理式的不定积分	(255)
习题 5.7	(257)
§ 5.8 简单无理式的不定积分	(258)
习题 5.8	(259)
§ 5.9 积分表的使用	(260)
习题 5.9	(262)
单元小结和综合例题(二)	(263)

第六章 定积分及其应用	(268)
§ 6.1 定积分的概念	(268)
习题 6.1	(274)
§ 6.2 定积分的基本性质	(275)
习题 6.2	(278)
§ 6.3 牛顿-莱布尼茨公式	(278)
习题 6.3	(284)
§ 6.4 定积分的换元积分法和分部积分法	(285)
习题 6.4	(291)
§ 6.5 定积分的近似计算	(292)
习题 6.5	(296)
单元小结和综合例题(一)	(297)
§ 6.6 定积分在几何上的应用	(301)
习题 6.6	(314)
§ 6.7 定积分在物理上的应用	(315)
习题 6.7	(321)
§ 6.8 广义积分	(322)
习题 6.8	(331)
单元小结和综合例题(二)	(332)
附录 积分表	(336)
习题答案或提示	(345)

第一章 函 数

函数是高等数学中最重要的基本概念之一,也是微积分的研究对象.在这一章里,我们从变量说起,然后讨论函数的一般概念和最常用的函数——初等函数.

§ 1.1 变量 区间

一、常量与变量

在观察自然现象或者生产过程时,常常会遇到各种不同的量,例如时间、距离、速度、面积、体积、温度等,它们各自有着不同的状态.其中有些量在某个过程中可以取不同的数值,这些量叫做变量(variable);另一些量在过程的进行中却保持一定的数值不变,这些量叫做常量(constant quantity).例如,在匀速直线运动中,速度是一个常量,而时间和路程都是变量.又如,把一个密闭容器内的气体加热时,气体的体积是一个常量,而气体的温度和压强都是变量.

常量和变量的划分是相对的,它依赖于研究这个现象的场合.同一个量在某种情况下是常量,而在另一种情况下就可能是变量.例如重力加速度,在地球表面不大的范围内可以把它看作一个常量,但在广大的范围内它必是一个变量.

我们还会遇到这样的情况,某些量在整个过程中虽然是变化的,但变化很小可以忽略不计,这时可把这个量看作常量.例如,在自由落体运动中,当物体离地面不太高时,就把重力加速度看作一个常量.但在研究火箭的发射问题时,火箭的高度变化很大,这时重力加速度变化也很大,这种情况下就必须把重力加速度看作变量,才能正确地解决问题.

如上所述,我们不应把常量与变量绝对地对立起来,今后在讨论中,我们会把常量看作变量的特殊情形,即把常量看作特殊的变量,这给讨论问题带来许多便利.我们再举生活中的一个例子来加以说明.例如,公共汽车的票价随乘

车站数的不同而不同,因此汽车票价就是一个变量.但北京市内有很多条线路上的公共汽车,不论乘车一站还是乘至终点站,票价一律一元,因此这几条线路上的公共汽车票价就是常量.当我们把常量看作特殊的变量时,就可以说,北京市内各条线路上的公共汽车的票价都是变量.这样,在讨论有关汽车票价的问题时,就避免了繁琐的说明.

通常用字母 a, b, c 等表示常量,用字母 x, y, t 等表示变量.

任何变量都有一个变化范围.变化范围只包含一个数时,这个变量实际上就是一个常量.

一般说来,变量的变化范围常用区间来表示.

二、区间

设 a, b 是两个实数,且 $a < b$. 把满足不等式 $a < x < b$ 的实数 x 的全体叫做开区间(open interval),记作 (a, b) ; 把满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的实数 x 的全体叫做闭区间(closed interval),记作 $[a, b]$; 把满足不等式 $a < x \leq b$ 或 $a \leq x < b$ 的实数 x 的全体叫做半开区间(half open interval),分别记作 $(a, b]$ 或 $[a, b)$. 这些区间在数轴上表示出来,就是介于点 a 和点 b 之间的线段上的点的全体,如图 1.1 所示.点 a 和点 b 叫做区间的端点(end point),线段的长度 $b - a$ 叫做区间的长度(length).

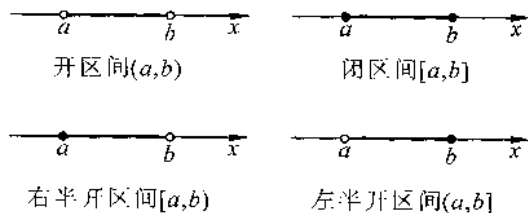


图 1.1

上面的区间都是有限区间,此外还有无限区间(infinite interval):

大于 a 的实数的全体,用 $(a, +\infty)$ 表示,或写成 $a < x < +\infty$;

大于或等于 a 的实数的全体,用 $[a, +\infty)$ 表示,或写成 $a \leq x < +\infty$;

小于 a 的实数的全体,用 $(-\infty, a)$ 表示,或写成 $-\infty < x < a$;

小于或等于 a 的实数的全体,用 $(-\infty, a]$ 表示,或写成 $-\infty < x \leq a$;

全体实数用 $(-\infty, +\infty)$ 表示,或写成 $-\infty < x < +\infty$.

这里应注意,“ $+\infty$ ”和“ $-\infty$ ”只是记号,不是数,分别读作“正无穷大”和