



新世纪高等学校研究生教材



北京市高等教育精品教材

数学学科硕士研究生基础课程系列教材

北京师范大学数学科学学院 组编

丁 勇 编著

现代分析基础

XIANDAI FENXI JICHU



北京师范大学出版集团

BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP

北京师范大学出版社

0171/6

2008



新世纪高等学校研究生教材



北京市高等教育精品教材
数学学科硕士研究生基础课程系列教材

现代分析基础

北京师范大学数学科学学院 组编

丁 勇 编著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

现代分析基础/丁勇编著. - 北京:
北京师范大学出版社, 2008.1
(新世纪高等学校研究生教材. 北京市高等教育精品教材)
ISBN 978-7-303-09082-2

I. 现… II. 丁… III. 分析(数学)-基础理论-研究生-教材 IV. 0171
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 205843 号

出版发行: 北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码: 100875

印 刷: 涿州市星河印刷有限公司
经 销: 全国新华书店
开 本: 170 mm × 230 mm
印 张: 15.25
字 数: 260 千字
印 数: 1~3 000
版 次: 2008 年 1 月第 1 版
印 次: 2008 年 1 月第 1 次印刷
定 价: 23.00 元

责任编辑: 岳昌庆 装帧设计: 高霞
责任校对: 李 菡 责任印制: 马鸿麟

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话: 010-58800697

北京读者服务部电话: 010-58808104

外埠邮购电话: 010-58808083

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话: 010-58800825

前 言

研究生教材建设是研究生培养工作的重要环节,是研究生教学改革措施之一,也是衡量学校研究生教学水平和特色的重要依据.纵观我院的研究生教育,可分为几个阶段:1954~1960年是我院研究生教育初创时期,招生为代数、分析、几何等方向的10个研究生班;1962~1965年改为招收少量的硕士研究生;1966~1976年“文化大革命”时期,研究生停止招生.1978年,我院恢复招收硕士研究生,研究生所学课程除外语和自然辩证法公共课程外,主要学习几门专业课.每年导师根据招生情况,分别制定每个研究生的培养计划.从1982年开始,首次开展制定攻读硕士学位研究生培养方案的工作.为拓宽研究生的知识面,对每届研究生开设5门专业基础理论课:泛函分析、抽象代数、实分析、复分析、微分流形,每人至少选3门;从1983年起,增加代数拓扑,共6门基础理论课,安排有经验的教师讲课且相对固定,考试要求严格,使研究生受到正规的训练.由于不同院校开设的本科生课程有一定的差距,经过这个阶段的学习后,基本上达到了一个相同的水平,为从本科生到研究生基础水平过渡提供了保障.在1992年修订教学计划时,增加了概率论基础和计算机基础.这样,基础理论课共开设8门.从1997学年开始,规定研究生每人至少选4门.从2000年开始,改为开设12门基础课,增加应用分析基础、偏微分方程、李群、随机过程.经过近30年系统的研究生培养工作,研究生教育正在逐步走向正规.在此期间,学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了比较丰富的培养经验,将这些经验落实并贯彻到研究生教材编写中去是大有益处的.

随着研究生的扩招,招收研究生的数量越来越大.再加上培养方案的改革,出版研究生系列教材已经提到议事日程上来.在20世纪90年代,北京师范大学出版社已经出版了几部基础课教材:泛函分析、实分析、随机过程等,但未系统策划出版系列教材.2005年5月,由北京师范大学数学科学学院李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行了沟通和协商,由北京师范大学数学科学学院组编(李仲来教授负责),准备对北京师范大学数学科学学院教师目前使用的北京师范大学出版社出版的几部教材进行修订后再版,进一步计划用几年时间,出版数学一级学科硕士研究生的基础课程系列教材.我们希望

使用这些教材的校内外专家学者和广大读者,提出宝贵的修改意见,使其不断改进和完善.

本套教材可供高等院校数学一级学科硕士研究生和课程与教学论(数学)硕士研究生使用和参考.

北京师范大学数学科学学院
2006-01-18

编者的话

“应用分析基础”是北京师范大学数学科学学院 2000 年硕士研究生培养方案中列入的学位基础课程之一. 在 2007 年 6 月由北师大研究生院组织的研究生培养方案的修订工作中, 根据一些专家教授的建议, 在原“应用分析基础”课程的内容中补充 20 世纪 70 年代以来在分析领域中取得的某些重要进展, 同时将该课程更名为“现代分析基础”, 并仍列为北师大数学学院硕士研究生的学位基础课程.

2002 年以来, 编者为北师大数学学院的四届硕士研究生讲授了该门课程. 在教学中我们曾选用了 1999 年 Wolf 数学奖得主、美国科学院院士 E. M. Stein 和美国著名数学家 G. Weiss 的名著《Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces》([51]) 作为该课程的主要参考书. 本书是在编者的“应用分析基础”讲义之上, 参考了国内外一些重要专著和文献后修改补充编写而成的.

全书共分六章. 第一章中介绍的知识在现代分析中是最基本且十分重要的, 它们的应用也始终贯穿于全书之中. 第二章主要介绍 Fourier 变换的经典理论. Fourier 变换是现代分析中最重要的工具之一, 已广泛应用于偏微分方程、调和和分析、复分析、概率论、小波分析及数值分析等众多研究领域. 第三章介绍速降函数空间 $\mathcal{S}$ 及其对偶空间 $\mathcal{S}'$ (缓增广义函数类). 运用缓增广义函数理论, 可十分有效地拓广经典的 Fourier 变换理论, 从而使得广义函数在现代分析, 特别是推动偏微分方程和调和和分析理论的发展中发挥了极重要的作用. 第四章介绍 $\mathbb{R}^n$ 上调和函数的一般理论. 它来源于复分析并且密切联系着偏微分方程和调和和分析理论, 同时在概率论中亦有重要的应用. 在这一章我们还讨论了 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的上半空间 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上调和函数的径向和非切向边界值问题, 介绍了球面调和函数的基本内容和一些重要性质. 第五章介绍 Calderón-Zygmund 奇异积分算子的基本知识. Calderón-Zygmund 奇异积分算子自 20 世纪 50 年代初创立以来便在现代调和和分析中始终居于中心位置. 它一方面来源于 Cauchy 型积分理论, 另一方面来源于偏微分方程理论. 半个多世纪以来, 奇异积分算子理论已发展成为丰富而系统的理论体系. 1992 年 Wolf 数学奖和 2006 年 Abel 奖得主、国际数学家联盟前主席、瑞典皇家科学院院士 L. Carleson 说: Harmonic analysis has a position in mathematics comparable to that of the theory of the atom in physics. (调和和分析在数学中的地位可与原子理论在物理学中的地位相比.) (见 Notices of AMS, 48 (2001), p. 482.) 而调和和分析理论和方法也正是通过奇异积分及其相关算子

(如:极大算子、振荡积分、分数次积分、Littlewood-Paley 算子、交换子等)在 Lebesgue 空间等各类函数空间中的性质而在偏微分方程、复分析、小波分析等研究领域发挥着重要作用. 在最后一章我们介绍了小波分析中的部分内容. 二十多年来, 小波分析在理论和应用方面均得以迅速发展, 现已被广泛应用于数值分析、信号处理、图像处理、语音识别、地震和石油勘探等领域. 在这一章我们仅介绍小波分析中最基本的理论和知识, 如基本小波, 小波变换, 小波框架, 多尺度分析, 正交小波等, 同时也可看到前面的知识在小波分析中的运用.

本书在内容选取中注重现代分析中基本思想、基本理论和基本方法的讲解, 同时也注意介绍某些研究前沿问题和最新研究进展. 根据本人以往教学和科研的体会, 我们在本书中给出了若干注记. 它们或对有关结论作进一步阐明、或指出运用结论中应注意的问题、或给出与结论相关联的背景知识和最新研究进展、或提出某些目前尚未解决的重要问题等. 目录中带 * 号的内容供有兴趣的读者阅读. 凡已具备“实变函数”“复变函数”及“泛函分析”等课程知识的读者, 学习本课程应当没有问题.

本课程是北京师范大学研究生院 2005~2006 年建设的硕士研究生精品课程之一. 本书是北京师范大学数学科学学院 2005~2008 年建设的硕士研究生基础课程系列教材之一. 最近本书也被北京市教委列为 2007 年北京市高等教育精品教材建设立项项目. 编者非常感谢北京师范大学研究生院和数学科学学院在本课程讲授和本书编写过程中所给予的支持. 北京师范大学陆善镇教授对本书的编写思想提出了十分重要的指导性意见, 美国 Auburn 大学韩永生教授与编者就书中某些内容有过深入的讨论, 北京大学刘和平教授给出了很好的建议, 编者在此向他们表示最诚挚的谢意. 此外, 编者也十分感谢北京师范大学出版社为本书的编辑出版所做的大量工作.

限于本人学识水平, 本书中难免存在错误和不妥之处, 恳请专家和读者不吝赐教指正.

编者 (dingy@bnu.edu.cn)

2007 年 12 月

本书中主要函数空间的定义和相关记号

$\mathbb{R}^n$ 记 n 维欧氏空间. 对 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ 记 x 与 y 的内积, $|x| = (x \cdot x)^{1/2}$ 记 x 的模. 对于 $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{R}^n)$ 记 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 空间, 其定义为:

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad 1 \leq p < \infty$$

及

$$L^\infty(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f\|_\infty = \inf_{\substack{|E|=0 \\ E \subset \mathbb{R}^n}} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus E} |f(x)| \right) < \infty \right\},$$

其中 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为 Lebesgue 可测集 (以下简称可测集), $|E|$ 记 E 的 Lebesgue 测度. $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p < \infty$) 表示在 $\mathbb{R}^n$ 的任何紧集上 p 次可积函数的全体, 称 $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中的 f 为 p 次局部可积函数.

对 $1 \leq p \leq \infty$, 数 p' 记 p 的共轭指数, 即满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

下面给出连续函数空间及其子空间的定义. $\mathbb{R}^n$ 上连续函数的全体记为 $C(\mathbb{R}^n)$.

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \{ f : f \in C(\mathbb{R}^n) \text{ 且 } \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0 \}.$$

记 $\mathbb{Z}_+$ 为全体非负整数. $\mathbb{Z}_+^n = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \cdots \times \mathbb{Z}_+$ 为 n 个 $\mathbb{Z}_+$ 的直积. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ 称为多重指标. $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ 称为 α 的阶. $|\alpha|$ 阶的微分算子 D^α 定义为:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

对 $m \in \mathbb{Z}_+$, 记

$$C^m(\mathbb{R}^n) = \{ f : D^\alpha f \in C(\mathbb{R}^n), \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, |\alpha| \leq m \}.$$

简记 $C^0(\mathbb{R}^n) = C(\mathbb{R}^n)$. 称 $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$ 为 f 的支集. 如果 $\text{supp}(f)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, 则说 f 具有紧支集. 对 $m \in \mathbb{Z}_+$, 记

$$C_c^m(\mathbb{R}^n) = \{ f : f \in C^m(\mathbb{R}^n) \text{ 且具有紧支集} \}.$$

简记 $C_c^0(\mathbb{R}^n) = C_c(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数的全体. 此外, $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 表示无穷阶可微函数的全体, 而

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) = \{ f : f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ 且具有紧支集} \}.$$

目 录

第一章 基本知识	1
§1.1 卷积	1
§1.2 Hardy-Littlewood 极大函数	3
§1.2.1 极大算子 M 的弱 $(1,1)$ 型和 (p,p) 型	3
§1.2.2 算子族的点态收敛与 Lebesgue 微分定理	10
§1.2.3 算子族的收敛性在遍历理论中的应用 *	15
§1.3 恒等逼近	22
§1.3.1 恒等逼近算子的收敛	22
§1.3.2 Poisson 积分和 Gauss-Weierstrass 积分	25
§1.4 算子内插定理	31
§1.4.1 Marcinkiewicz 算子内插定理	31
§1.4.2 Riesz-Thörlin 算子内插定理	31
§1.4.3 算子内插定理的几个常用推广 *	35
习题一	36
第二章 FOURIER 变换	37
§2.1 Fourier 变换的 L^1 理论	37
§2.1.1 Fourier 变换的基本性质	37
§2.1.2 Fourier 积分的平均与 Fourier 变换的反演	42
§2.2 Fourier 变换的 L^2 理论	47
§2.2.1 Plancherel 定理	47
§2.2.2 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中 Fourier 变换的不变子空间	52
§2.3 Poisson-Stieltjes 积分和 Fourier-Stieltjes 变换	55
§2.4 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上 Fourier 变换的进一步讨论 *	59
§2.4.1 Heisenberg 不等式	59
§2.4.2 Hermite 算子和 Fourier 变换	61
习题二	65

第三章	SCHWARTZ 函数和缓增广义函数	66
§3.1	Schwartz 函数空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	66
§3.1.1	$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的基本性质	66
§3.1.2	$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换	70
§3.2	缓增广义函数空间 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	72
§3.2.1	$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的基本性质	72
§3.2.2	$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的运算	74
§3.3	与平移可交换算子的刻画	79
	习题三	87
第四章	调和函数	88
§4.1	$\mathbb{R}^n$ 上的调和函数的基本性质	88
§4.1.1	均值定理和最大值原理	88
§4.1.2	$\mathbb{R}^n$ 中球内 Dirichlet 问题的解及其应用	97
§4.2	$\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上调和函数的边界值	103
§4.2.1	边值为 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 函数的调和函数特征	103
§4.2.2	调和函数的非切向极限	108
§4.3	球面调和函数	115
§4.3.1	球面调和函数的性质	115
§4.3.2	k 阶带调和函数	120
§4.3.3	Laplace-Beltrami 算子的谱 *	127
§4.4	$L^2(\mathbb{R}^n)$ 中 Fourier 变换的不变子空间 *	129
	习题四	139
第五章	奇异积分算子	140
§5.1	Hilbert 变换	140
§5.1.1	$\mathbb{R}$ 上 Cauchy 型积分的边界值	140
§5.1.2	Hilbert 变换的 L^2 理论	143
§5.1.3	Calderón-Zygmund 分解	147
§5.1.4	Hilbert 变换的 L^p 理论	149
§5.2	Riesz 变换	156
§5.2.1	Riesz 变换的 L^2 理论	156

§5.2.2 旋转方法和 Riesz 变换的 L^p 理论	161
§5.2.3 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上共轭调和函数系的 Riesz 变换特征	165
§5.2.4 $\mathbb{R}^n$ 上的实 Hardy 空间及 BMO 空间介绍 *	168
§5.3 Calderón-Zygmund 奇异积分算子	169
§5.3.1 奇异积分算子的 L^2 有界性的特征	171
§5.3.2 经典 Calderón-Zygmund 奇异积分算子	175
§5.3.3 齐型核奇异积分算子及其极大算子	183
§5.3.4 具非光滑核的奇异积分算子的 L^p 有界性 *	190
习题五	193
第六章 小波分析初步	194
§6.1 基本小波与小波变换	194
§6.1.1 基本小波	194
§6.1.2 连续小波变换	195
§6.1.3 离散小波变换及小波框架	198
§6.2 Haar 小波的展开与收敛	201
§6.2.1 Haar 函数系和 Haar 级数	202
§6.2.2 二进投影算子族和 Haar 级数的收敛	203
§6.3 多尺度分析与正交小波	206
§6.3.1 正交系和 Riesz 系	206
§6.3.2 多尺度分析和尺度函数	211
§6.3.3 多尺度分析生成的正交小波	215
§6.3.4 正交小波的例子	221
参考文献	225
索 引	228

第一章 基本知识

§1.1 卷积

定义 1.1.1 设 f, g 为 $\mathbb{R}^n$ 上的两个可测函数, 如果对 a.e.¹ $x \in \mathbb{R}^n$, 积分

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt$$

存在, 那么称其为 f 与 g 的卷积, 记为 $f * g$. 即

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

由卷积的定义立即可得到下面的

命题 1.1.1 对于任意的 $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 卷积运算满足以下性质:

- (a) $f * g = g * f$; (可交换性)
- (b) $(f * g) * h = f * (g * h)$; (可结合性)
- (c) $(\alpha f + \beta g) * h = \alpha(f * h) + \beta(g * h)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$; (线性)
- (d) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. (连续性)

证明 略.

[注 1.1.1] 命题 1.1.1 表明, 如视卷积为 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上的乘法运算, 那么 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的交换 Banach 代数 (加法为通常的函数加法).

命题 1.1.1(d) 是下面结论的特殊情形.

定理 1.1.2 (Young 不等式) 设 $1 \leq p, q, r \leq \infty$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. 若 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 及 $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, 则 $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (1.1.1)$$

证明 首先设 $1 \leq q < \infty$. 注意到

$$\frac{1}{q'} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{r} = 1, \quad \frac{p}{r} + \frac{p}{p'} = 1, \quad \frac{q}{r} + \frac{q}{p'} = 1.$$

¹本书中 “a.e.” 表示几乎处处 (almost everywhere) 或 (对于) 几乎每个 (for almost every).

对 q', r, p' 应用 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p/q'} (|f(y)|^{p/r} |g(x-y)|^{q/r}) |g(x-y)|^{q/p'} dy \\ &\leq \|f\|_p^{p/q'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p |g(x-y)|^q dy \right)^{1/r} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q dy \right)^{1/p'} \\ &= \|f\|_p^{p/q'} \|g\|_q^{q/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p |g(x-y)|^q dy \right)^{1/r}. \end{aligned}$$

由上式并应用 Fubini 定理

$$\begin{aligned} \|f * g\|_r &\leq \|f\|_p^{p/q'} \|g\|_q^{q/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p |g(x-y)|^q dx dy \right)^{1/r} \\ &= \|f\|_p^{p/q'} \|g\|_q^{q/p'} \|f\|_p^{p/r} \|g\|_q^{q/r} \\ &= \|f\|_p \|g\|_q. \end{aligned}$$

如 $q = \infty$, 则必有 $p = 1$ 且 $r = \infty$, 此时 (1.1.1) 显然成立. $\square$

[注 1.1.2] Young 不等式表明, 如 p, q, r 满足定理 1.1.2 中的关系, 那么对取定的 $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, 卷积是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^r(\mathbb{R}^n)$ 的有界线性算子.

例 1.1.1 记 $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, χ_I 为 I 的特征函数.² 那么容易验证,

$$(\chi_I * \chi_I)(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1], \\ 2 - x, & x \in (1, 2], \\ 0, & x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

上面的例子启示我们, 通过卷积运算可以改善函数的连续性.

命题 1.1.3 卷积运算满足以下性质:

(a) 设 $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. 那么 $f * g$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续的有界函数;

(b) $\text{supp}(f * g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$;

(c) 设 $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. 那么 $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$;

(d) 设 $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $g \in C_c^m(\mathbb{R}^n)$. 那么 $f * g \in C^m(\mathbb{R}^n)$, 且对 $|\alpha| \leq m$,

$$D^\alpha(f * g)(x) = (f * D^\alpha g)(x).$$

²本书中 χ_E 表示集合 E 的特征函数, 即: 如 $x \in E$, 那么 $\chi_E(x) = 1$, 否则 $\chi_E(x) = 0$.

证明 留作习题.

由命题 1.1.3 立即可得

推论 1.1.4

(a) 设 $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. 那么 $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

(b) 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $\text{supp}(f)$ 为紧集. 那么当 $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 时, $f * g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

现运用推论 1.1.4 给出局部紧 Hausdorff 空间上 Urysohn 引理在 $\mathbb{R}^n$ 上形式的直接证明.

定理 1.1.5 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集, 而 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, 且 $K \subset U$. 则存在 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq f(x) \leq 1$, 且

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in K, \\ 0, & x \notin U. \end{cases}$$

证明 记

$$\eta = \begin{cases} \inf \{|x - y| : x \in K \text{ 且 } y \notin U\}, & U \neq \mathbb{R}^n, \\ 1, & U = \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

则 $\eta > 0$. 令 $V = \bigcup_{y \in K} \{x : |x - y| < \frac{\eta}{2}\}$. 显然有 $K \subset V$ 且 $\bar{V} \subset U$. 现取 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\text{supp}(\psi) \subset \{x : |x| < \frac{\eta}{2}\}$ 且 $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 1$ (ψ 的存在性见本章习题 3). 由推论 1.1.4 知 $f = \psi * \chi_V$ 即为所求. $\square$

§1.2 Hardy-Littlewood 极大函数

§1.2.1 极大算子 M 的弱 (1,1) 型和 (p,p) 型

定义 1.2.1 设 $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. 那么 f 的中心 Hardy-Littlewood 极大函数 Mf 定义为:

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)| dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2.1)$$

这里 (及以后) $B(x,r)$ 为以 x 为中心, r 为半径的开球, 即 $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$, (简记 $B(0,r)$ 为 $B(r)$).

中心 Hardy-Littlewood 极大函数的另一个定义方式是

$$\bar{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f(t)|dt. \quad (1.2.2)$$

这里(及以后)记 $Q(x,r)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中以 x 为中心, 边长为 r , 且边与坐标轴平行的方体.

定义 1.2.2 设 $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. 那么 f 的非中心 Hardy-Littlewood 极大函数 $\tilde{M}f$ 定义为:

$$\tilde{M}f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t)|dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2.3)$$

其中上确界取自 $\mathbb{R}^n$ 中一切包含 x , 边与坐标轴平行的方体.

[注 1.2.1] 极大函数 Mf 也可以通过卷积来表现. 事实上, 如记 v_n 为 $\mathbb{R}^n$ 中单位球 $B(1)$ 的测度, 那么 $Mf(x) = \sup_{r>0} (|f| * \varphi_r)(x)$, 这里 $\varphi(t) = \frac{1}{v_n} \chi_{B(1)}(t)$, 而 $\varphi_r(t) = \frac{1}{r^n} \varphi(\frac{t}{r})$.

命题 1.2.1 (Hardy-Littlewood 极大函数定义的等价性) 设 $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 那么存在仅与 n 有关的常数 A, B , 使得对一切 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$Mf(x) \leq A\bar{M}f(x) \leq A\tilde{M}f(x) \leq BMf(x). \quad (1.2.4)$$

证明 留作习题.

由命题 1.2.1, 对于 $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 如无特别说明, 此后将统称 $Mf, \bar{M}f$ 以及 $\tilde{M}f$ 为 f 的 Hardy-Littlewood 极大函数, 并依据问题的需要可选用不同的定义方式.

命题 1.2.2 (Hardy-Littlewood 极大函数的下半连续性) $L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中任意函数 f 的 Hardy-Littlewood 极大函数 Mf 在 $\mathbb{R}^n$ 中是下半连续的.

证明 由下半连续的定义, 需要证明: 对任意的 $\lambda > 0$, 集合

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$$

为开集. 等价地, 只需说明 $E^c = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) \leq \lambda\}^3$ 为闭集. 设 $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset E^c$ 满足 $x_k \rightarrow x$ ($k \rightarrow \infty$). 由 (1.2.1), 仅需说明对任意的 $r > 0$

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|dt \leq \lambda. \quad (1.2.5)$$

³如无特别说明, 此后 E^c 总表示集合 E 关于 $\mathbb{R}^n$ 的补集.

简记 $B_k = B(x_k, r)$ 且 $f_k(t) = f(t)\chi_{B(x, r) \triangle B_k}(t)$, ⁴ $k = 1, 2, \dots$. 因此对一切 k 均有,

$$|f_k(t)| \leq |f(t)| \quad \text{且} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t) = 0.$$

应用 Lebesgue 控制收敛定理

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f_k(t)| dt = 0. \quad (1.2.6)$$

另一方面

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B_k} |f(t)| dt = \frac{1}{|B_k|} \int_{B_k} |f(t)| dt \leq \lambda.$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(t)| dt &\leq \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r) \setminus B_k} |f(t)| dt \\ &\quad + \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B_k} |f(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f_k(t)| dt + \lambda. \end{aligned}$$

令 $k \rightarrow \infty$, 由 (1.2.6) 得 (1.2.5). □

定义 1.2.3 由 (1.2.1), (1.2.2) 及 (1.2.3) 所定义的, 作用于 $L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 上的算子统称为 Hardy-Littlewood 极大算子, 记为 M .

很清楚, M 是 $L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 上的次线性算子, 即对任意的 $f, g \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 及 $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$M(f+g)(x) \leq Mf(x) + Mg(x), \quad M(\lambda f)(x) = |\lambda| Mf(x). \quad (1.2.7)$$

在给出下面极大算子 M 的其他性质之前, 先介绍两个概念.

定义 1.2.4 算子 $T: L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p, q \leq \infty$, 称为 (p, q) 型算子 (或是 (p, q) 有界的), 如它满足不等式

$$\|T(f)\|_q \leq C \|f\|_p,$$

其中, 常数 C 与 f 无关. 满足上述不等式的最小常数 C 称为 T 的 (p, q) 范数, 记作 $\|T\|_{(p, q)}$.

⁴本书中 $E \triangle F$ 记集合 E 和 F 的对称差, 其定义为: $E \triangle F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$.

定义 1.2.5 设 $1 \leq p, q \leq \infty$. 那么映 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathbb{R}^n$ 上可测函数空间 $\mathcal{F}$ 的算子 T 称为弱 (p, q) 型算子 (或是弱 (p, q) 有界的), 如果

$$(i) \sup_{\alpha > 0} \alpha [|\{x \in \mathbb{R}^n : |T(f)(x)| > \alpha\}|]^{\frac{1}{q}} \leq C \|f\|_p, \quad 1 \leq q < \infty;$$

$$(ii) \|T(f)\|_q \leq C \|f\|_p, \quad q = \infty.$$

上面常数 C 与 f 无关. 把满足上述不等式的最小常数 C 叫做 T 的弱 (p, q) 范数, 并记作 $\|T\|_{w(p, q)}$. 显然, T 为弱 (p, ∞) 型算子等价于 T 为 (p, ∞) 型算子. 另外, 由不等式

$$\begin{aligned} \alpha^q [|\{x \in \mathbb{R}^n : |T(f)(x)| > \alpha\}|] &\leq \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |T(f)(x)| > \alpha\}} |T(f)(x)|^q dx \\ &\leq \|T(f)\|_q^q \end{aligned}$$

可知, (p, q) 型算子必为弱 (p, q) 型的, 且 $\|T\|_{w(p, q)} \leq \|T\|_{(p, q)}$.

命题 1.2.3 (Hardy-Littlewood 极大算子 M 的初等性质)

(a) M 是 (∞, ∞) 型算子;

(b) M 不是 $(1, 1)$ 型算子.

证明 由 M 的定义即知 (a) 成立. 现给出一个反例说明 (b). 仅考虑 $n = 1$. 取 $f = \chi_{[0, 1]} \in L^1(\mathbb{R})$, 那么对任意的 $x \geq 1$

$$Mf(x) \geq \frac{1}{2x} \int_0^{2x} |f(y)| dy = \frac{1}{2x}.$$

但 $\frac{1}{2x} \notin L^1(\mathbb{R})$. □

下面将说明 M 是弱 $(1, 1)$ 型算子. 先给出需用到的 Vitali 型覆盖引理.

引理 1.2.4 (Vitali 型覆盖引理) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 可测. 又球族 $\mathcal{B}_\Lambda := \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 覆盖了 E , 且满足 $\sup\{d(B_\lambda) : \lambda \in \Lambda\} < \infty$. 这里 $d(B_\lambda)$ 为 B_λ 的直径. 那么存在互不相交的球列 $\{B_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{B}_\Lambda$, 使得

$$|E| \leq 5^n \sum_k |B_k|. \quad (1.2.8)$$

证明 记 $\ell_0 = \sup_{\lambda \in \Lambda} \{d(B_\lambda)\}$. 取 $B_1 \in \mathcal{B}_\Lambda$, 使 $d(B_1) > \ell_0/2$. 取 $B_2 \in \mathcal{B}_\Lambda$, 使

$B_2 \cap B_1 = \emptyset$ 且

$$d(B_2) > \frac{1}{2} \sup\{d(B) : B \in \mathcal{B}_\Lambda \text{ 且 } B \cap B_1 = \emptyset\}.$$