运筹学

学习指导及题解

朱求长　朱希川　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

运筹学
学习指导及题解

朱求长 朱希川 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

运筹学学习指导及题解/朱求长,朱希川编著.—武汉:武汉大学出版社,2008.2

ISBN 978-7-307-06022-7

Ⅰ.运… Ⅱ.①朱… ②朱… Ⅲ.运筹学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 179390 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:程小宜　　版式设计:詹锦玲

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn　网址:www.wdp.com.cn)

印刷:湖北科学技术出版社黄冈印刷厂

开本:720×1000　1/16　印张:11.5　字数:205 千字　插页:1

版次:2008 年 2 月第 1 版　2008 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-06022-7/O·375　定价:16.00 元

前　言

本书是为了配合我们所写的《运筹学及其应用》一书的教学而编写的。《运筹学及其应用》于1993年由武汉大学出版社出版后不久，武汉大学商学院工商管理硕士朱希川便将该书中全部习题做出解答，并编写成册，在内部发行。那些习题解答便是本书的一部分重要内容。

本书的目的是为了帮助读者能更好地学习、理解和掌握运筹学的基本概念、基本原理和基本方法。我们按照与《运筹学及其应用》一书同样的体系，将本书分成了8章，每章的内容由基本要求、内容说明、新增例题、习题解答、新增习题及其解答五部分组成。

内容说明部分包含了我们对运筹学中某些内容的认识和理解，或是对某些内容的处理方法。它们是我们长期从事运筹学教学的一些心得体会。我们把这些看法和做法写出来，供大家讨论。不妥之处，欢迎批评指正。

这本学习指导书，不仅对学习运筹学的学生会起到加深理解、牢固掌握运筹学知识的作用，而且对从事运筹学教学的教师也可能有些帮助。本书对《运筹学及其应用》中的习题给出了详尽的解答，另外新增加了一些习题，可用作学生课外训练。

为了简单起见，本书正文中把《运筹学及其应用》一书简称为教材[1]。书中打*号部分可作为选学和选讲内容。

本书从国内外出版的运筹学书籍中选取了部分例题或习题。在此，谨向有关作者致谢。

编　者
于仰恩大学
2007年7月

目　录

第一章
线性规划模型和单纯形法

一、基本要求

下面分节给出本章基本要求.

1.1 什么是线性规划

1. 了解什么是线性规划问题和线性规划模型，明确线性规划模型的三个组成部分以及线性规划模型的特征.

2. 初步学会建立简单的线性规划模型.

3. 知道线性规划模型的一般形式和标准形式，会将一个给定的线性规划问题化为标准形.

4. 掌握线性规划问题的可行解、可行解集、最优解和最优值等基本概念.

1.2 求解线性规划问题的基本定理

1. 明确图解法的两个基本步骤，会用它求解含两个变量的线性规划问题，懂得图解法给求解一般线性规划问题提供的几何启示.

2. 了解凸集和极点两个概念.

3. 深刻理解并熟记三个重要的基本概念：基、基解和基可行解. 给出一个基以后，会求出它对应的基解，并会判断此基解是否为基可行解. 在此基础上，进一步懂得可行基、最优基的概念.

4. 理解各个基本定理的含义及其在求解线性规划问题中的重要作用，知道每个定理回答什么问题. 在此基础上，懂得单纯形法的基本思想.

1.3 单纯形法的基本步骤

1. 懂得单纯形表的制作，了解公式推导的基本思想.

2. 深刻理解单纯形表中各数的意义、表的作用，会熟练进行单纯形表的变换.

3. 会利用单纯形表判别可行基的最优性，能熟练地进行换基工作.

4. 熟练掌握单纯形法的基本步骤，能迅速、准确地应用单纯形法解题.

1.4 人工变量法

1. 掌握两阶段法的基本步骤，明确各阶段的任务和做法，了解人工变量的作用，能熟练地运用两阶段法解题.

2*. 了解当辅助问题的最优基中含有人工变量时的处理方法.

3*. 了解大 M 法.

1.5 单纯形法应用的特例

1. 了解如何从一张最优表发现有多重最优解的可能性，以及如何获得其他最优解的方法.

2. 知道退化、循环的概念.

3. 会根据辅助问题的求解结果判断何时所给问题无可行解.

4. 知道对具有无界可行解集的线性规划问题可能有最优解，也可能无最优解.

1.6* 改进单纯形法

了解改进单纯形法的基本思想和做法.

1.7* 若干定理的证明

了解定理证明的主要步骤.

二、内容说明

1. 关于LP模型

LP模型(即线性规划模型)由三部分组成，即一组决策变量、一个目标函数和一组约束条件. 下面我们稍加说明.

(1) 关于决策变量的性质. 在线性规划模型中，所有决策变量都是连续型变量，它们可以取整数，也可以取分数，还可以取无理数，而不能限定它们必须取整数值. 有些运筹学书籍中，在讲到线性规划时，一开始举例就举的是决策变量表示产品件数的例题. 这样做欠妥，因为产品件数必须是整数，与LP模型的要求不符合. 当然在线性规划例题中，不是说完全不能介绍决策变量须取整数值的例题，但是必须说明，在LP模型中，对于变量取整数值这一点是不考虑的，只是当最优解求出来以后，常通过对最优解的数值进行四舍五入的办法来取整(但必须符合约束条件). 当最优解中各变量的取值都比较大时，这种做法也大体可行，若要得到精确的整数最优解，则必须运用整数规划的方法.

(2) 关于决策变量的选取. 建立 LP 模型的第一步就是选取决策变量. 在一些简单的 LP 问题中，很容易确定决策变量的含义. 但在有些较为复杂的 LP 问题中，决策变量的选取就不是那么显而易见的事了. 如在运输问题中，问如何组织调运，才能使总运费最少? 又如在投资问题中，问如何进行投资，才能使企业在若干年后获利最大? 这时需要彻底弄清楚，究竟需要决策的具体问题是什么，然后才能根据需要决策的问题选取决策变量.

(3) 关于目标函数. 它是决策变量的线性函数，我们要求它的最大值或最小值.

(4) 关于约束条件. 约束条件分为两部分：一部分是一些线性等式或不等式，它们称为函数约束；另一部分为对于决策变量符号限制的约束.

2. 关于 LP 模型的标准形

在我们所写的教材[1]中，LP 模型的标准形或说标准形的 LP 模型有三个特征：

第一，对目标函数规定为求其最小值，即 $\min \quad z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$.

第二，要求全部函数约束均为等式，即 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

第三，要求全部决策变量非负，即 $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$.

目前在国内外出版的运筹学书籍中，在 LP 模型的标准形这个问题上尚不统一，主要的有两种形式，其差别仅在于对目标函数的要求有所不同. 有的书上规定为求 z 的最大值(相应的问题称为最大化问题)，有的书上规定为求 z 的最小值(相应的问题称为最小化问题). 在教材[1]中，我们采用的是最小化问题的形式.

从原则上说，这两种形式都是可以的，二者的求解方法并无实质性差别，且解最大化问题可以转化为解最小化问题，反之，解最小化问题亦可转化为解最大化问题.

但从教学的角度，从有利于初学者学习的角度考虑，根据我们在教学中的体会，我们觉得选取最小化问题，即以

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

作为 LP 模型的标准形较好，这种做法对后续内容的教学至少可以带来两点好处：

(1) 给两阶段法的学习带来方便. 我们知道，在两阶段法中，要构作一个辅助问题，其目标函数 f 是各个人工变量之和. 不管所规定的标准形是最大化问题还是最小化问题，对辅助问题而言，永远是求 f 的最小值，即辅助

问题总是一个最小化问题．我们将标准形规定为最小化问题，这样，辅助问题一经作出，它就是一个标准形 LP 问题了，就可以立即用所学的单纯形法求解，而不需再经过任何的转化．如果将标准形规定为最大化问题，则在辅助问题作出以后，还需将它转化为最大化问题，才能用所学方法求解，这样就比较麻烦．当然对于非常熟悉单纯形法的人来说，只要稍加变换，亦可将适用于最大化问题的单纯形法用于最小化问题．但对于初学者来说，这样做毕竟还是有些困难的，而且是很不习惯的．

标准形是最小化问题，两阶段法中的辅助问题也是最小化问题，二者一致，这样，读者在学习两阶段法时也感到很容易记住．

（2） 给对偶单纯形法带来简化．在对偶单纯形法中，当决定出基变量后，为确定入基变量，需要作一些比值，要从这些比值中选取一个最大的或最小的．

在教材[1]中，我们将标准形取为最小化问题，又以

$$\sigma_j = \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{p}_j - c_j$$

作为检验数．按此选择，将使对偶单纯形法中要作出的比值形式非常简单．

设在单纯形表中，$\bar{b}_r$ 所在的行为出基变量行，则对该行中每个取负值的系数 $\bar{a}_{rj}$，我们作比值$\frac{\sigma_j}{\bar{a}_{rj}}$．然后也是根据最小比值法则来确定入基变量：设

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant n} \left\{ \frac{\sigma_j}{\bar{a}_{rj}} \middle| \bar{a}_{rj} < 0 \right\} = \frac{\sigma_s}{\bar{a}_{rs}},$$

则 x_s 为入基变量．

由于对标准形选择之不同，以及对于检验数规定之不同，在做上述比值时，有的书上则或者要对分子加上负号，成为$\frac{-\sigma_j}{\bar{a}_{rj}}$；或者要对分母加上负号，成为$\frac{\sigma_j}{-\bar{a}_{rj}}$；或者不加负号，而用取绝对值之形式，成为$\left|\frac{\sigma_j}{\bar{a}_{rj}}\right|$；或者什么符号也不加，而采用最大比值原则，即按$\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n}\left\{\frac{\sigma_j}{\bar{a}_{rj}}\right\}$来确定入基变量．这些做法都较为麻烦，会给初学者在学习和掌握对偶单纯形法时带来一些困难．我们在教材[1]中采用的比值形式较为简单，且与普通单纯形法一样，都是使用最小比值法则．这样，读者很容易记住．

3．关于基、基解和基可行解

这是单纯形法中最重要的三个基本概念．用单纯形法解 LP 问题怎么做？首先就是要找一个基，而且要求是可行基．

我们在教材[1]中，以一个变量组或说变量集合来定义一个基，即若约

束方程组中某 m 个变量的系数列向量线性无关，则称此 m 个变量(作为一个整体)为一个基. 这样定义基，使得基变量和非基变量的引出非常自然：基中的变量叫基变量，不是基中的变量叫非基变量. 然后令全部非基变量取0，从约束方程组求得一解 $\boldsymbol{x}$，它就叫做基解，若 $\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}$，就称它为基可行解.

运筹学诞生于国外，有些名词翻译成中文时有不同名称. 基解是从英文 basic solution 翻译过来的. 有些书上将它翻译成为"基础解"或"基本解". 若只谈及 basic solution 词组，这样翻译也未尝不可，但是在介绍 basic solution 后，紧接着就要说到"basic feasible solution". 于是有些书上就将这一英文名词译成"基础可行解"或"基本可行解". 这些名称，按照中文的字面意思，就不太好理解，或不够清楚. 比如说"基本可行解"这个概念，说某解是一个基本可行解，按照中文意思，该解似乎只是"基本可行的"，还不是"完全可行的"，这显然与"basic feasible solution"的原意不符. 所以，还是将"basic solution"就译为"基解"为好. 所谓基解，简而言之，就是由基所确定的(或决定的)解. 这样，"basic feasible solution"就可以翻译成"基可行解". 从中文来看，这样翻译无不妥之处.

在目前国外出版的运筹学书籍中，关于基的定义有两种形式：一种是以一个矩阵来定义一个基，即若约束方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的某 m 阶子矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是可逆的(或说非奇异的)，则称 $\boldsymbol{B}$ 为LP问题的一个基；另一种是以一个变量组来定义一个基，如我们在教材[1]中所述. 在我国国内出版的运筹学书籍中，一般都采用第一种定义，但在一些最优化方面的书籍中，有一些作者则采用第二种定义.

从原则上说，这两种定义在数学内涵上是相互等价的，但我们在教材[1]中采用了第二种定义，这样做，我们体会它有一些好处.

比如在单纯形法中，我们是用单纯形表作为一个基本工具进行算题的. 而单纯形表是由基决定的，不同的基有不同的单纯形表. 给定一张单纯形表以后，问它是哪个基的单纯形表？当我们以变量组作为基的定义时，这个问题就非常容易回答，因为单纯形表的最左边一列就已经把基的内容清清楚楚地写出来了. 我们一眼就可直接看出，这个基是由哪些变量组成的.

当初始基不是最优基时就需要进行换基工作. 换基意味着什么？换入什么？换出什么？这些问题，当采用我们在教材[1]中基的定义时，就可以明明白白地从表中看出，读者很容易理解和掌握.

在两阶段法中，尤其在运输问题中，更可以显示出以变量组定义基的好处，此处就不多说了.

4. 关于单纯形表

单纯形表是求解线性规划问题的基本工具. 读者要彻底弄清楚单纯形表的制作方法，表的特征，表中各数的含义，表的变换和表的应用. 在国内外出版的运筹学书籍中，特别是有关中文书籍中，单纯形表的形式各式各样，很不一致. 有些比较烦琐，实则可以简化. 简单明了是数学语言的一大特点，也是一大优点，对表格的要求亦然.

为了了解单纯形表应取何种形式为好，我们看看单纯形表的本质是什么以及求解 LP 问题中，是如何应用单纯形表进行运算的.

单纯形法求解的问题是标准形 LP 问题. 为了使目标函数方程和约束方程在形式上完全一致，我们把目标函数方程的右端移到左端，且暂不考虑非负条件，于是我们得到由目标函数方程和全部约束方程组成的一个方程组：

$$\begin{cases} z - c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n = 0, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.1}$$

给定了一个基 β 以后，我们想求出 β 所对应的基解. 为此，对方程组(1.1) 进行一系列的等价变形，使它最后变成能很好满足我们求解需要的一种“特殊形式”，我们把它叫做方程组(1.2) (没有写出). 它有两个特征：

(1) 在约束方程组中，每个基变量的系数列向量都是单位列向量.

(2) 在目标函数方程中，全部基变量的系数都为 0.

与方程组(1.1) 等价的，却具有特殊形式的方程组(1.2) 对我们求解 LP 问题十分有用. 由该方程组立刻可知，基 β 所确定的基解是什么，这个基是不是可行基. 如果是可行基，进一步还要问它是不是最优基.

正因为如此，为了使运算简单，方便，明了，我们就把方程组(1.2) 的增广矩阵制成一张表格的形式，这就是单纯形表的核心内容. 又为了更加清楚起见，在上述增广矩阵的上边和左边分别加上一行和一列，作些说明，这样，就得到了一张完整的单纯形表.

因为单纯形表与方程组(1.2) 所包含的实质内容完全是一样的，而方程组(1.2) 又是由方程组(1.1) 经过一些等价变形得来的，所以就按照方程组(1.1) 原有的上下左右顺序来制作单纯形表是最好的. 这样做显得很自然，对单纯形表也就觉得容易理解，容易记忆，容易运用.

按照我们在教材[1] 中采用的单纯形表的形式，在用手算 LP 问题时，计算工作显得非常方便，可以一张表接一张表地进行，而且第二张表比第一张

表更简单，这样使求解 LP 问题的整个计算变得简单方便，容易进行.

在有些书的单纯形表中，把目标函数中的全部变量的系数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 都写上，同时又把其中全部基变量的系数再单独写一列，这样做的目的可能是为了算检验数. 实际上，在具体算题时，若从所给问题的约束方程组中很容易找到一个初始可行基，则或可直接写出检验数，或可对目标函数方程经过简单变换而得到检验数；当所给问题比较复杂，一下找不到初始可行基时，则用两阶段法去得到一个初始可行基，再经过简单变换就可得到所给问题的一张初始单纯形表了(也就求得了检验数). 所以目标函数中的各个系数，没有必要写在单纯形表中.

至于有些书中的单纯形表还要复杂，有些单纯形表中没有目标函数值等，这些问题在此处就不多说了.

5. 关于最小比值的确定

在单纯形法中，为确定出基变量，需要用到最小比值法则. 设 x_s 为入基变量，令

$$\theta = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \middle| \bar{a}_{is} > 0 \right\}.$$

必须注意，作比值时，只对入基变量列中那些为正数的 $\bar{a}_{is}$ 作比值，对取 0 值或取负数的 $\bar{a}_{is}$ 则不作比值. 当某个 $\bar{a}_{is} = 0$ 时，就不作比值 $\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}}$，这一点，学生容易记住，因为他们知道，分母不能为 0. 但当某个 $\bar{a}_{is} < 0$ 时，常有学生还是照样作比值，从而犯错误. 例如，若某张单纯形表如表 1.1 所示. 因为 $\sigma_3 = 4 > 0$，故要换基. 显然入基变量是 x_3. 为决定出基变量，有的学生就做出三个比值：

$$\left\{ \frac{15}{3}, \frac{2}{-1}, \frac{8}{2} \right\} = \{5, -2, 4\},$$

然后从中选取最小比值即 -2，于是就认为 x_1 为出基变量. 实际上这一做法是错误的. 此题中，只能作两个比值，即 15/3, 8/2，其中最小者为 4，故 x_5 为出基变量.

表 1.1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端	比值
z			4	-1		10	
x_2		1	3	5		15	
x_1	1		-1	6		2	
x_5			2	7	1	8	

6. 关于两阶段法

要切实明确每个阶段的做法和任务. 用两阶段法解题时，首先必须把所给问题化为标准形，然后再做辅助问题. 有些学生常将此二者混淆. 必须注意，在标准形中，只能有松弛变量，不能有人工变量，且要求每个约束方程的右端 $\geqslant 0$. 做辅助问题时，要尽量少加人工变量，以减少复杂性和计算量. 实践证明，辅助问题越复杂(哪怕只是多引入一个人工变量)，计算出错的可能性就越大.

在第一阶段中，有些学生常常出错的是在制作辅助问题的初始单纯形表上. 具体说来，就是目标函数行中的数常常写错. 实际上，该行各数很容易得到：除基变量的检验数全部为 0 外，其余各数则是由包含人工变量的行之各系数对应相加. 注意，右端列中各数亦须按此法对应相加. 有的学生在练习或考试中，等式左边各数加对了，但却忘记将右端各数相加，因而将题目做错了.

在第二阶段中，要特别注意从辅助问题的最优表出发，去获得一张原题目的初始表. 有的学生只记得将 f- 行换成 z- 行，并将 z 中各系数反号. 他们以为，这就是一张单纯形表了. 实则不一定，还须检查 z- 行中基变量的系数是否为 0. 如不是 0，须将它们化为 0，才能得到一张标准的单纯形表，然后才可开始后续计算.

三、新增例题

例 1 用图解法求解下述问题：

$$
\begin{aligned}
\min\quad & z = x_1 - 3x_2, \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 - 4x_2 \leqslant 5, & ① \\
& -2x_1 + x_2 \leqslant 2, & ② \\
& x_1 + x_2 \leqslant 5, & ③ \\
& x_1, x_2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

解 此题的图解结果如图 1.1 所示. 图中直线 ① 的方程系将不等式 ① 中的"$\leqslant$"改为"$=$"得来. 直线 ② 和 ③ 也是如此. 可行解集 S 为图中的多边形 $OABCD$.

将目标函数方程改写为

$$x_2 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}z,$$

作出让 $z=0$ 和 $z=1$ 的两条目标函数等值线，就会看到：当 z 的数值越来越大时，等值线往下移；而当 z 的取值越来越小时，等值线往上移. 现在我们是要求 $\min z$，故容易知道点 C 为最优解. 点 C 为直线 ② 和 ③ 的交点，故有

$$x_1^*=1,\quad x_2^*=4;\quad z^*=-11.$$

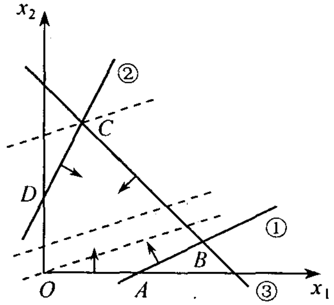

图 1.1

例 2　找出下述问题的一个可行基 β，并作出 β 的单纯形表：

$$\begin{aligned}
\min\quad & z=-x_1+3x_2+2x_4, \\
\text{s.t.}\quad & 5x_2+x_3+x_4+2x_6=6, && ① \\
& -x_1+2x_2+2x_3-3x_6=0, && ② \\
& 9x_2+6x_3+3x_5+6x_6=12, && ③ \\
& x_1,x_2,\cdots,x_6\geqslant 0.
\end{aligned}$$

解　从约束方程组可见，x_4, x_1, x_5 这三个变量中的每一个变量都只是在某一个方程中出现，故可选它们为基变量. x_4 的系数列向量已是单位列向量，故方程 ① 不需作任何改变. 将方程 ② 的两边同时乘以 -1，将方程 ③ 的两边同除以 3，便可将 x_1 和 x_5 的系数列向量也变为单位列向量. 由此可选 $\beta_0=\{x_4,x_1,x_5\}$，并得表 1.2 之（Ⅰ）. 它还不是标准的单纯形表，因为 z- 行中基变量 x_1 和 x_4 的系数不为 0. 将 x_4- 行的 2 倍和 x_1- 行的 -1 倍加到 z- 行，这样可得表 1.2 之（Ⅱ），它已是单纯形表，而且由表可知，$\beta_0=\{x_4,x_1,x_5\}$ 是一个可行基.

表 1.2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	右端
（Ⅰ）	z	1	-3		-2			
	x_4		5	1	1		2	6
	x_1	1	-2	-2			3	0
	x_5		3	2		1	2	4
（Ⅱ）	z		9	4			1	12
	x_4		5	1	1		2	6
	x_1	1	-2	-2			3	0
	x_5		3	2		1	2	4

例 3 考虑下述问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = -x_1 + 4x_2, \\ \text{s.t.} \quad & -3x_1 + x_2 \leqslant 6, && ① \\ & x_1 + 2x_2 \leqslant 4, && ② \\ & x_2 \geqslant -3, && ③ \\ & x_1 \text{ 无符号约束}. \end{aligned}$$

(1) 用图解法解此题.

(2) 改写这一问题，使它只有两个函数约束.

(3) 用单纯形法解此题.

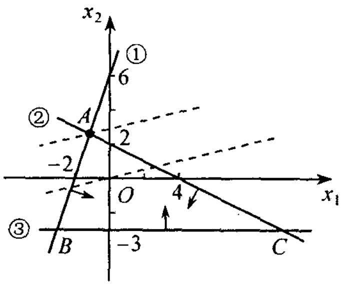

图 1.2

解 (1) 用图解法解此题的结果如图 1.2 所示，可行解集为 $\triangle ABC$. 最优解在 A 点处. 该点为两直线

$$-3x_1 + x_2 = 6,$$
$$x_1 + 2x_2 = 4$$

的交点. 解此方程组，得

$$x_1^* = -\frac{8}{7}, \quad x_2^* = \frac{18}{7};$$

最优值为 $z^* = \dfrac{80}{7}$.

(2) 令 $x_2' = x_2 + 3$，则 $x_2' \geqslant 0$，又令 $x_1 = x_1' - x_1''$，此处 $x_1', x_1'' \geqslant 0$，于是所给问题变为下面形式:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = -x_1' + x_1'' + 4x_2' - 12, \\ \text{s.t.} \quad & -3x_1' + 3x_1'' + x_2' - 3 \leqslant 6, \\ & x_1' - x_1'' + 2x_2' - 6 \leqslant 4, \\ & x_1' \geqslant 0,\ x_1'' \geqslant 0,\ x_2' \geqslant 0. \end{aligned}$$

整理后得

$$\begin{aligned} \max \quad & z = -x_1' + x_1'' + 4x_2' - 12, \\ \text{s.t.} \quad & -3x_1' + 3x_1'' + x_2' \leqslant 9, \\ & x_1' - x_1'' + 2x_2' \leqslant 10, \\ & x_1' \geqslant 0,\ x_1'' \geqslant 0,\ x_2' \geqslant 0. \end{aligned}$$

(3) 令 $z_1 = -z$，并在两个函数约束中分别引入松弛变量 x_3 和 x_4，将上述问题化为标准形，然后用单纯形法求解. 求解过程如表 1.3 所示.

表 1.3

	x_1'	x_1''	x_2'	x_3	x_4	右端	比值
z_1	-1	1	4			12	
x_3	-3	3	1	1		9	9
x_4	1	-1	②		1	10	5
z_1	-3	3			-2	-8	
x_3	$-7/2$	7/2		1	$-1/2$	4	8/7
x_2'	1/2	$-1/2$	1		1/2	5	—
z_1				$-6/7$	$-11/7$	$-80/7$	
x_1''	-1	1		2/7	$-1/7$	8/7	
x_2'			1	1/7	3/7	39/7	

由表 1.3 可得

$$x_1^* = 0 - \frac{8}{7} = -\frac{8}{7}, \quad x_2^* = \frac{39}{7} - 3 = \frac{18}{7};$$

$$z^* = \frac{8}{7} + 4 \times \frac{18}{7} = \frac{80}{7}.$$

例 4　用单纯形法解下述 LP 问题：

$$\begin{aligned} \max\quad & z = 5x_1 + 2x_2, \\ \text{s.t.}\quad & 2x_1 + x_2 \leqslant 7, \\ & -x_1 + x_2 \leqslant 15, \\ & 3x_1 + x_2 \leqslant 9, \\ & x_1, x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

解　令 $z_1 = -z$，并分别引入松弛变量 x_3, x_4 和 x_5，将所给问题化为标准形. 求解过程如表 1.4 所示.

表 1.4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端	比值
z_1	5	2					
x_3	2	1	1			7	7/2
x_4	-1	1		1		15	—
x_5	③	1			1	9	3