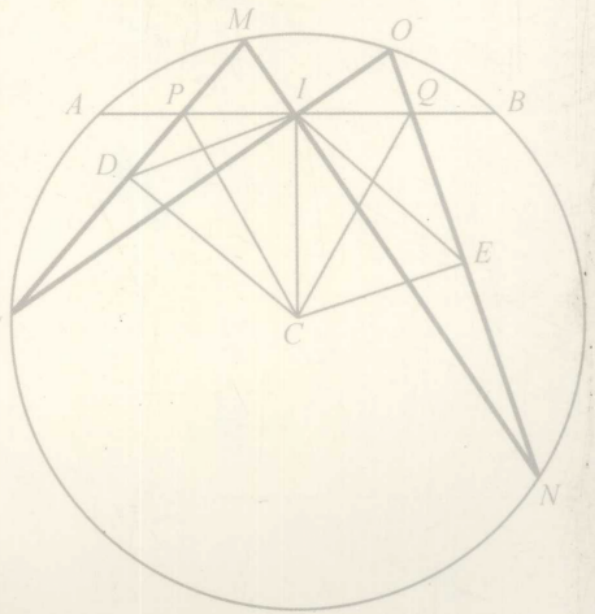
平面几何
证明方法全书习题解答

沈文选 编著



哈尔滨工业大学出版社

PING MIAN JI HE ZHENG MING FANG FA QUAN SHU XI TI JIE DA

PING MIAN JI HE ZHENG MING FANG FA QUAN SHU XI TI JIE DA

平面几何

证明方法全书习题解答

沈文选　编著
哈尔滨工业大学附属中学数学奥林匹克中心

哈尔滨工业大学出版社

内容简介

本书共分两部分。第一部分为《平面几何证明方法全书》每章后习题的参考答案;第二部分精选了近年来国内外竞赛中的几何试题,通过对真题的实战训练,可激发兴趣、启迪思维,提高参赛者的实战能力。

图书在版编目(CIP)数据

平面几何证明方法全书习题解答/沈文选编著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2005.8

ISBN 7-5603-2216-6

Ⅰ.平... Ⅱ.沈... Ⅲ.平面几何-中学-解题 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 093619 号

出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787×960　1/16　印张 19.25　字数 335 千字
版　　次 2005 年 10 月第 1 版　2005 年 10 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 7-5603-2216-6/O·190
印　　数 1~4 000
定　　价 25.00 元

前 言

谁看不起欧氏几何，谁就好比是从国外回来看不起自己的家乡。

——H. G. 费德

平面几何，在数学里占有举足轻重的地位。在历史上，《几何原本》的问世奠定了数学科学的基础，平面几何中提出的问题，诱发出了一个又一个重要的数学概念和有力的数学方法；在现代，计算机科学的迅猛发展，几何定理机器证明的突破性进展，以及现代脑心理学的重大研究成果——“人脑左右半球功能上的区别”获诺贝尔奖，使得几何学研究又趋于复兴活跃。几何学的方法和代数的、分析的、组合的方法相辅相成，扩展着人类对数与形的认识。

几何，不仅仅是对我们所生活的空间进行了解、描述或解释的一种工具，而且是我们为认识绝对真理而进行的直观可视性教育的合适学科，是训练思维、开发智力不可缺少的学习内容。青少年中的数学爱好者，大多数首先是平面几何爱好者。平面几何对他们来说，同时提供了生动直观的图像和严谨的逻辑结构，这有利于发掘青少年的大脑左右两个半球的潜力，促使学习效率增强，智力发展完善，为今后从事各类创造活动打下坚实的基础，其他学科内容是无法替代的。正因为如此，在数学智力竞赛中，在数学奥林匹克中，平面几何内容占据着十分显著的位置。平面几何试题以优美和精巧的构思吸引着广大数学爱好者，以丰富的知识、技巧、思想给我们的研究留下思考和开拓的广阔余地。

如果我们把数学比做巍峨的宫殿，那么平面几何恰似这宫殿门前的五彩缤纷的花坛，它吸引着人们更多地去了解数学科学，研究数学科学。

数学难学，平面几何难学，这也是很多人感受到了的问题，这里面有客观因素，也有主观因素，有认识问题，也有方法问题。学习不得法也许是其中的一个重要的根源。要学好平面几何，就要学会求解平面几何问题。如果把求解平面几何问题比做打仗，那么解题者的“兵力”就是平面几何基本图形的性质，解题者的“兵器”就是求解平面几何问题的基本方法，解题者的“兵法”就是求解各类典型问题的基本思路。如果说，装备精良“兵器”，懂得诸子“兵法”，部署优势“兵力”是夺取战斗胜利的根本保证，那么，掌握求解平面几何问题的基本方法，熟悉各类典型问题的基本思路，善用基本图形的性质，就是解决平面几何问题的基础。

基于上述考虑，我将积累多年的研究成果及陆续发表在各级报刊杂志上的文章进行删增、整理、汇编，并参阅了近几年各类报刊杂志上关于平面几何解题

研究的文章，著成了这套《平面几何证明方法全书》及《平面几何证明方法全书习题解答》。

《平面几何证明方法全书习题解答》的第一部分为《平面几何证明方法全书》每章后共几百道习题的参考解答或提示，可帮助您在求解问题的过程中理清思路，仅有几句话的提示也希望能够起到画龙点睛的作用；第二部分精选了近年来国内外竞赛中的平面几何试题，通过对竞赛真题的实战演练，想必会令参加竞赛的学生大有收益。

限于作者的水平，书中的疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正。

沈文选

2005年10月于长沙

目　　录

第一部分　习题解答

第一部分

习题解答

（《平面几何证明方法全书》习题解答）

练习题参考解答或提示

练习题 1.1

1. 要证$\angle EBC > \angle ECB$,只需证$EC > BE$,又只需证$\angle EDC > \angle EDB$,又只需证$AC > AB$,而$\angle B > \angle C$.

2. 设MN交AC于O,延长QN交DC的延长线于R.要证$\angle QNM = \angle MNP$,而$\angle PNM = \angle NPR$,$\angle QNM = \angle NRP$,只需证$\angle NPR = \angle NRP$,又只需证$PC = CR$(因$NC \perp PR$),而$PC = 2OM = 2ON = RC$,即证.

3. 要证$BF : DF = AD : AE$,由已知$DE \parallel BC$,可得$\angle FDC = \angle CDE = \angle DCF$,即有$DF = CF$,只需证得$BF : CF = AD : AE$即可.但$AD : AE = AB : AC$,只需证$BF : CF = AB : AC$即可.连$AF$,只需证$AF$平分$\angle BAC$,又只需证$\triangle ADF \cong \triangle ACF$即可.

4. 要证$\angle DAE = \frac{1}{2}\angle BAF$,只要过$A$作$\angle BAF$的平分线$AH$交$DC$的延长线于$H$,只需证$\angle DAE = \angle BAH$,只需证$\triangle ABG \cong \triangle ADE$($G$为$AH$与$BC$的交点),又只需证$BG = DE$,又只需证$G$为$BC$中点,只需证$\triangle ABG \cong \triangle HCG$即可,又只需证$AB = CH$.设$CH = a$,只需证$FH = \frac{5}{4}a$即可,而$FH = AF$,只需证$AF = \frac{5}{4}a$即可.

5. 延长AC到F,使$CF = CE$,连BF,要证$BG = GH$,而$DH \parallel GG$,只需证$BF \parallel GC$即可.而$AE \perp CG$,只需证$AE \perp BF$即可.而$BC \perp AF$,$\angle BAF = 45° = \angle AFE$,即$FE \perp AB$,又$E$为$\triangle ABF$的垂心,即有$AE \perp BF$.

6. 设AC,BD交于O.A,C,E,F在以O为圆心,OC为半径的圆上,取EF的中点M,则$OM \perp EF$.要证$\angle ACP = 90°$,只需证D,M,C,P四点共圆,又只需证$\angle MCO = \angle OPM$.过E作BD的平行线交AC于G,交AF于H,只需证

$\angle GEM = \angle MCO$,即证 M,C,G,E 四点共圆.又 G 是 EH 中点,有 $GM \parallel AF$,$\angle CGM = \angle CAF$,又由 E,C,F,A 共圆有 $\angle CAF = \angle FEC$,则 M,C,E,G 四点共圆.

7. 在 AC 上取一点 E,即要证 $AD^2 + AB \cdot CD = AC(AE + EC) = AC \cdot AE + AC \cdot EC$,只需证 $AB : AC = EC : CD$ 且 $AD : AC = AE : AD$.要证前一式只需证 $\triangle ABC \backsim \triangle CED$,故应在 AC 上取点 E 且满足 $\angle CED = \angle ABC$;要证后一式需证 $\triangle ADC \backsim \triangle AED$.这由 $\angle CED + \angle AED = \angle BAD + \angle ADC = 180°$ 且 $\angle CED = \angle ABC = \angle BAD$,即 $\angle ADC = \angle AED$ 即可证.

8. 若 $EF \parallel AB$,则 $\angle BAE = \angle E$.但 $\angle E = \angle D$,则 $\angle BAE = \angle D$.由 $\angle AMC = \angle DMA$,有 $\triangle AMC \backsim \triangle DMA$.所以 $AM : MC = MD : AM$.即 $AM^2 = MC \cdot MD$.而 AB 切圆 O 于 B 且 $AM = MB$,故有 $AM^2 = MB^2 = MC \cdot MD$.上述步骤均可逆,即证.

9. 作 $AG \perp AB$ 与 BF 延长线交于 G.要证 $\angle FDA = \angle CDB$,由 $\mathrm{Rt}\triangle DBC \cong \mathrm{Rt}\triangle GAB$ 知 $\angle CDB = \angle AGD$,只需证 $\angle FDA = \angle FGA$ 即可,只需证 $\triangle ADF \cong \triangle AGF$.

10. 设 I 是 $\triangle ABC$ 的内心,则 I 是 $\triangle A_0B_0C_0$ 的垂心.要证 $S_{\triangle A_0B_0C_0} = 2S_{AC_1BA_1CB_1}$,只需证 $S_{\triangle IA_0B} = 2S_{\triangle IA_1B}$,只需证 A_1 是 IA_0 的中点.由于 $\triangle IBA_0$ 是直角三角形,只需证 $A_1B = A_1I$,只需证 $\angle A_1BI = \angle A_1IB$,而 $\angle A_1BI \stackrel{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{A_1C} + \overset{\frown}{CB_1})$,$\angle A_1IB \stackrel{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{A_1B} + \overset{\frown}{B_1A})$,因而只需证 $\overset{\frown}{A_1B} = \overset{\frown}{A_1C}$,且 $\overset{\frown}{CB_1} = \overset{\frown}{B_1A}$.这是已知条件,即证.

11. 设符合条件的点 X,Y 已作出,则 X,Y 关于 AB 对称且 $YC \perp XA$.这时可连 XY 交 AB 于 K,则 XY 被 AB 垂直平分于 K,连 BX,则 $BX \parallel CY$,于是 $\triangle CKY \cong \triangle BKX$,从而 $CK = BK$,这表明 XY 是定线段 CB 的中垂线.

12. 提示:所求切点 M 的集合是与圆 S 切于点 P 和 Q 的两条直线,但需除去 P,Q 两点.其中 P,Q 是直线 l 与圆 S 的交点.

13. 设 AC,BD 交于 O,可证得 $\triangle AHE \cong \triangle CFG$.再证得 $AECG$ 为平行四边形.从而四直线共点于 O.

14. 由 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$,$\angle BPQ = \angle ABE + \angle BAP = \angle CAD + \angle BAP = \angle A = 60°$,即证.

15. 取 AP,BP 的中点 E,F,证 $\triangle DME \cong \triangle DFL$.

16. 取 BD 中点 G,证 $BCGE$ 为平行四边形或证 $\mathrm{Rt}\triangle EBF \cong \mathrm{Rt}\triangle CFG$.

17. 取 BD 中点 M，连 ME，MF，即证.

18. 由 $AB^2 = PA^2 + BP^2 + 2PA \cdot PB \cdot \cos\angle APC$ 及 $AC^2 = PA^2 + PC^2 - 2PA \cdot PC \cdot \cos\angle APC$ 分别乘以 PC，PB 相加，再代入已知条件化简得 $PB \cdot AC(AC - AB) = PC \cdot AB(AC - AB)$，由 $AC \neq AB$ 有 $AB : AC = PB : PC$，即证.

19. 设 EF 所在直线分别与 BC，AD 的延长线交于 P，Q. 连 BD，过 E 作 $EO /\!/ AD$ 交 BD 于点 O，连 OF，则 $\angle EFO = \angle FPC$，$\angle OEF = \angle FQD$，且 $\angle EFO + \angle OEF = \angle FPC + \angle FQD = \theta$. 又 $OE = \dfrac{bn}{m+n}$，$OF = \dfrac{am}{m+n}$，在 $\triangle EOF$ 中用余弦定理，即证.

20. 设 $\triangle ABC$ 垂心为 O，由 $DH /\!/ BE$，$DG /\!/ CF$ 有 $\dfrac{AE}{AH} = \dfrac{AO}{AD} = \dfrac{AF}{AG}$，则 $GH /\!/ EF$，四边形 $BCEF$ 被直线 PGH 所截，交三边 BC，CE，FB 于 P，H，G. 由本章例 16 推论(1) 得 $\dfrac{BP}{PC} \cdot \dfrac{CH}{HE} \cdot \dfrac{FG}{GB} = 1$，但 $\dfrac{EH}{CH} = \dfrac{BD}{CD}$，$\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{GB}{FG}$，由此即证.

21. 由例 16 推论(2) 有 $\dfrac{AN}{NB} = \dfrac{DM}{MC} \cdot \dfrac{EC}{EB} \cdot \dfrac{EA}{ED} = \dfrac{DM}{MC} \cdot \dfrac{EC}{ED} \cdot \dfrac{EA}{EB}$，因为 EC，ED 是圆的割线. 故 $EC \cdot EB = EA \cdot ED$，但 $DM = MC$，故 $AN : NB = EA^2 : EB^2$.

练习题 1.2

1. 用反证法,设这一双对边不平行,取一条对角线的中点 P,则 P 与已知一双对边中点三点不共线,组成一个三角形,由三角形两边之和大于第三边,再将三角形中位线性质代入,则与已知条件式矛盾.

2. 假定存在这样的四个点 A,B,C,D 满足题设.若四点 A,B,C,D 组成一个凸四边形,则其内角和为 $360°$,则至少有一内角不小于 $90°$,于是由这个不小于 $90°$ 的内角组成的三角形就不是一个锐角三角形与题设矛盾.若四点组成一个凹四边形,则必有一点在其他三点组成的三角形内,以该点为顶点的角至少有一个不小于 $120°$,这含 $120°$ 的三角形就不是一个锐角三角形.

3. 设 $PQRS$ 不是平行四边形,则对角线不能互相平分,即两对线段中至少有一对不相等.不妨设 $OP < OR, OQ \leqslant OS$.在 OR 上取 $OR' = OP$,在 OS 上取 $OS' = OQ$(S' 可能与 S 重合),连 $R'S'$,则 $R'S'$ 与 OC 的交点 C' 在线段 OC 上,

故有 $OC' < OC$,由 $\triangle PQO \cong \triangle R'S'O$, $OC' = OA$,得 $OA < OC$,这与 $ABCD$ 为平行四边形矛盾.

4. 假设 $AB \geqslant AC$,则在 $\triangle ABC$ 中,$\angle BCA > \angle ABC$,但 $\angle BCD > \angle BCA$,则 $\angle BCD > \angle ABC$.而 $\angle ABC > \angle CBD$,所以 $\angle BCD > \angle CBD$,从而 $BD > CD$,所以 $AB + BD > CD + AC$.这与已知 $AB + BD \leqslant AC + CD$ 矛盾.

5. 能选出三点的反面是找不出三点;至少有一个的反面是一个也没有;不大于 $45°$ 的反面是大于 $45°$,故本题反设应是:这四点中任三点所构成的三角形的所有内角都大于 $45°$.分两种情形考虑:1) 若四点组成凸四边形,则组成的 4 个三角形的 8 个内角都大于 $45°$ 时与四边形内角和为 $360°$ 矛盾.2) 若四点组成凹四边形,连两条对角线组成的 3 个三角形的 6 个内角都大于 $45°$ 时与三角形内角和为 $180°$ 矛盾.

6. 假设边长为 1 的凸五边形 $ABCDE$ 中 $\angle BCD$ 不是钝角.连 AC, CE,由等腰 $\triangle BCA$,等腰 $\triangle CDE$ 顶角小于 $120°$,知其底角不小于 $30°$,从而 $\angle ACE < 90° - 2 \cdot 30° = 30°$.又由余弦定理(在 $\triangle ACB$ 和 $\triangle CDE$ 中),知 $AC < \sqrt{3}$, $CE < \sqrt{3}$.在 $\triangle ACE$ 中,又由余弦定理有 $AE^2 = AC^2 + CE^2 - 2AC \cdot CE \cdot \cos\angle ACE < 3 + 3 - 2 \cdot 3 \cdot \cos 30° < 1$,即 $AE < 1$,与题设矛盾.

7. 反设在 $\triangle ABC$ 内存在一点 P,过点 P 的任意一条直线把 $\triangle ABC$ 的面积分成相等的两部分.连 AP, BP 及 CP 并分别延长交对边于 D, E 及 F,由于 AD 把

$\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分,故 D 是 BC 的中点. 同理, E,F 是 AC 及 AB 的中点,从而 P 是 $\triangle ABC$ 的重心. 过 P 作 $MN \parallel BC$,分别交 AB,AC 于 M,N,由 $AP:AD=2:3$,有 $S_{\triangle AMN}:S_{\triangle ABC}=4:9$,而依题设 $S_{\triangle AMN}:S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}$,故矛盾.

8. 假设在机场 O 降落的飞机多于6架,它们来自机场 $A_1,A_2,\cdots,A_m(m\geqslant 7)$. 由于 $\angle A_1OA_2+\angle A_2OA_3+\cdots+\angle A_{m-1}OA_m+\angle A_mOA_1=360^\circ$,而 $m\geqslant 7$,于是由抽屉原则,上式左边的 m 个角中,至少有一个角小于 60°,不妨设 $\angle A_1OA_2<60^\circ$,再由对称性可设 $OA_1\geqslant OA_2$,连 A_1A_2,则 $\angle A_2\geqslant\angle A_1$. 由于 $\angle A_1OA_2<60^\circ$,由 $\angle A_2>60^\circ$(因若 $\angle A_2\leqslant 60^\circ$,则 $\angle A_2+\angle A_1+\angle A_1OA_2<180^\circ$,矛盾),从而 $\angle A_2>\angle A_1OA_2$,则 $OA_1>A_1A_2$,这样,按规定从 A_1 起飞的飞机决不会飞到机场 O,矛盾.

9. 在 CD 上取一点 E',使 $AE'=AB=2AD$,连 BE',由于 $\triangle ADE'$ 是直角三角形,故 $\angle AE'D=30^\circ$, $\angle DAE'=60^\circ$,则 $\angle BAE'=30^\circ$. 又 $\triangle ABE'$ 是等腰三角形,故 $\angle ABE'=\angle AE'B=75^\circ$,所以 $\angle E'BC=15^\circ=\angle EBC$,故 E 与 E' 重合. $AB=AE$.

10. 取 AC 中点 E,连 AD,NE,PM,NP. 由 $AE=EC$, $DN=NC$ 有 $EN\underline{\parallel}\frac{1}{2}AD$. 同理 $PM\underline{\parallel}AD$,所以 $EN\underline{\parallel}PM$,则 $PNEM$ 是平行四边形. 连 PE,由 Q 是 MN 中点,则 PE 必过点 Q,即 P,Q,E 三点共线,故 PQ 必平分 AC.

11. 作 $\angle ABC$ 的平分线 BD' 交 AC 于 D',则 $\angle ABD'=\angle CBD'=\frac{1}{2}\angle ABC=\angle A$,则 $AD'=BD'$. 又 $\angle BD'C=\angle ABD'+\angle A=\angle CBD'+\angle ABD'=\angle C$,所以 $BD'=BC$. 于是 $AD'=BC$,又 $AD=BC$,得 $AD=AD'$,即 D' 与 D 重合,即证.

12. 作 AB 的垂直平分线 DE,并在 DE 上取一段 DE',使 $DE'=CD$,连 CE'. 由 D 为斜边 AB 的中点,有 $AD=DB=DC$. 而 $DE'=DC$,则 $AD=DB=DE'$. 连 AE',BE',则 $\angle AE'B=90^\circ$,则 A,C,B,E' 四点共圆,并作出该圆. 由 $AE'=BE'$ 有 $\overset{\frown}{AE'}=\overset{\frown}{BE'}$,有 $\angle ACE'=\angle BCE'$,即 CE' 平分 $\angle ACB$,亦即 AB 的中垂线与 $\angle ACB$ 的平分线交于 E',故 E' 与 E 重合.

13. 在下半圆 $\overset{\frown}{BC}$ 上取一点 P,使 $\overset{\frown}{CP}=\frac{1}{3}\overset{\frown}{BPC}$,则点 P 被惟一地确定下来. 延长 AN 交 BC 于 H,连 HP,因 BC 为直径,则其中点 O 为该圆圆心. 连 OP,由对

称性有$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CE}$,则$DE /\!/ BC$.又$DM=MN=NE$,故$BK=KH=HC$($K$为$AM$延长线与$BC$的交点),再由对称性,$OH=OK=\frac{1}{2}KH=\frac{1}{2}HC$,即$HC:OH=2:1$,而$OP=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AC$,所以$AC:OP=2:1$,$\angle C=\angle HOP=60^\circ$,则$\triangle ACH \backsim \triangle POH$,所以$\angle OHP=\angle AHC$.但$OHC$为一直线,则$AHP$必为直线,即$AN$的延长线交$\overset{\frown}{BC}$于$P$,并三等分$\overset{\frown}{BC}$.同理$AM$的延长线交$\overset{\frown}{BC}$于$Q$,并三等分$\overset{\frown}{BC}$.

14. 过B作切线BF交CD于F.由$AC /\!/ DE /\!/ FB$,则$ME:AC=BM:BC$,$MD:BF=CM:BC$,两式相除$(ME\cdot BF):(MD\cdot AC)=BM:CM$.而$BF=FD$,$AC=CD$,从而$BF:AC=FD:CD=BM:CM$,于是$ME:MD=1$.由于$CB$不与$AB$平行,$AB$上满足被$CB$平分的点$E$至多一个(否则$DE_1$,$DE_2$的中点连线$CB /\!/ AB$),从而$DM=ME$时,必有$DE\perp AB$.

15. 过D作AB,AC,EF的垂线,垂足分别为M,N,T,则$\angle MDN=120^\circ$,

8 $DM=DN$.若$DT<DM$,则$\cos\angle EDT<\cos\angle EDM$,则$\angle EDT>\angle EDM$.同理$\angle TDF>\angle FDN$.则$\angle EDF>\frac{1}{2}\angle MDN=60^\circ$矛盾.同理$DT>DM$亦不可能.从而$DT=DM=DN$,易得$ET=EM$,$FT=FN$,即可证.

16. 若$AB<AC$,则$\angle C>\angle B$,由$\angle CAQ=\angle BAQ$有$\angle AQP>\angle APQ$,亦有$AB>AQ$,亦推得$S_{\triangle BAP}>S_{\triangle CAQ}$.而由$BP=CQ$有$S_{\triangle BAP}=S_{\triangle CAQ}$与上式矛盾,故有$AB\leqslant AC$.同理可证$AB\geqslant AC$.故$AB=AC$.

17. 若$ED>BE$,则$ED>CD$,有$\angle EDI<\frac{1}{2}\angle AED$.同理,$\angle DEI<\frac{1}{2}\angle AED$.从而$\angle CID=\angle EDI+\angle DEI<\frac{1}{2}(\angle AED+\angle ADE')=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$,$\angle BIC+\angle CID<180^\circ$与$\angle BIC+\angle CID=180^\circ$矛盾.故$ED\leqslant BE$,同理$ED\geqslant BE$.即证.

18. 作$\triangle DBC$外接圆的切线BA',则$\triangle A'BD\backsim\triangle A'CB$.则$\frac{DA'}{BA'}=\frac{BA'}{CA'}=\frac{BD}{CB}$.在$\triangle BDC$中,$\frac{BD}{CB}=\frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,则$\frac{DA'}{BA'}\cdot\frac{BA'}{CA'}=\frac{BD^2}{CB^2}=\frac{2}{3}$,即$\frac{DA'}{CA'}=\frac{2}{3}$.即$A'D=2DC$,从而$A'$与$A$重合,故$AB$是$\triangle BCD$外接圆的切线.

19. 在EF上取点P',使$P'E:P'F=CE:BF$.可证$\triangle BFP'\backsim CEP'$,则

$\angle BP'F=\angle CP'E$，$\dfrac{P'B}{P'C}=\dfrac{BF}{CE}=\dfrac{BD}{CD}$. 由角平分线性质定理的逆定理知 $\angle BP'D=\angle CP'D$，则 $DP'\perp EF$，故 P' 与 P 重合，从而 PD 平分 $\angle BPC$.

20. 连 AD，BC，过 Q 作 $QH\perp AB$ 于 H，设 OH 交 CF 于 P'，连 DH，CH. 易证 A,D,Q,H 和 B,C,Q,H 分别共圆，则 $\angle DHA=\angle DQA$，$\angle CHB=\angle CQB$. 又 $\angle DQA=\angle CQB$，则 $\angle DHA=\angle CHB$. 又 $\triangle DFH\backsim\triangle CEH$，有 $FH:EH=DF:CE$. 而 $DF\perp AB$，$CE\perp AB$，$QH\perp AB$，则 $FP':CP'=FH:EH$，$FP:CP=DF:CP$，从而 $FP':CP'=FP:CP$，即 P 和 P' 重合，故 $PQ\perp AB$.

21. 在 $\triangle ABC$ 内取点 O'，使 $BO'=BA$，且 $\angle O'BA=30°$，则 $\angle BAO'=\angle BO'A=75°$，$\angle O'BC=\angle O'AC=15°$. 在 BC 上截取 $BD=AO'$，则 $\triangle O'BD\cong\triangle CAO'$，即有 $O'D=CO'$. 设 $\angle BO'D=\angle ACO'=\alpha$，由 $\angle O'DC=\alpha+15°$，$\angle O'CD=45°-\alpha$，$\angle O'DC=\angle O'CD$（由三角形全等知 $O'D=O'C$），从而 $\alpha=15°$，$O'C=O'A$，$\angle AO'C=150°$. 而满足题设的点 O 是惟一的，故 O' 和 O 重合，故 $OA=OC$，$OB=AB$.

22. 假设 $\triangle LNP$ 是等边三角形，则有 $\frac{1}{2}\angle C=\angle NCH=30°$，从而 $\angle C=60°$. 显然，$\angle LBH=30°$，故知 $\angle BMC=90°$，从而 BM 是 $\triangle ABC$ 的高. 又因 BM 是中线，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，且 $BA=BC$. 又因 $\angle C=60°$，知 $\triangle ABC$ 为等边三角形. 这样一来，BM，CK，AH 相交于同一点，即 $L=M=P$，从而 $\triangle LNP$ 不存在，导致矛盾.

练习题 1.3

1. 连 AC,知 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,则 $S_{\triangle AGC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$,故 $S_{AGCD}=\frac{2}{3}$.

2. 连 AC,知 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,故 $S_{\square ABCD}=12$.

3. 延长 BG 到 D,使 $GD=BG$,则四边形 $AGCD$ 为平行四边形且 $\angle DGA=90°$,从而 $S_{\triangle AGD}=6$,故 $S_{\triangle ABC}=18$.

4. 设 $S_{\triangle APB}=2x$,$S_{\square ABCD}=5x$,则 $S_{\triangle PCD}=0.5x$,故所求比为 $1:10$.

5. 连 BE,PD,则 $BE\parallel PD$. $S_{\triangle BFD}=\frac{1}{2}S_{\triangle BDP}=\frac{1}{2}S_{\triangle EPD}=\frac{1}{4}S_{\triangle CED}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}S_{ABCD}=\frac{1}{16}a^2$.

6. 连 OC,OB,则 $\triangle OAB$ 为直角三角形,$\triangle OBC$ 为等腰三角形,而 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle OBC}$,故所求两部分面积之和为$\frac{\pi}{6}$.

7. 设 PY 交 QX 于 E,由 $PX\parallel QY$,有 $S_{\triangle PEQ}=S_{\triangle EXY}$,设 SY 交 XR 于 F,由 $SX\parallel RY$ 有 $S_{\triangle SRF}=S_{\triangle XFY}$,从而 $S_A=S_B$.

8. 设 EF 交 GH 于 P,则$\frac{1}{2}S_{\square AEPG}\cdot\frac{1}{2}S_{\square PHCF}=\frac{1}{2}S_{\square GPFD}\cdot\frac{1}{2}S_{\square EBHP}$,故 $S_{\square AEPG}=20$.

9. 由 $\triangle PCD\cong\triangle BCQ$,有 $PD=BQ$,$S_{\triangle PCD}=S_{\triangle BCQ}$,从而 C 到 GD 与 C 到 BG 的距离相等,故 $\angle BGC=\angle DGC$.

10. 在 BC 上取点 M,使 $BM:MC=1:4$,连 AM;在 AM 上取点 O,使 $MO:OA=3:5$,则点 O 为所求。

11. 设内切圆半径为 r,则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r(AB+BC+CA)=r(m+n+\sqrt{3}r)=rP$, 又 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{(m+n+\sqrt{3}r)\cdot\sqrt{3}rmn}\Rightarrow S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}mn$.

12. 由本章例 3 的结论知 $S_{\triangle ADE}:S_{BCED}=3$.

13. 由余弦定理求得 $\cos A=\frac{1}{8}$,$\cos B=\frac{9}{16}$,$\cos C=\frac{3}{4}$,再由本章例 3 的结论知 $S_{\triangle DEF}:S_{\triangle ABC}=\frac{27}{256}$.

14. 取 CD 的中点 Q,连 PQ,QM,QN,DM,CN,则 $QM\parallel AP$,$QN\parallel BP$,即