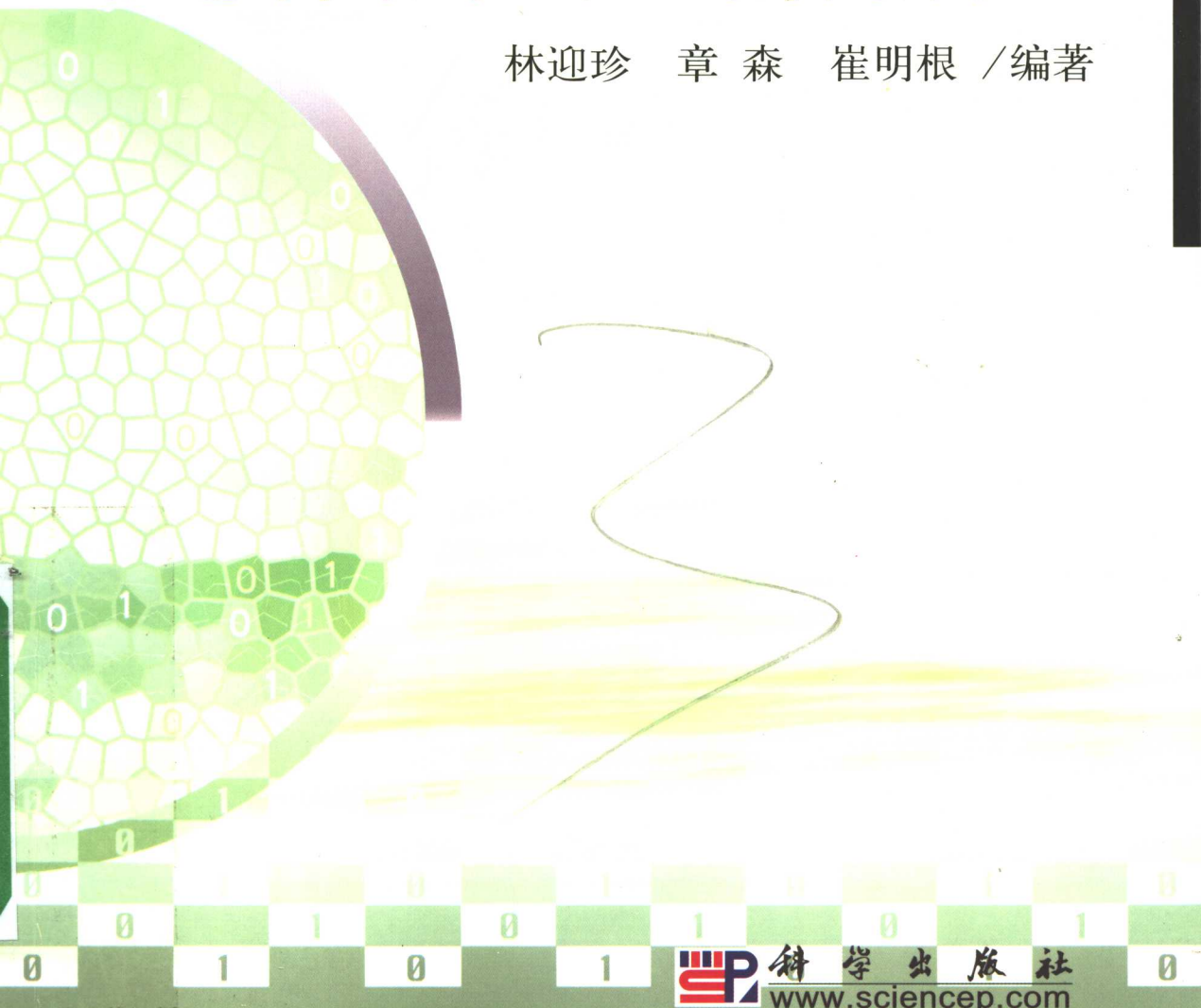


计算机理论基础与应用丛书

信息科学中的应用数学方法

林迎珍 章 森 崔明根 / 编著



科学出版社

www.sciencep.com

G202/80

2008

计算机理论基础与应用丛书

信息科学中的应用数学方法

林迎珍 章 森 崔明根 编著

北京工业大学研究生课程建设
应用数理学院重点学科建设 资助出版

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书给出了信息科学领域中常用的数学方法的例子,如用 Walsh 函数传输多路信号及计算机仿真、用 Fourier 变换作信号滤波、用 Hadamard 变换作图像压缩、用再生核将语音信号正交分解等,并在相应的章节中作了较细致的推导。本书包括的内容有 Walsh 函数、Fourier 变换、小波分析、神经网络与遗传算法、矩量法、再生核空间等。这些方面的理论与方法在信息科学领域中有极其广泛的应用,书中在经典内容的基础上增加了一些新的应用方法,尤其增添了许多作者近年来新的研究成果。

本书可供数学、信息科学、图像与信号处理等领域的教师、研究人员、工程技术人员参考,也可作为数学、信息科学系的本科生、研究生的选修教材。

图书在版编目(CIP)数据

信息科学中的应用数学方法/林迎珍,章森,崔明根编著. —北京:科学出版社,2008

(计算机理论基础与应用丛书)

ISBN 978-7-03-020275-8

I. 信… II. ①林…②章…③崔… III. 信息技术-应用数学-高等学校-教材 IV. G202 029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 027206 号

责任编辑:张海娜 杨 然/责任校对:李奕莹

责任印制:刘士平/封面设计:王 浩

科 学 出 版 社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 3 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2008 年 3 月第一次印刷 印张:11 1/2

印数:1—3 000 字数:222 000

定价:35.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

前 言

20 世纪 70 年代, Walsh 函数的应用十分活跃。80 年代出现的小波分析又成了 Fourier 理论的里程碑。90 年代前后兴起的神经网络与遗传算法, 尽管有些数学家对它不太欣赏, 但其的确有很广的应用领域, 尤其在求解最优化问题上找到了一个新的突破口。为此, 作者总结了近年来在国内外从事教学和科研的一系列成果, 汇集了信息科学中用到的一些应用数学方法, 目的是为信息科学及相关专业的高年级学生及研究生提供一本合适的数学类教材, 增强他们的科研创新能力和素质。

本书第 1 章围绕信息传输、滤波、计算机仿真和图像压缩、用再生核将语音信号正交分解等方面的问题给出了信息科学中的一些非常重要的例子, 以此使爱好信息科学的读者们对本书产生一定的兴趣。

第 2 章介绍的 Fourier 变换理论方法在信号压缩与滤波中有着不可磨灭的贡献。但本书侧重点是将其与第 3 章的小波分析相融合, 并较通俗地将 Fourier 理论与方法由浅入深地展示在读者面前。为了使 Fourier 变换理论方法在实际问题中得以实现, 也就是说, 利用计算机一些常用的软件, 在一定的时间内得到较满意的结果, 本章主要介绍了实用性较强的离散 Fourier 变换、窗口 Fourier 变换和快速 Fourier 变换等。

第 3 章介绍的小波分析理论产生仅二十几年就得到了广泛的应用。在本章中, 作者依照多年的教学经验浓缩了小波分析最基本的知识, 向读者介绍了小波分析在气象、图像压缩、图像识别等方面的应用。此外, 还向读者介绍了一些最新的思想方法, 包括近几年的一些博士论文, 如小波变换的平移与旋转等。

第 4 章主要从旅行商问题、BP 算法、随机神经网络——退火算法、遗传算法等几个方面介绍了神经网络理论及其应用。

第 5 章介绍的矩量法是解决非定常问题的经典方法, 线性算子逼近理论以及谱分析是信息科学最重要的基础。在这章中, 就线性有界算子的近似算法、用矩量法解非定常问题、用矩量法解积分方程与微分方程等问题对矩量法的具体应用做了介绍。

第 6 章的内容是作者多年来科研成果的总结。作者在再生核理论的基础上做了一些工作, 在其应用领域中取得了一些具有国际前沿水平的科研成果。一百多年来, Hilbert 空间的研究对数学的发展有着巨大的贡献。曾有很多数学家以 Hilbert 空间为研究框架获得了极优秀的成果, 但 Hilbert 空间在实际应用中总

回避不了—些繁琐的积分运算，即使能花费—定的时间去算，也会丢失许多有效数据。而再生核空间这个特殊的 Hilbert 空间，既继承了 Hilbert 空间的优点，又展示了其自身独特的计算优势。最突出的一点就是在计算函数内积时，完全不必像其他空间—样去积分，而只计算某几个点的函数值即可。再生核理论的应用可以促进信息科学领域中的许多实际问题的解决。近年来，有越来越多的国内外学者关注或投入到再生核应用领域的研究中。本章中，作者选择了一部分已发表和待发表的具有较强可读性的论文展示给读者，主要介绍和给出了再生核空间中的插值、无穷线性方程组的求解及微分方程的求解等实例，使读者能够较快地了解再生核的应用方法。

本书是一本数学书，因此附了许多数学概念以及—些必要的定理来保证所提出应用方法的正确性。但读者不要被书中较难的数学证明所困扰，可以先接受它的结论，这样既不会影响把书读下去，也不会影响掌握这种方法的使用。

值此出版之际，作者首先感谢北京工业大学应用数理学院和北京工业大学研究生部为完成本书所提供的一切支持和帮助。同时，还要感谢哈尔滨工业大学研究生院诸位老师和研究生为本书提供的支持。

本书编写的初衷是为了适应信息时代的需求，为相关学科的学者提供—本对他们有所帮助的书。但由于作者水平有限，书中不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

目 录

前言

第 1 章 数学应用例子	1
1.1 Walsh 函数与信号传输	1
1.1.1 矩形波函数	1
1.1.2 Walsh 函数	3
1.1.3 利用 Walsh 函数传输多路信号	6
1.2 滤波的数学原理	7
1.2.1 滤波公式	7
1.2.2 滤波的例子	8
1.2.3 单位脉冲函数	11
1.3 采样定理	12
1.3.1 Fourier 级数	12
1.3.2 采样定理	13
1.4 多路信号传输的计算机仿真	14
1.5 图像压缩	16
1.5.1 矩阵范数	17
1.5.2 图像矩阵的正交表示	17
1.5.3 图像矩阵的特征分析	18
1.6 正交变换	19
1.6.1 离散阿达马(Hadamard)变换	19
1.6.2 阿达马变换的快速算法	20
1.6.3 快速 Fourier 变换	23
1.6.4 离散 Walsh 变换	23
1.7 斜变换	24
1.7.1 图像压缩原理	24
1.7.2 斜矩阵的构造	25
1.8 基于再生核空间的语音信号的正交分解与实现算法	27
第 2 章 Fourier 变换	30
2.1 $L^2(a,b)$ 空间	30
2.2 Fourier 变换	33

2.3	卷积	37
2.3.1	卷积的定义和性质	37
2.3.2	离散卷积	39
2.4	广义函数与广义函数的微分	40
2.4.1	广义函数	40
2.4.2	广义函数的微分	41
2.5	Spline 函数的插值与 Fourier 变换	43
2.5.1	Spline 函数定义	43
2.5.2	Spline 插值法	44
2.5.3	B-Spline 函数及其性质	44
2.5.4	B-Spline 函数的 Fourier 变换	48
2.6	Fourier 变换的一个对偶关系	48
2.7	离散 Fourier 变换(DFT)	51
2.8	Fourier 变换的离散化	53
2.9	窗口 Fourier 变换	55
2.10	快速 Fourier 变换(FFT)	57
第3章	小波分析	60
3.1	气象时间序列分析	60
3.2	利用小波理论进行数据压缩	63
3.3	二维图像压缩	66
3.4	图像识别算法	68
3.5	图像的奇异点与图像压缩	72
3.5.1	二进小波变换及重构公式	72
3.5.2	奇异值分析	73
3.5.3	利用奇异值点的小波变换重构函数	74
3.6	平移、伸缩正交基底	76
3.7	小波定义	79
3.8	尺度方程	81
3.9	尺度方程分解法	84
3.10	关于共轭滤波器的进一步讨论	86
3.11	尺度方程(3.8.2)的解 $\phi(x)$ 是母小波函数	93
3.12	小波分析定义	97
3.13	小波变换	100
3.14	$L^2(\mathbb{R})$ 空间框架及函数按框架展开	103
3.15	框架举例及对偶框架定理	106

3.16 Wegl-Heisenberg 框架	108
3.17 仿射框架	110
第4章 神经网络与遗传算法	113
4.1 旅行商问题	113
4.1.1 问题的提出	113
4.1.2 TSP 数学模型	113
4.2 Hopfield 模型	115
4.3 连续 Hopfield 模型	118
4.4 前向网络	119
4.5 BP 算法	121
4.6 随机神经网络——退火算法	122
4.7 遗传算法	124
4.7.1 遗传算法的描述	124
4.7.2 一个工程设计的最优化	127
4.7.3 解连续优化问题的遗传算法	129
第5章 矩量法	130
5.1 Hilbert 空间	130
5.2 线性有界算子	132
5.3 自共轭算子的谱分解	134
5.4 Laplace 变换	138
5.5 Hilbert 空间中的矩量问题	142
5.6 线性有界算子的近似法	145
5.7 用矩量法解非定常问题	148
5.7.1 一阶齐次问题	148
5.7.2 一阶非齐次问题	150
5.7.3 二阶齐次问题	151
5.7.4 二阶非齐次问题	153
5.8 用矩量法解积分方程与微分方程	153
5.8.1 矩量法解积分方程	153
5.8.2 矩量法解常微分边值问题	154
第6章 再生核方法	157
6.1 再生核空间的概念	157
6.2 几个再生核空间的定义及其再生核函数的求法	158
6.2.1 再生核空间 $W_1^2[a, b]$ 与再生核函数 $R_y(x)$ 的求法	158
6.2.2 再生核空间 $W_2^2[a, b]$ 与再生核函数 $K_y(x)$ 的求法	159

6.3	再生核空间的插值	161
6.4	在再生核空间中求解线性微分方程	164
6.5	在再生核空间中求解线性微分方程组	166
6.6	在再生核空间中求解线性偏微分方程	168
6.7	在再生核空间 l^2 中求解无穷线性方程组	170
参考文献		173

第 1 章 数学应用例子

1.1 Walsh 函数与信号传输

1.1.1 矩形波函数

矩形波函数 $\{R(n,t)\}$ 是如图 1.1.1 所示的无穷多个函数。这些函数是在区间 $[0,1]$ 外以 1 为周期延拓到 $(-\infty, +\infty)$ 的周期函数。除 $R(0,t)$ 外,各个 $R(n,t)$ 均取值+1 或-1,每个 $R(n,t)$ 都是由 $R(1,t)$ 向横轴方向压缩而成的。另外,这些函数在间断点上规定右连续,其表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} R(0,t) &= 1 \\ R(1,t) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases} \\ \vdots \\ R(n,t) &= R(1, 2^{n-1}t) \quad (\text{递推公式}) \\ R(n,t) &= R\left(n, t + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \quad (\text{周期性}) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.1)$$

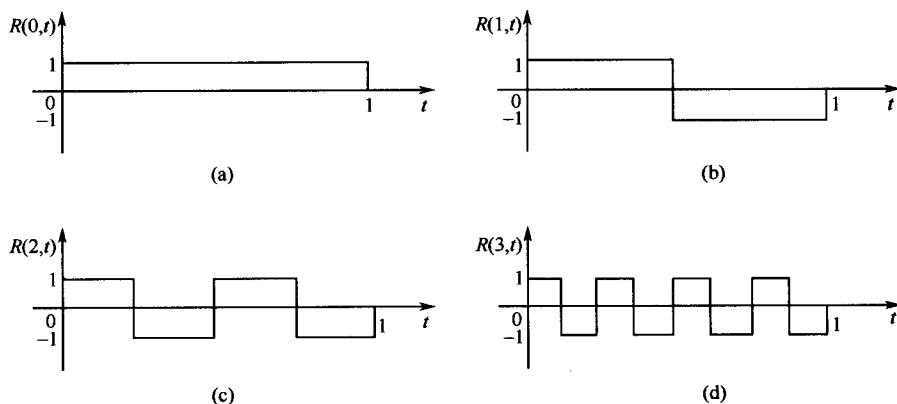


图 1.1.1 4 个矩形波函数图像

矩形波函数还可以表示为

$$\left. \begin{aligned} R(0,t) &= 1 \\ R(n,t) &= \text{sgn}(\sin 2^n \pi t) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.2)$$

矩形波函数的第三种定义为

$$\left. \begin{aligned} R(n, t) &= R\left(n, t + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ R(0, t) &= 1 \\ R(n, t) &= (-1)^{t_n}, \quad 0 \leq t < 1 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.3)$$

其中, t_n 为 t 的二进制表示的小数点后第 n 位数值, $t = (0.t_1 t_2 \cdots t_n \cdots)_2$, $t_n = 0$ 或 1 。例如, 当 $n=1$ 时, 对于 $0 \leq t < \frac{1}{2}$ 的 t , 其二进制表示为 $t = 0.0\cdots$, 即 $t_1 = 0$, $R(1, t) = (-1)^{t_1} = (-1)^0 = 1$; 对于 $\frac{1}{2} \leq t < 1$ 的 t , 其二进制表示为 $t = 0.1\cdots$, 即 $t_1 = 1$, $R(1, t) = (-1)^{t_1} = (-1)^1 = -1$ 。再如, $R(2, t) = (-1)^{t_2}$, 由于 $0 \leq t < \frac{1}{4}$ 时, $t = 0.00\cdots$, 以及当 $\frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4}$ 时, $t = 0.10\cdots$, 两者都是 $t_2 = 0$, 故 $R(2, t) = (-1)^0 = 1$; 而当 $\frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2}$ 时, $t = 0.01\cdots$, 以及当 $\frac{3}{4} \leq t < 1$ 时, $t = 0.11\cdots$, 两者都是 $t_2 = 1$, 故 $R(2, t) = -1$ 。

以上提到的矩形波函数三种定义是等价的。

矩形波函数 $R(n, t)$ 具有以下性质:

(1) 周期性: $R(n, t) = R\left(n, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ 。

(2) 积分性:

$$\textcircled{1} \int_0^1 R(n, t) dt = 0, \quad \textcircled{2} \int_0^1 R^2(n, t) dt = 1, \quad \textcircled{3} \int_0^{\frac{1}{2^{n-1}}} R(n, t) dt = 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

(3) 零值性: $\sum_{k=0}^{2^n-1} R\left(n, \frac{k}{2^n}\right) = 0$ 。

(4) 正交性: $\int_0^1 R(n, t) R(m, t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$ 。

矩形波函数 $R(n, t)$ 性质的证明:

(1) 的证明: $R\left(n, t + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = R\left[1, 2^{n-1}\left(t + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\right] = R(1, 2^{n-1}t + 1) = R(1, 2^{n-1}t) = R(n, t)$ 。

(2) 的证明: ①、②是显然的, 至于③有

$$\int_0^{\frac{1}{2^{n-1}}} R(n, t) dt = \int_0^{\frac{1}{2^{n-1}}} R(1, 2^{n-1}t) dt = \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^1 R(1, t) dt = 0$$

(3) 的证明: 由于 $t = \frac{k}{2^n}$ 的二进制表示为 $t = 0.t_1t_2\cdots$, 当 $k = \text{偶数}$ 时, $t_n = 0$; 当 $k = \text{奇数}$ 时, $t_n = 1$, 故 $R\left(n, \frac{k}{2^n}\right) = \begin{cases} -1, & k = \text{奇数} \\ 1, & k = \text{偶数} \end{cases}$, 而 $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ 中奇数与偶数的个数正好相等, 所以 $\sum_{k=0}^{2^n-1} R\left(n, \frac{k}{2^n}\right) = 0$ 。

(4) 的证明: 当 $m = n$ 时, 由积分性质②便得; 当 $m > n$ 时, 设 $m = n + l (l \geq 1)$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^1 R(m, t) R(n, t) dt &= \int_0^1 R(1, 2^{n+l-1}t) R(1, 2^{n-1}t) dt \\ &\stackrel{\text{设 } t' = 2^{n-1}t}{=} \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^{2^{n-1}} R(1, 2^l t') R(1, t') dt' \\ &= 2^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^1 R(1, 2^l t) R(1, t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} R(1, 2^l t) dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 R(1, 2^l t) dt \\ &= \frac{1}{2^l} \left[\int_0^{2^{l-1}} R(1, t) dt - \int_{2^{l-1}}^{2^l} R(1, t) dt \right] \\ &= 2^{l-1} \frac{1}{2^l} \left[\int_0^1 R(1, t) dt - \int_0^1 R(1, t) dt \right] = 0 \end{aligned}$$

性质(4)说明 $\{R(n, t)\}$ 是正交函数系, 但它并不完备, 即还有其他非零个函数与每个 $R(n, t)$ 正交。为了矩形波函数系构成完备函数系, 需添加许多别的函数。下面来解决这个问题。

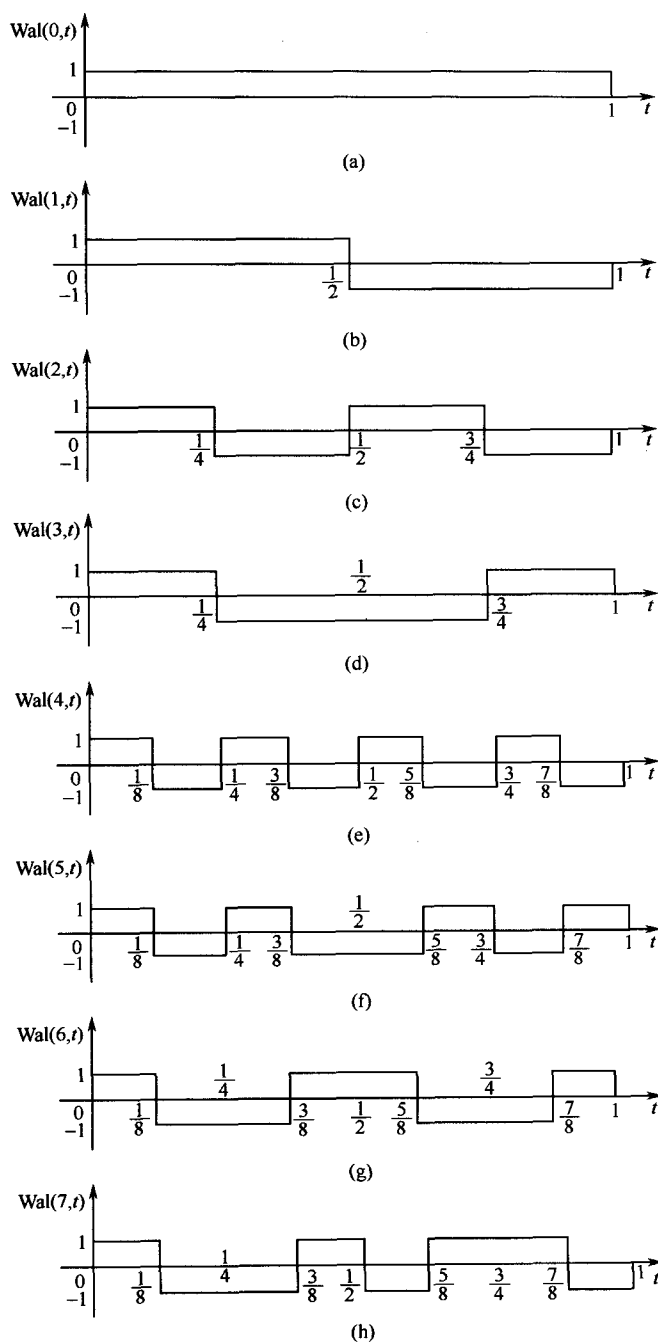
1.1.2 Walsh 函数

在矩形波函数 $R(n, t)$ 的基础上添加几个有限个 $R(n, t)$ 的乘积就得到 Walsh 函数系, Walsh 函数系是完备的函数系。Walsh 函数主要有两种产生方式。

(1) 由二进制直接生成。

$$\left. \begin{aligned} \text{Wal}(0, t) &= R(0, t) = 1 \\ \text{Wal}(n, t) &= \prod_{k=1}^{\infty} [R(k, t)]^{n_k} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.4)$$

其中, n_k 为 n 的二进制表示的第 k 位数字, $n = (\cdots n_k n_{k-1} \cdots n_2 n_1)_2$ 。如 $n = 3 = (11)_2$ 时, $\text{Wal}(3, t) = R(1, t)R(2, t)$; 又如, $n = 4 = (100)_2$, 及 $n = 7 = (111)_2$ 时, $\text{Wal}(4, t) = R(3, t)$, $\text{Wal}(7, t) = R(3, t)R(2, t)R(1, t)$ 。前 8 个函数如图 1.1.2 所示。

图 1.1.2 $Wal(n, t)$ 前 8 个函数图像

(2)由 G-代码生成。

① 非负整数的 mod2 的加法。

0 和 1 之间 mod2 的加法($\oplus$)定义为

$$\left. \begin{aligned} 0 \oplus 0 &= 0, & 1 \oplus 1 &= 0 \\ 1 \oplus 0 &= 1, & 0 \oplus 1 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.5)$$

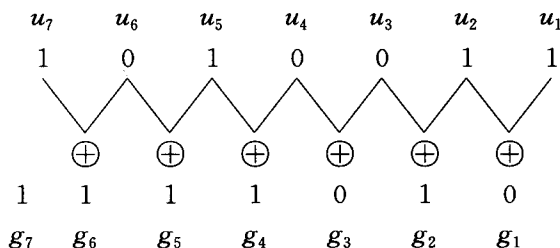
任意两个非负整数的 mod2 相加是这样的:首先把这两个数表示成二进制,然后对应数字 0 或 1 进行 mod2 加法,所得的 0 和 1 构成的数串为和数的二进制表示。如, $6=(110)_2$, $7=(111)_2$, 则 $6 \oplus 7 = (1 \oplus 1 \quad 1 \oplus 1 \quad 0 \oplus 1)_2 = (0 \ 0 \ 1)_2 = 1$ 。

② G-代码。

将一个非负整数 u 表示成二进制数字 $u = (\cdots u_p u_{p-1} \cdots u_2 u_1)_2$, 令 $g_p = u_p$, $g_i = u_i \oplus u_{i+1} (i=1, 2, \cdots, p-1)$, 则整数

$$g(u) = (\cdots g_p g_{p-1} \cdots g_2 g_1)_2$$

称为 u 的 G-代码。如, 当 $u=83=(1010011)_2$ 时有



故 $g(83)=(1111010)_2=122$ 。

③ Walsh 函数第二种表示。

$$\left. \begin{aligned} \text{Wal}(0, t) &= R(0, t) = 1 \\ \text{Wal}(n, t) &= \prod_{k=1}^p [R(k, t)]^{g_{n_k}} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.6)$$

其中, g_{n_k} 为 n 的 G-代码 $g(n)$ 的第 k 位数字。由此写出前 8 个 Walsh 函数为

$$\left. \begin{aligned} \text{Wal}(0, t) &= 1, & \text{Wal}(1, t) &= R(1, t) \\ \text{Wal}(2, t) &= R(2, t)R(1, t), & \text{Wal}(3, t) &= R(2, t) \\ \text{Wal}(4, t) &= R(3, t)R(2, t), & \text{Wal}(5, t) &= R(3, t)R(2, t)R(1, t) \\ \text{Wal}(6, t) &= R(3, t)R(1, t), & \text{Wal}(7, t) &= R(3, t) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.7)$$

下面给出 Walsh 函数的性质(证明略):

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int_0^1 \text{Wal}(0, t) dt &= 1, & \textcircled{2} \int_0^1 \text{Wal}(n, t) dt &= 0 \quad (n=1, 2, \cdots), \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \int_0^1 [\text{Wal}(n, t)]^2 dt = 1 \quad (n = 0, 1, \dots), \textcircled{4} \text{Wal}(m, t) \text{Wal}(n, t) = \text{Wal}(m \oplus n, t).$$

1.1.3 利用 Walsh 函数传输多路信号

在许多情况下,人们需要同时传输多个信号。例如,地面站需要知道无人驾驶飞机在飞行时的高度、速度、油量、机身的倾斜角度等数据,这就要求首先将这些信号的实际数据转换为电参数,然后将这些参数合成一个综合信号发射出来,地面则应根据接到的综合信号恢复成原来的多个表示信号。设需要传输的 l 个信号是 $E_1, E_2, \dots, E_l$, 它们在某一时间间隔内都是常数。将它们分别乘以 l 个不同的 Walsh 函数 $\text{Wal}(m_1, t), \text{Wal}(m_2, t), \dots, \text{Wal}(m_l, t)$, 这些 Walsh 函数称为副载波。把这些函数分别乘以 E_k 相加得出合成信号 $\sum_{k=1}^l E_k \text{Wal}(m_k, t)$, 再将此结果与振荡器产生的余弦 $\cos \omega_0 t$ 相乘, 其中 ω_0 的数字很大, 因此 $\cos \omega_0 t$ 是频率很高的波, 即能量很大。将综合信号

$$f(t) = \sum_{k=1}^l E_k \text{Wal}(m_k, t) \cos \omega_0 t$$

发射出去, 在接收端将接收的 $f(t)$ 再乘以 $2 \cos \omega_0 t$, 即

$$2f(t) \cos \omega_0 t = \sum_{k=1}^l E_k \text{Wal}(m_k, t) (1 + \cos 2\omega_0 t)$$

然后进行滤波得出 $\sum_{k=1}^l E_k \text{Wal}(m_k, t)$, 最后通过积分器将合成信号恢复成原来的信号

$$E_i = \sum_{k=1}^l E_k \int_0^1 \text{Wal}(m_k, t) \text{Wal}(m_i, t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

把以上的过程画成框图, 如图 1.1.3 所示。

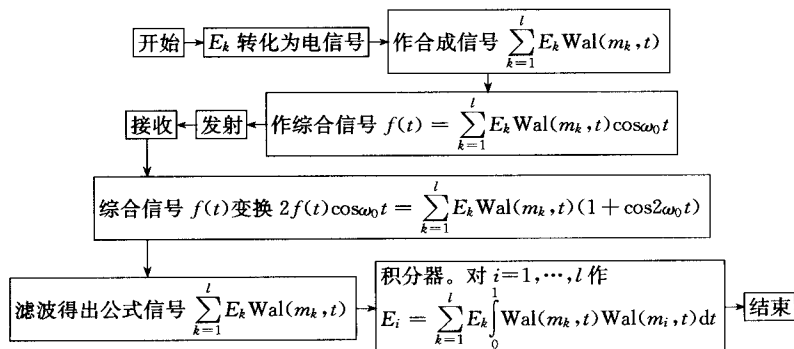


图 1.1.3

1.2 滤波的数学原理

1.2.1 滤波公式

1.1 节讲述了信号传输的数学过程,即多路信号的合成→采样→载波→发射→接收→滤波→信号的分解。本节将讲述滤波的数学原理。

此处把系统看作是一个从实际中抽象出来的设备,它把输入和输出联系起来,如图 1.2.1 所示。

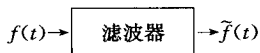


图 1.2.1 系统

设输入 $f_1(t)$ 产生的输出为 $\tilde{f}_1(t)$, 输入 $f_2(t)$ 产生的输出为 $\tilde{f}_2(t)$, a, b 为任意常数。如果对于 $af_1(t) + bf_2(t)$ 恒有输出 $a\tilde{f}_1(t) + b\tilde{f}_2(t)$, 则称系统是线性的。设输入 $f(t)$ 产生的输出为 $\tilde{f}(t)$, 如果对任意的 τ 值, 输入 $f(t+\tau)$ 所产生的输出为 $\tilde{f}(t+\tau)$, 则称系统是时不变的。本节主要讨论线性时不变系统。

首先来研究当输入简谐波 $f_\omega(t) = e^{i\omega t}$ 时, 输出 $\tilde{f}_\omega(t)$ 将是什么波形? 任取一个 τ 值, 根据滤波器的时不变性, 对于输入 $f_\omega(t+\tau) = e^{i\omega(t+\tau)}$ 将有输出 $\tilde{f}_\omega(t+\tau)$ 。另一方面, 由滤波器的线性, 对 $f_\omega(t+\tau) = e^{i\omega\tau} f_\omega(t)$ 的输出又可以写成 $e^{i\omega\tau} \tilde{f}_\omega(t)$ 。由此得出

$$\tilde{f}_\omega(t+\tau) = e^{i\omega\tau} \tilde{f}_\omega(t) \quad (1.2.1)$$

令 $t=0$, 得出

$$\tilde{f}_\omega(\tau) = e^{i\omega\tau} \tilde{f}_\omega(0) \quad (1.2.2)$$

由于 τ 是任意取的一个实数, 所以有

$$\tilde{f}_\omega(t) = H(\omega) e^{i\omega t} \quad (1.2.3)$$

其中, $H(\omega) = \tilde{f}_\omega(0)$, 称为滤波的频率特征。如果把 $H(\omega) = |H(\omega)| e^{i\theta(\omega)}$ 代入式 (1.2.3) 得出

$$\tilde{f}_\omega(t) = |H(\omega)| e^{i[\omega t + \theta(\omega)]} \quad (1.2.4)$$

这里 $\theta(\omega)$ 表示复数 $H(\omega)$ 的幅角, 而 $|H(\omega)|$ 为其模。由此可见, 简谐波经线性时不变滤波系统后的输出仍然是简谐波。称 $H(\omega)$ 的 Fourier 逆变换

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.2.5)$$

为滤波器的时间特征或时间响应。自然 $H(\omega)$ 是 $h(t)$ 的 Fourier 变换

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt$$

对于一般的信号 $f(t)$, 利用 Fourier 变换和 Fourier 逆变换

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.2.6)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.2.7)$$

可以推导出滤波公式。对式(1.2.7)两边进行滤波得

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \tilde{f}_\omega(t) d\omega$$

利用式(1.2.3)得

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.2.8)$$

设 $\tilde{f}(t)$ Fourier 变换为 $\tilde{F}(\omega)$, 即

$$\tilde{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.2.9)$$

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.2.10)$$

比较式(1.2.8)和式(1.2.10)得出

$$\tilde{F}(\omega) = H(\omega) F(\omega) \quad (1.2.11)$$

称式(1.2.11)为线性时不变滤波器的滤波公式。

1.2.2 滤波的例子

(1) 信号 $f(t)$ 是由两个波 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 合成的信号, $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, 其中 $f_1(t)$ 的频率小于等于 100 周, 而 $f_2(t)$ 的频率大于等于 500 周。试设计一个滤波器, 使在合成波 $f(t)$ 中滤掉 $f_2(t)$ 。

$$\text{设} \quad H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 250 \\ 0, & |\omega| > 250 \end{cases}$$

$$\tilde{F}(\omega) = \tilde{F}_1(\omega) + \tilde{F}_2(\omega) = H(\omega) F_1(\omega) + H(\omega) F_2(\omega) = H(\omega) F_1(\omega) = F_1(\omega)$$

其中, $F(\omega)$, $F_1(\omega)$, $F_2(\omega)$ 分别表示 $f(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ 的 Fourier 变换。于是由

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega = f_1(t)$$

知合成信号 $f(t)$ 通过滤波器 $H(\omega)$ 得出 $f_1(t)$ 。

(2) 设信号 $f_1(t)$, 其频率近似为 250 周; 另一个信号 $f_2(t)$, 其频率为 500 周, 它们的延续时间都是 50ms [波形见图 1.2.2(a) 和 (b)]。