中学生家教丛书

王建民　董世奎　主编

特级教师讲数学

初中二年级

科学普及出版社

中学生家教丛书

特级教师讲数学

（初中二年级）

王建民　董世奎　主编

科学普及出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

特级教师讲数学:初中二年级/王建民,董世奎主编 .-北京:科学普及出版社,1999

(中学生家教丛书)

ISBN 7-110-04580-3

Ⅰ.特… Ⅱ.①王…②董… Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 37729 号

科学普及出版社出版

北京海淀区白石桥路 32 号 邮政编码:100081

电话:62179148 62173865

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

中国文联印刷厂印刷

*

开本:850 毫米×1168 毫米 1/32 印张: 10 字数:234 千字

1999 年 1 月第 1 版 1999 年 1 月第 1 次印刷

印数:1-10 000 册 定价:12.50 元

出 版 说 明

随着我国教育改革的深入发展，根据教育部有关教育改革的最新精神，我社特邀请部分北京市著名特级教师编写了《中学生家教丛书》。

《中学生家教丛书》是一套涵盖中学主要课程的自学自测导向教程。其主要特点是：

1. 注重素质教育，内容新颖 充分体现教育改革的精神，按照素质教育的要求，注重对学生学习能力的培养和学习方法的指导，帮助学生扎扎实实学好基础知识，拓宽学习思路，掌握学习方法，提高分析问题和解决问题的能力。

2. 与现行教材同步，实用性强 在编写中根据各年级、各学科的特点，按照教育部最新教学大纲和考试大纲的要求，与最新现行教材同步，由浅入深地帮助学生更好地理解和掌握书本知识，顺利地通过各科考试。

3. 突出学习重点，针对性强 各学科有的放矢地抓重点、难点进行通俗讲解，精辟分析和精要习题训练，以帮助学生达到举一反三、触类旁通的目的。

4. 编写队伍强，权威性高 本丛书各学科全部由北京市著名特级教师担任主编，参加编写工作的都是学科带头人、优秀教师。他们不仅具有丰富的教学经验，同时善于指点迷津，使学生在学习中少走弯路，取得事半功倍的效果。

本套丛书的编写是在总结和吸收众多成功指导学生学习经验的基础上编写的，是编写者在长期的教学实践中不断研究和工作经验的结晶。

我们衷心地希望读者通过本套丛书的学习，进一步激发学习兴趣，切实有效地达到素质教育的目的。并殷切期盼本套丛书出版面世后，能得到更多读者的关注和听到更多读者的意见，以便我们改进不足之处，使之不断完善。

前　言

本书依据国家教委制定的《九年义务教育全日制初中数学教学大纲》，并与现行的初二数学教材配套编写而成。

本书按各章中的大单元编写，内容与现行教材同步．每单元包括：学法指导、重点·难点、解题能力指导、精要练习及精要练习答案及提示五部分组成．其中学法指导详细介绍了本单元应掌握的各种解题思路及解题方法；重点·难点精要地指出了本单元应重点掌握的解题思路及方法，点出了本单元较难掌握的知识及解题方法；解题能力指导精选了典型习题，由浅到深地全面介绍了本单元涉及的各种解题思路及解题方法的应用；精要练习根据本单元所介绍的解题思路与方法，精选了与之配套的由浅入深的练习题。

本书适用于初中二年级各类学生．它既能帮助学得稍差的学生提高能力，又能帮助学得较好的学生进一步提高能力．总之，本书是初中学生学好数学这门学科的一本较好的参考书。

编　者

1999 年 1 月

目　　录

代数部分

几何部分

代 数 部 分

第八章 因式分解

一、因式分解的概念

【学法指导】

1. 正确理解因式分解的概念

把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做多项式的因式分解.

因式分解这一概念有如下几个特点：

(1)结果一定是积的形式；

(2)每个因式必须是整式；

(3)各因式要分解到不能再分解为止.

2. 整式乘法与因式分解

我们学习了整式乘法之后，开始学习多项式的因式分解，怎样分清这两个概念呢?

我们在整式乘法中学习了单项式与多项式的乘法法则

$$m(a+b+c)=ma+mb+mc \tag{1}$$

学习了平方差公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \tag{2}$$

它们都是把积的形式化为和差的形式，是乘法运算. 这里 m，$(a+b+c)$是 $ma+mb+mc$ 的因式，$(a+b)$，$(a-b)$是 a^2-b^2 的因式.

分别将(1)式、(2)式反过来写得

$$ma+mb+mc=m(a+b+c) \tag{3}$$

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b) \tag{4}$$

这个变形是把多项式由和、差的形式转化为两个因式的积的形式，是多项式的因式分解.

(1)与(3)，(2)与(4)只不过是等号左右两边的式子互相交换了位置，但正是这个差异反映了从等号的一边到另一边的运算过程的区别：

$$m(a+b+c)\underset{\text{因式分解}}{\overset{\text{整式乘法}}{\rightleftharpoons}}ma+mb+mc$$

$$(a+b)(a-b)\underset{\text{因式分解}}{\overset{\text{整式乘法}}{\rightleftharpoons}}a^2-b^2$$

由上两式可见，因式分解与多项式乘法是互逆的关系，因此，我们可以从整式乘法得出因式分解的某些方法，又可以利用整式乘法来检验因式分解的结果是否正确，因此，要特别注意分清这两个概念，避免出现因式分解进行到某一步后，又回头做了整式乘法的错误.

例如：因式分解 $a(a+b)-b(a+b)$

错解：原式 $=(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

3. 因数分解与因式分解

在小学里我们学习过因数分解，也就是分解质因数，它是将一个整数化成几个质因数的积.因式分解与因数分解类似，所以在学习因式分解的过程中，如果能有意识地将因数分解与因式分解进行类比，将会对因式分解的学习大有帮助.

首先，从学习因数分解与因式分解的需要方面来看，两者有相通之处.在小学里学习分数的时候，由于遇到了约分和通分，就需要把一个整数进行因数分解，从而就能较容易地寻找出几个整数的最大公约数和最小公倍数.例如把 33 分解成 3×11，把 60 分解成 $2\times2\times3\times5$.

在学习初中代数中分式的时候，同样也会遇到分式的约分与通分，因此，也需要像对整数进行因数分解一样，把一个多项式转化成

几个整式的乘积的形式,来寻找出公因式进行约分与通分.

我们也可以从两者的意义方面进行比较:因数分解的对象是整数,因式分解的对象是整式,这是两者的不同之处.两者又有共同之处,因数分解与整数乘法是互为相反的过程,例如,由 3×11 求得 33 是乘法,反过来,由 33 化为 3×11 就是因数分解.因式分解同样也是整式乘法的相反过程,所以,无论进行因数分解,还是进行因式分解,最终都是要将式子化为乘积形式.

再从两者所要求的最终结果来看,他们又有相似之处.对因数分解而言,所得到的最终结果首先必须是几个整数的乘积,同时,这些整数必须都是质数,即在整数范围内不能再被分解.如数 12,进行因数分解后,必须化成 $2\times2\times3$ 的形式,而不能化成 2×6 的形式,因为 6 不是质数.同样道理,因式分解得到的最终结果必须是几个整式的乘积,而这些整式不能再被继续分解.例如,a^4-b^4 经过因式分解后,得到的最终结果是 $(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$,而不会是 $(a^2+b^2)(a^2-b^2)$,因为 a^2-b^2 还可以继续被分解.

最后要注意,因数分解与因式分解还是有所区别的,特别是在分解的方法上,因数分解往往是用短除法完成的,而因式分解有提公因式法、运用公式法、分组分解法和十字相乘法等多种方法,这就需要在掌握因式分解与因数分解的共性的同时,掌握因式分解的个性,从而扎实灵活地学好因式分解.

【重点·难点】

1. 重点:因式分解的概念是重点.

2. 难点:正确、深刻理解因式分解的意义是难点,可结合因数分解的意义及因式分解与整式乘法的关系去认识.

【解题能力指导】

例 1 选择题:下面的四个变形中,可以判定为因式分解的是(　　).

A. $6a^2b^3=2ab^2\cdot3ab$

B. $x^2-4xy+12xy^2=x(x-4y)+12xy^2$

C. $a-b=\dfrac{1}{a+b}(a-b)(a+b)$

D. $m^4+m^2+1=(m^2+m+1)(m^2-m+1)$

解:(1)因式分解是对多项式进行的,$6a^2b^3$ 是单项式,它本身就是几个幂的积,不存在再作因式分解的问题,所以 A 应给予否定;

(2)因式分解是把多项式化为几个整式的积,B 中等号的右边是 $x(x-4y)$ 与 $12xy^2$ 的和,可见它不是因式分解,所以 B 也应否定;

(3)因式分解的变形是在整式中进行的,C 中等号的右边是分式,仍不能认为它是因式分解,所以 C 也应否定;

(4)根据上面的判断,只是 D 中的变形是因式分解,事实上,D 中等号右边是两个整式的积,而且

$$
\begin{aligned}
&(a^2+a+1)(a^2-a+1)\\
&=[(a^2+1)+a][(a^2+1)-a]\\
&=(a^2+1)^2-a^2\\
&=a^4+a^2+1
\end{aligned}
$$

所以 D 满足因式分解的定义,故选 D.

点评:了解因式分解应在哪个范围内进行,了解因式分解变形的目标,是正确进行因式分解变形的前提.

【精要练习 8-1】

1. 下列各题从左边到右边的变形中,哪些是整式乘法?哪些是因式分解?

(1) $-5a^2b(3a-4b)=-15a^3b+20a^2b^2$

(2) $a^2-4a+4=(a-2)^2$

(3) $x^2-3xy+2y^2=x(x-3y)+2y^2$

(4) $x^2-3xy+2y^2=(x-y)(x-2y)$

(5) $(a+b)^2-c^2=(a+b+c)(a+b-c)=a^2+2ab+b^2-c^2$

(6) $m^2-n^2+4=(m+n)(m-n)+4$

2. 根据整式乘法,检验下列多项式是否已正确地进行了因式

分解.

(1)$\frac{1}{3}x^2y-\frac{1}{6}xy^2=\frac{1}{6}xy(2x-y)$

(2)$m^2-mn+n^2=(m-n)^2$

(3)$1+m+\frac{m^2}{4}=(1+\frac{m}{2})^2$

(4)$2x(a-b)+3y(b-a)=(a-b)(2x+3y)$

3. 下列各题因式分解的结果是否正确,若不正确,写出正确的结果.

(1)$-5a^2b+15ab=-5ab(a+3)$

(2)$ab-ac+ad=a(b-c)$

(3)$a^4-1=(a^2+1)(a^2-1)$

(4)$a^2-2ab+b^2=(a-b)(a-b)$

(5)$x^2-2xy+y^2=(y-x)^2$

(6)$(a+b)^2-(c-d)^2=(a+b+c-d)(a+b-c-d)$

答案与提示

1.(1),(5)是整式乘法;(2),(4)是因式分解;(3),(6)既不是整式乘法,也不是因式分解.

2. 略.

3. 除第(5)题结果正确外,其余各题结果均不正确,正确的结果是:

(1)$-5ab(a-3)$　　(2)$a(b-c+d)$

(3)$(a^2+1)(a+1)(a-1)$　　(4)$(a-b)^2$

(6)$(a+b+c-d)(a+b-c+d)$

二、因式分解的基本方法

本章中,学习因式分解的主要方法有:提取公因式法、公式法、十字相乘法、分组分解法.掌握这些因式分解的基本方法是学好多项式因式分解的关键.

【学法指导】

1. 熟练掌握提取公因式法分解因式

提公因式法是最基本的也是最重要的方法，使用提公因式法分解因式的关键在于确定多项式中各项的公因式.

例 2 把下列各多项式分解因式.

(1) $5x-10$ (2) $2a^2b-4ab^2$

(3) $6m^3n^2-12m^2n^2+9mn^2$

分析：(1)首先判定多项式中各项的系数是否有公约数；

(2)再观察各项的字母部分是否有相同字母的幂，在这些底数相同的幂中，哪一个可以作为因式的一部分.

解：(1) $5x-10=5(x-2)$

(2) $2a^2b-4ab^2=2ab(a-2b)$

(3) $6m^3n^2-12m^2n^2+9mn^2$

$=3mn^2\cdot 2m^2-3mn^2\cdot 4m+3mn^2\cdot 3$

$=3mn^2(2m^2-4m+3)$

点评：在运用提取公因式法做分解因式时，应把各项的公因式"一次提净"，如题 $8a^3x^3-36a^5x^2+12a^4x^4y=4a^3(2x^3-9a^2x^2+3ax^4y)$的变形中虽然提出了公因式 $4a^3$，但多项式的各项中还有公因式 x^2，还需继续提取，造成重复，为了能做到"一次提净"，就要按照下面的规则，组成多项式各项的公因式.

例 3 把下列各式分解因式：

(1)$24x^3+16x^2y-8x^2$

(2) $-35m^3n^4+49m^4n^3-7m^3n^3$

解：(1)$24x^3+16x^2y-8x^2=8x^2(3x+2y-1)$

(2) $-35m^3n^4+49m^4n^3-7m^3n^3$

$=-7m^3n^3(5n-7m+1)$

点评：(1)本例的特点是各多项式中，都有一项本身就是公因式，严格写出这个变形过程，应是

$24x^3+16x^2y-8x^2$

$=8x^2\cdot 3x+8x^2\cdot 2y-8x^2\cdot 1$

$=8x^2(3x+2y-1)$

这就是说，对一个没有同类项的多项式的项数来说，提公因式的前后，既不能增加，也不能减少，所以在原公因式的位置上“1”是绝不可缺少的.

(2)一般地说，多项式的首项的系数不安排为负数，而第(2)题中提出的公因式是 $-7m^3n^3$，而不是 $7m^3n^3$，所以，多项式的各项都要变号.

2. 掌握公式法分解因式

对于第一册代数中学习过的乘法公式，如果使用为从右到左的变形，则可以用来作因式分解，如

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$
$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$$
$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

都是因式分解的恒等变形，可见应用乘法公式可直接进行因式分解，并称其为公式法.

公式中的字母 a 和 b，可以是数，也可以是单项式或多项式.

应用公式法进行因式分解的关键，是把多项式转化为符合上述公式的形式之一，进而确定式中的“a”与“b”.

例 4 用平方差公式分解下列各式.

(1)m^2-49　　(2)$4x^2-\frac{1}{9}y^2$

(3)x^4-16　　(4)x^4-9

(5)$a^2b^4-0.25c^2$

解：(1)$m^2-49=m^2-7^2=(m+7)(m-7)$

(2)$4x^2-\frac{1}{9}y^2=(2x)^2-(\frac{1}{3}y)^2=(2x+\frac{1}{3}y)(2x-\frac{1}{3}y)$

(3)$x^4-16=(x^2)^2-4^2=(x^2+4)(x^2-4)$

$=(x^2+4)(x+2)(x-2)$

(4)$x^4-9=(x^2)^2-3^2=(x^2+3)(x^2-3)$

(5)$a^2b^4-0.25c^2=(ab^2)^2-(0.5c)^2$

$=(ab^2+0.5c)(ab^2-0.5c)$

点评:(1)在运用公式法分解因式时,经常要逆用幂的乘方法则.如第(2)题中把 $4x^2$ 化成 $(2x)^2$, $\frac{1}{9}y^2$ 化为 $(\frac{1}{3}y)^2$,第(5)题中把 a^2b^4 化成 $(ab^2)^2$ 的过程都是在逆用公式 $(a^m)^n = a^{mn}$,而逆用各种公式、法则,反向思维,以倒推方式运算,这正是因式分解的特点和难点所在,初学者应时时注意;

(2)因式分解中所要求的"不能再分解",是指系数在有理数范围内不能再作分解,如第(3)题中的 x^2-4,由于4能写成有理数2的平方,所以可继续分解,而第(4)题中的 x^2-3,由于3不能写为有理数的平方,所以不能继续分解.

例5 用完全平方公式分解下列各式.

(1) $x^2-8x+16$

(2) $9a^2+12ab+4b^2$

(3) $-16x^2+40xy^2-25y^4$

解:(1) $x^2-8x+16=x^2-2\cdot x\cdot 4+4^2=(x-4)^2$

(2) $9a^2+12ab+4b^2=(3a)^2+2\cdot 3a\cdot 2b+(2b)^2=(3a+2b)^2$

(3) $-16x^2+40xy^2-25y^4 = -[(4x)^2-2\cdot 4x\cdot 5y^2+(5y^2)^2]$

$= -(4x-5y^2)^2$

点评:(1)运用和(或差)的平方公式进行因式分解时,除了要认定把哪一个代数式看作 a、b 外,还要注意检验中间一项是否恰是 $2ab$(或 $-2ab$),否则容易造成错误.

(2)符号校核是使用公式时的另一个重要问题,切不可忽视.

例6 用立方和或立方差公式分解下列各式.

(1) $8+x^3$　　(2) $a^3b^6-125c^3$

解:(1) $8+x^3=2^3+x^3=(2+x)(4-2x+x^2)$

(2) $a^3b^6-125c^3 = (ab^2)^3-(5c)^3$

$= (ab^2-5c)(a^2b^4+5ab^2c+25c^2)$

点评:用立方和或立方差公式分解因式时易出现以下错误:

(1)符号错.如错解 $8+x^3=(2+x)(4+2x+x^2)$;

(2)与"完全平方式混淆"错,如错解: $8+x^3=(2+x)(4-4x+x^2)$.

3. 会用十字相乘法分解因式

例7 用十字相乘法分解下列各式.

(1) x^2+2x-8　　　　(2) $5x^2+7x-6$

(3) $x^2+4xy+3y^2$

解：(1) x^2+2x-8

$=(x+4)(x-2)$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & +4 \\ & \times & \\ 1 & & -2 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{+4-2=+2} \end{array}$$

(2) $5x^2+7x-6$

$=(x+2)(5x-3)$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ & \times & \\ 5 & & -3 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{10-3=7} \end{array}$$

(3) $x^2+4xy+3y^2$

$=(x+y)(x+3y)$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ & \times & \\ 1 & & 3 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{1+3=4} \end{array}$$

点评：十字相乘法适用于将一个二次三项式分解为两个一次因式的积，一般分两种情况：

(1)二次项系数是1，其公式是 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$，可用下边的图式帮助分析(图中箭头表示相乘).

$$\begin{array}{ccc} 1 & & a \\ & \times & \\ 1 & & b \\ \hline \multicolumn{3}{c}{a+b=\text{一次项系数}} \end{array}$$

(2)二次项系数不等于1，其公式是 $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$，可用下边的图式帮助分析(图中箭头表示相乘).

$$\begin{array}{ccc} a & & b \\ & \times & \\ c & & d \\ \hline \multicolumn{3}{c}{ad+bc=\text{一次项系数}} \end{array}$$

由于一个整数的分拆方法有多种可能，所以要想得到正确的结

果，必须耐心作多次试验，才能确定是否能分解，怎样分解.

4. 灵活掌握分组分解法

若一个多项式含四项或四项以上，各项又没有公因式时，一般不能直接利用公式法进行分解因式，而把多项式的项适当分组后再进行分解，我们把这种方法叫做分组分解法.使用这种方法的关键在于分组适当，而在分组时，必须有预见性，能预见下一步是否能继续分解，而"预见"是源于细致的"观察"，先找出多项式的特点，恰当的分组是分组分解法的关键.

例8 用分组分解法分解下列各式.

(1) $ax + bx - ay - by$

(2) $am + bm + cm + an + bn + cn$

(3) $mx^3 - mx^2 + mx - m$

解：(1) $ax + bx - ay - by$

$= (ax + bx) - (ay + by)$

$= x(a + b) - y(a + b)$

$= (a + b)(x - y)$

(2) $am + bm + cm + an + bn + cn$

$= m(a + b + c) + n(a + b + c)$

$= (a + b + c)(m + n)$

或 $am + bm + cm + an + bn + cn$

$= (am + an) + (bm + bn) + (cm + cn)$

$= a(m + n) + b(m + n) + c(m + n)$

$= (m + n)(a + b + c)$

(3) $mx^3 - mx^2 + mx - m$

$= (mx^3 - mx^2) + (mx - m)$

$= mx^2(x - 1) + m(x - 1)$

$= m(x - 1)(x^2 + 1)$

或 $mx^3 - mx^2 + mx - m$

$= (mx^3 + mx) + (-mx^2 - m)$

$= mx(x^2 + 1) - m(x^2 + 1)$