

文都教育考研精品系列

文都教育

2006

# 考研数学秘诀

考研名师的扛鼎之作  
揭开数学的神秘面纱

55 诀

数学一

主编：叶盛标

- 清华大学
- 同济大学
- 上海交通大学
- .....

□ 吉米多维奇：《数学分析习题集》

MATHS

新华出版社

**文都教育**

**2006**

# 考研数学秘诀

## 数学一 55 诀

主 编：叶盛标

策 划：文都考研信息中心

新华出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学秘诀/叶盛标主编. —北京: 新华出版社, 2005. 4

ISBN 7-5011-7012-6

I. 考... II. 叶... III. 高等数学—研究生—入学考  
试—自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 021299 号

---

编 者: 叶盛标

责任编辑: 王子予

出版发行: 新华出版社

地 址: 北京石景山区京原路 8 号

邮政编码: 100043

印 刷: 中煤涿州制图印刷厂

开 本: 787×1092 毫米 1/16

印 张: 69.625

版 本: 2005 年 4 月第 1 版 2005 年 4 月第 1 次印刷

印 数: 1—6000 册

书 号: ISBN 7-5011-7021-6

全套定价: 82.00 元

---

# 一份辛劳一份才

—— 庚罗国华 题

妙算还从拙中来，  
愚公智叟两分开。  
日久方显愚公智，  
发白才知智叟呆。  
埋头苦干是第一，  
熟能生出百巧来。  
勤能补拙是良训，  
一份辛劳一份才。

# 名题留芳

——研读考研数学的国题、校题有感

名题留芳千万年，  
考了一遍又一遍。  
熟读名题三百道，  
不是神仙也神仙！

一策是干苦夫默  
来百出主消康  
所身是林休消懂  
本分一策辛分一

## 前 言

长期深入研究全国历届考研数学试题（即国题），和 1987 年全国统考之前和之后的全国各高等院校历届考研数学试题（即校题）之后，编者认为，考生在备考过程中必须进行三个方面的研究：一、研究考纲，二、研究国题，三、研究校题。国题集中体现了全国命题小组各位专家的智慧，校题集中体现了全国各高等院校命题小组各位专家的智慧。国题和校题剔除了题海中的偏题、怪题、难题，是题海中的精品。国题与校题互为题源，相映生辉，必须精心研究，避免在茫茫题海中盲目地探索！

本资料收集的主要是按考纲精选的校题，衷心希望对考生的复习起到抛玉引玉的作用！

本资料用秘诀（歌诀）这种独特的为学生所喜闻乐见的形式表达考纲、考点，表达基本概念、基本理论、基本方法，衷心希望对考生的复习起到事半功倍的作用！

编者

2005 年 2 月 8 日

于武昌巡司河畔

E-mail: [yeshengbiao233@sina.com](mailto:yeshengbiao233@sina.com)

# 目 录

第一章 极限与连续	1
秘诀 1 极限与连续内容秘诀	1
秘诀 2 求极限方法秘诀	1
秘诀 3 求由递推公式表达的数列的极限的秘诀 I	2
秘诀 4 求由递推公式表达的数列的极限的秘诀 II	5
秘诀 5 特例法秘诀	15
秘诀 6 求渐近线秘诀	15
第二章 导数与微分	19
秘诀 7 导数与微分内容秘诀	19
秘诀 8 同名导数秘诀	19
第三章 中值定理与导数的应用	28
秘诀 9 导数应用秘诀	28
秘诀 10 一元微积分证明题秘诀	28
第四章 不定积分	48
秘诀 11 不定积分内容秘诀	48
第五章 定积分	61
秘诀 12 定积分内容秘诀	61
第六章 定积分的应用	73
秘诀 13 定积分应用秘诀	73
秘诀 14 求面积秘诀	73
秘诀 15 求旋转体体积秘诀 I	75
秘诀 16 求旋转体体积秘诀 II	77
秘诀 17 古尔金定理秘诀	77
第七章 空间解析几何与向量代数	83
秘诀 18 空间解析几何与向量代数内容秘诀	83
第八章 多元函数微分法及其应用	89
秘诀 19 多元函数微分法及其应用内容秘诀	89
第九章 重积分	107
秘诀 20 重积分内容秘诀	107
秘诀 21 你说完了五个 $x$ 吗?	107
秘诀 22 你说完了五个 $y$ 吗?	107
秘诀 23 你说完了五个 $r$ 吗?	108

第十章 曲线积分与曲面积分 .....	125
秘诀 24 曲线积分与曲面积分内容秘诀 .....	125
秘诀 25 曲线积分与曲面积分计算秘诀 .....	125
第十一章 无穷级数 .....	143
秘诀 26 无穷级数内容秘诀 .....	143
秘诀 27 傅立叶级数秘诀 .....	143
第十二章 微分方程 .....	160
秘诀 28 微分方程内容秘诀 .....	160
秘诀 29 可分离变量的微分方程解法秘诀 .....	160
秘诀 30 齐次方程解法秘诀 .....	162
秘诀 31 一阶线性非齐次微分方程解法秘诀 .....	164
秘诀 32 伯努利方程解法秘诀 .....	168
秘诀 33 全微分方程解法秘诀 .....	169
秘诀 34 欧拉方程解法秘诀 .....	171
秘诀 35 可降阶的二阶微分方程解法秘诀 .....	172
秘诀 36 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 通解秘诀 .....	174
秘诀 37 $y''+Py'+qy=0$ 的代数求解法秘诀 .....	176
秘诀 38 $y''+Py'+qy=f(x)$ 的特解的导数求解法秘诀 .....	176
秘诀 39 微分算子法秘诀 .....	178
第十三章 行列式 .....	189
秘诀 40 行列式内容秘诀 .....	189
第十四章 矩阵 .....	198
秘诀 41 求逆阵秘诀 .....	198
秘诀 42 解矩阵方程秘诀 .....	198
第十五章 线性方程组 .....	205
秘诀 43 解线性方程组秘诀 .....	205
秘诀 44 $Ax=b$ 通解秘诀 .....	205
第十六章 矩阵的特征值和特征向量 .....	213
秘诀 45 矩阵对角化秘诀 .....	213
第十七章 二次型 .....	221
秘诀 46 用正交变换化二次型为标准形秘诀 .....	221
第十八章 基变换与坐标变换 .....	228
秘诀 47 基变换与坐标变换秘诀 .....	228
第十九章 随机事件与概率 .....	231
秘诀 48 随机事件与概率内容秘诀 .....	231
第二十章 一维随机变量及其分布 .....	239
秘诀 49 一维随机变量及其分布内容秘诀 .....	239
第二十一章 多维随机变量及其分布 .....	251



秘诀 50 多维随机变量及其分布内容秘诀 .....	251
<b>第二十二章 随机变量的数字特征 .....</b>	<b>260</b>
秘诀 51 随机变量的数字特征内容秘诀 .....	260
<b>第二十三章 大数定律与中心极限定理 .....</b>	<b>268</b>
秘诀 52 大数定律与中心极限定理内容秘诀 .....	268
<b>第二十四章 抽样分布 .....</b>	<b>271</b>
秘诀 53 抽样分布内容秘诀 .....	271
<b>第二十五章 参数估计 .....</b>	<b>281</b>
秘诀 54 参数估计内容秘诀 .....	281
<b>第二十六章 假设检验 .....</b>	<b>291</b>
秘诀 55 假设检验内容秘诀 .....	291
<b>经典习题参考答案 .....</b>	<b>296</b>
<b>附录 I 最低限度的初等数学常识(18 条) .....</b>	<b>356</b>
<b>附录 II 最低限度的高等数学公式(73 个) .....</b>	<b>363</b>

# 第一章 极限与连续

## 秘诀 1

(极限与连续内容秘诀)

极限连续最重要,  
“强行代入”就是好.

零点定理有零点,

保号定理要保号.

## 秘诀 2

(求极限秘诀)

强行代入,

先定型,

后定法.

### ● 内容提要

1. 保函数号定理 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 而且  $A > 0$  (或  $A < 0$ ), 那么就存在着点  $x_0$  的某一去心邻域, 当  $x$  在该邻域内时, 就有  $f(x) > 0$  (或  $f(x) < 0$ ).

2. 保极限号定理 如果在  $x_0$  的某一去心邻域内  $f(x) \geq 0$  (或  $f(x) \leq 0$ ), 而且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 那么  $A \geq 0$  (或  $A \leq 0$ ).

3. 零点定理 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , 那么在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使  $f(\xi) = 0$ .

4. 介值定理 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值  $M$  和最小值  $m$  之间的任何值.

5. 极限存在的两个准则 i) 两边夹准则; ii) 单调有界数列有极限.

6. 两个重要极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ .

7. 求  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , 以  $x_0$  强行代入  $f(x)$  之中, 若能代, 谓之连续, 即有  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ; 若不能代, 先定型, 后定法. 对于数列的极限, 同样用这个秘诀.

### ● 经典例题

例 1 (中国科学技术大学 1983, 北京邮电学院 1985, 全国 1996 数一)

设  $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}, (n = 1, 2, \dots)$

试证数列  $\{x_n\}$  有极限, 并求此极限.

**分析** 传统的讲法——先证后求, 即先证  $\{x_n\}$  单调有界, 后求极限.

这种讲法由来已久, 还将继续延续下去. 因为老师这么讲, 学生也这么讲, 学生的学生也这么讲……

这种讲法无疑是正确的, 但也存在困惑: 是单调上升? 还是单调下降? 界在哪儿?

应该是: 强行代入, 先定型, 后定法.

$$\text{由 } x_{n+1} = \sqrt{6+x_n},$$

$$\text{得 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{6+x_n},$$

$$l = \sqrt{6+l},$$

$$l_1 = 3, l_2 = -2$$

因  $x_n > 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 由保极限号定理,  $l \geq 0$ ,  $l_2 = -2$  应舍去,  $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$ .

而  $x_1 = 10$ , 可见  $\{x_n\} \downarrow$ , 且以 3 为下界.



**证**  $x_1 = 10, x_2 = \sqrt{6+10} = 4 < 10 = x_1$ ,

假设  $x_k < x_{k-1}$ ,

$$\text{则 } \sqrt{x_k+6} < \sqrt{x_{k-1}+6},$$

$$\text{即 } x_{k+1} < x_k,$$

$\therefore \{x_n\} \downarrow$ ;

再证  $\{x_n\}$  有界,  $x_1 = 10 > 3, x_2 = 4 > 3$ ,

假设  $x_k > 3$ ,

$$\text{则 } x_{k+1} = \sqrt{x_k+6} > \sqrt{3+6} = 3$$

$\therefore 3$  为  $\{x_n\}$  的下界.  $\therefore \{x_n\}$  为单调有界数列, 因而有极限.

$$\text{令 } l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$\therefore \text{由 } x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{6+x_n},$$

$$\text{得 } l = \sqrt{6+l}$$

$$l_1 = 3, \quad l_2 = -2 (\text{舍去}), \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3.$$

是而有秘诀:

### 秘诀 3

(求由递推公式表达的数列的极限的秘诀 I)

数列极限看两头,  $(x_1, x_\infty)$

看了两头不用愁:

单调有界有极限,

先求后证两步走!

**说明** “数列极限看两头”, 即看  $x_1$  和  $x_\infty$ . 建议读者研究数列开头的几项和  $x_\infty$ , 问题便一目了然!

对于例1,建议读者用电子计算器,按递推公式  $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$ ,由  $x_1 = 10$ ,计算  $x_2, x_3, \dots, x_{14}, \dots$ ,极限过程呈现在计算器的屏幕上,真实,具体,生动,有趣,一定会领悟到数列极限的真谛!

例2 (吉米多维奇 148<sup>①</sup>,复旦大学 1980,湖南大学 1982)

设数列  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 是由下列各式  $x_1 = a, x_2 = b, x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$  ( $n = 3, 4, \dots$ ) 所确定,求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

分析 强行代入,先定型,后定法.

$$\text{由 } x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2},$$

$$\text{得 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2},$$

$$l = \frac{l+l}{2}, l = l, \text{求不出 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

真是:数列极限看两头,

看不到两头发愁!

解法 I 当  $a = b$  时,  $\forall n \in N, x_n = a$ , 显然  $\{x_n\}$  收敛于  $a$ , 当  $a < b$  时, 由于  $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$  表示数列  $\{x_n\}$  中任一项是它的前两项的平均数, 所以

$$x_1 = a < x_3 < x_5 < \dots < x_{2n-1} < x_{2n+1} < b,$$

$$x_2 = b > x_4 > x_6 > \dots > x_{2n} > x_{2n+2} > a,$$

这说明数列  $\{x_{2n+1}\}$  与  $\{x_{2n}\}$  皆单调有界, 因而它们都收敛, 记

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = B,$$

在等式

$$x_{2n} = \frac{1}{2}(x_{2n-2} + x_{2n-1}), \quad x_{2n+1} = \frac{1}{2}(x_{2n-1} + x_{2n})$$

中分别令  $n \rightarrow \infty$  得

$$B = \frac{1}{2}(B + A), \quad A = \frac{1}{2}(A + B),$$

$$\therefore A = B, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A.$$

(I) 由于

$$x_1 + x_2 = 2x_3, x_2 + x_3 = 2x_4, \dots, x_{n-2} + x_{n-1} = 2x_n,$$

两端分别相加得

$$x_{n-1} + 2x_n = x_1 + 2x_2 = a + 2b,$$

令  $n \rightarrow \infty$  得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n-1} + 2x_n) = 3A = a + 2b,$$

<sup>①</sup> 指前苏联数学家吉米多维奇编著的《数学分析习题集》中的第 148 题, 下同.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3}(a+2b).$$

当  $a > b$  时, 证明是类似的, 上面的结论仍真.

**解法 II**  $x_2 - x_1 = b - a,$

$$x_3 - x_2 = \frac{1}{2}(x_2 + x_1) - x_2 = -\frac{1}{2}(x_2 - x_1) = -\frac{1}{2}(b - a),$$

$$x_4 - x_3 = \frac{1}{2}(x_3 + x_2) - x_3 = -\frac{1}{2}(x_3 - x_2) = (-\frac{1}{2})^2(b - a),$$

.....

$$x_n - x_{n-1} = (-\frac{1}{2})^{n-2}(b - a).$$

$$\therefore x_n - x_1 = [1 + (-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})^2 + \dots + (-\frac{1}{2})^{n-2}](b - a)$$

$$= \frac{1 \cdot [1 - (-\frac{1}{2})^{n-1}]}{1 - (-\frac{1}{2})}(b - a) = \frac{2}{3}[1 - (-\frac{1}{2})^{n-1}](b - a)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} [x_n - x_1] = \frac{2}{3}(b - a),$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{2}{3}(b - a) + a = \frac{1}{3}(a + 2b).$$

**解法 III** 用相似对角矩阵.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, = A^{n-2} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

$$\text{而 } |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0,$$

$$\therefore \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

当  $\lambda_1 = 1$  时

$$\text{由 } (A - \lambda_1 E)x = 0,$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \therefore x_1 - x_2 = 0, \therefore \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_2 = x_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

当  $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$  时

$$\text{由 } (A - \lambda_2 E)x = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \therefore x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0, \therefore \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2, \\ x_2 = x_2 \end{cases}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, P^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \therefore A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore A^{n-2} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{n-2} P^{-1} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{当 } n \rightarrow \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} A^{n-2} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}a \\ \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}a \end{pmatrix}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}a.$$

因而有:

### 秘诀 4

(求由递推公式表达的数列的极限的秘诀 II)

数列极限看两头,  $(x_1, x_\infty)$

看不到两头也不愁:

答案就在题目里,

特例特法乐悠悠!

例 3 (北京工业大学 1983)

$$\text{试求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right]^n$$

$$\text{解 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-1}{n+1} \right)^{n+1} \cdot \left( 1 + \frac{-1}{n+1} \right)^{-1} = e^{-1}.$$

例 4 (吉米多维奇 142, 中国地质大学 2002, 华中师范大学)

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{i}{n}} = e^{\int_0^1 \ln x dx} = e^{-1},$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

例 5 (吉米多维奇 55, 华中师范大学 2002)

$$\text{设 } x_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}, (n=1, 2, 3, \cdots) \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

$$\text{解 } x_n - \frac{1}{2}x_n = \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2^{n+1}} = 0, \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3.$$

例 6 (北京大学 1998, 1999)

$$\text{计算极限 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+a^n} \quad (a > 0).$$

$$\text{解 } \text{i) 当 } a \geq 1 \text{ 时, } a < \sqrt[n]{1+a^n} \leq \sqrt[n]{2a^n} = \sqrt[n]{2}a,$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1, \therefore \text{由两边夹法则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+a^n} = a;$$

$$\text{ii) 当 } 0 < a < 1 \text{ 时, 作变换 } b = \frac{1}{a}, \text{ 于是 } b > 1.$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \left(\frac{1}{b}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \cdot \sqrt[n]{1+b^n} = \frac{1}{b} \cdot b = 1.$$

例 7 (吉米多维奇 605, 浙江大学 2001)

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}).$$

$$\text{解 } \therefore \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \sin^2[\pi(\sqrt{n^2+n}-n)]$$

$$= \sin^2 \frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n} = \sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1},$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1.$$

例 8 (中国科学院 2000)

求  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n + c^n)^{\frac{1}{n}} (a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0)$ .

解 令  $m = \max\{a, b, c\}$ , 则

$(m^n)^{\frac{1}{n}} \leq (a^n + b^n + c^n)^{\frac{1}{n}} \leq (3m^n)^{\frac{1}{n}}$ , 由两边夹法则,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (m^n)^{\frac{1}{n}} = m, \lim_{n \rightarrow \infty} (3m^n)^{\frac{1}{n}} = m,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n + c^n)^{\frac{1}{n}} = m = \max\{a, b, c\}$$

例 9 (吉米多维奇 629, 国防科技大学 1979)

求  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n}), |x| < 1$

解  $\because (1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n}) = 1 - x^{2^{n+1}}$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

上例的特例:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right) = 2$ .

例 10 (北京工业大学 1981, 全国 2004 数三, 数四)

求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2}\right)$ .

分析 应用秘诀: 强行代入, 先定型, 后定法.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{0^2} - \frac{1}{0^2} \\ &= \frac{0^2 - 0^2}{0^4} \end{aligned}$$

$$= \frac{(0-0)(0+0)}{0^4}$$

$$= \frac{0-0}{0^3} \cdot \frac{0+0}{0}$$

$(0-0)$  可能是比  $(0+0)$  高阶的无穷小, 倘若不这样,

$$\text{或 } \frac{(0-0)(0+0)}{0^4} = \frac{0-0}{0^2} \cdot \frac{0+0}{0^2},$$

$$\text{或 } \frac{(0-0)(0+0)}{0^4} = \frac{0-0}{0} \cdot \frac{0+0}{0^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x \cos x)(x + \sin x \cos x)}{x^4}$$



$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \cos x}{x^3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x \cos x}{x}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \cos x}{x^3} \left( \frac{0}{0} \right)$$

$$\stackrel{\text{洛必达}}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{3x^2}$$

$$= \frac{4}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{4}{3}.$$

这个题目亦可这样做:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin x \cos^2 x}{x^4} \left( \frac{0}{0} \right)$$

接着用洛必达法则,这就浪费了信息资源,计算时要麻烦得多.

请牢记下面的一句名言:

高等数学 + 初等数学 = 攻无不克,战无不胜!

例 11 (清华大学 1983, 全国 1999 数二)

设  $f(x)$  是区间  $[0, +\infty)$  上单调减少且非负连续函数,

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \quad (n = 1, 2, \dots),$$

证明数列  $\{a_n\}$  的极限存在.

证 由于  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调减少, 故有

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k), \quad (k = 1, 2, \dots),$$

因此

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx = \sum_{k=1}^n f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[ f(k) - \int_k^{k+1} f(x) dx \right] + f(n) \geq 0 \end{aligned}$$

即数列  $\{a_n\}$  有下界. 又

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx \leq 0,$$

即数列  $\{a_n\}$  单调下降, 故由单调有界数列有极限的准则知  $\{a_n\}$  的极限存在.

例 12 (复旦大学 1984, 无锡轻工业学院 1984)

等分区间  $[a, b]$  ( $a > 0$ ), 分点为

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \Delta x = \frac{b-a}{n},$$

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}.$$