大学数学同步辅导丛书（同济·第四版）

线性代数

题型归纳与练习题集

编著：黄先开

- 归纳了线性代数中几乎所有题型
- 精编每章训练题及期末试卷
- 结构严谨 思路清晰

赠

同济四版
习题详解

世界图书出版公司

FOCUS
聚集图书

大学数学同步辅导丛书(同济·第四版)

线性代数
题型归纳与练习题集

编　著:黄先开

世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安

图书在版编目(CIP)数据

线性代数题型归纳与练习题集/黄先开编著.—北京:
世界图书出版公司北京公司,2003.7
(大学数学同步辅导丛书)
ISBN 7-5062-5027-4

Ⅰ.线… Ⅱ.黄… Ⅲ.线性代数—高等数学—教学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 076829 号

线性代数题型归纳与练习题集

编　　著: 黄先开
责任编辑: 李根宾
装帧设计: 京 A 企划

出　　版: 世界图书出版公司北京公司
发　　行: 世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号　邮编　100010　电话　010-62198079)
销　　售: 各地新华书店
印　　刷: 廊坊人民印刷厂

开　　本: 787×960 毫米　1/16
印　　张: 17.875
字　　数: 346 千字
版　　次: 2005 年 3 月第 1 版
2005 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 7-5062-5027-4/O·329　　定价:16.80 元

服务热线:010-62198078

前　言

本书自03年出版以来，得到读者广泛的认同和支持，我倍觉欣慰。同时，很多读者从不同角度对本书提出了意见和建议，这更激励我花费大量时间和精力，对本书进行修订和勘误。修订版保留了前几版的系统和风格，对其原有的结构严谨、逻辑清晰、通俗易懂等优点加以继承；吸收了广大读者及同行的意见，对各章的内容作了重新调整，使之与同济四版的线性代数教材同步，更符合学习要求；另外，每章的习题均附有详细的解答过程。

本书根据现行教学大纲和研究生入学考试数学考试大纲进行编写，并借鉴了陈文灯教授“以题型为纲”的教参编写思想，归纳了线性代数中几乎所有的题型，精心选编和分析了大量的经典例题，并独立设计了许多新颖的习题。

应试性强是本书的最大特点。

本书包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换。各章具体体系如下：

- **知识点结构图与学习要求**：以图表的形式概括各知识点及其之间的联系；提出学习本章需要达到的基本要求。
- **重要性质定理及注释**：阐述每一章中重要的性质定理、公式和结论，特别对一些重要的中间结论或者隐含条件进行归纳，帮助读者者站在一个更高、更深的层次上去分析问题，达到认识和理解的新境界。
- **典型题型与解题思路提示**：任何一门课程的题目都是无穷的，但题型是有限的。本书尽可能全面归纳了这门课程所涉及的题型，逐一进行分析并给出解题的方法和规律。读者借助于许多重要经典例题的评注，可以更好地的把握经典例题的典型处理方法，从而达到举一反三、触类旁通的功效。
- **习题精选与精编**：要掌握一门课程并通过考试，做一定数量的习题是必不可少的。为此，笔者按照填空题、选择题以及计算与证明题的顺序对应各种题型编制了相当数量的习题，供读者模拟练习之用，希望读者尽可能独立完成大部分习题。

期末测试题:本书附送两套期末测试题,这些题都是资深专家教授从平时的考试与教学中精选而来的,希望读者在复习全书后达到自测的目的,及时查缺补漏,顺利通过考试。

在成书过程中,笔者参考了众多著作和教材,由于篇幅所限未能全部列出,在此谨向有关作者表示衷心感谢!

新版中存在的问题,欢迎广大读者、专家和同行批评指正。

编者

2005年2月

目　录

第一章　行列式

【知识点结构图】

$$
\text{行列式}\begin{cases}\text{二阶、三阶行列式}\\ n\text{ 阶行列式}\begin{cases}\text{排列与逆序}\\ n\text{ 阶行列式的定义及性质}\end{cases}\\ \text{代数余子式的定义及性质}\\ \text{行列式按行(列)展开}\begin{cases}\text{按一行(列)展开}\\ \text{按 }k\text{ 行(列)展开}\end{cases}\\ \text{克莱姆法则}\end{cases}
$$

【学习要求】

1. 会用对角线法则计算 2 阶和 3 阶行列.
2. 知道 n 阶行列式的定义及性质.
3. 知道代数余子式的定义及性质.
4. 会利用行列式的性质及按行(列)展开计算简单的 n 阶行列式.
5. 知道克莱姆法则.

§1.1　重要性质定理及注释

一、行列式按行(或列)展开定理

1. 余子式和代数余子式

在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行及第 j 列,由余下来的元素按原来的次序所排成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij}. 而称

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

为元素 a_{ij} 的代数余子式.

2. 行列式按一行(或列)展开定理

n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 等于它的任意一行(或列)各元素与其对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(1\leqslant i\leqslant n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(1\leqslant j\leqslant n).$$

一般地,有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\begin{cases}D,i=k,\\0,i\neq k.\end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}=a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=\begin{cases}D,j=k,\\0,j\neq k.\end{cases}$$

二、克莱姆(Cramer)法则

方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

称为 n 元非齐次线性方程组,当其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$ 时,此方程组有惟一解,且可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是将行列式 D 中第 j 列元素换成常数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,其余元素不变而得到的行列式的值.

当 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ 时,对应方程组称为 n 元齐次线性方程组.

注:① 克莱姆法则只适用于方程的个数与未知量的个数相等的线性方程组.

② n 元非齐次线性方程组,当系数行列式 $D\neq 0$ 时有惟一解,当系数行列式 $D=0$ 时克莱姆法则失效,方程组可能有解也可能无解.

③ n 元齐次线性方程组,当系数行列式 $D\neq 0$ 时有惟一零解,当系数行列式 $D=0$ 时,齐次线性方程组有非零解(无穷多解).

三、n 阶范德蒙(Vandermonde)行列式($n\geqslant 2$)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \vdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \vdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \vdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

注:当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两互不相同时,行列式的值不为零.

四、拉普拉斯定理

1. 子式及其代数余子式

k 阶子式:n 阶行列式中,任取 k 行 k 列,这 k 行 k 列交点处元素按原来的顺序位置组成的 k 阶行列式 M,称为原 n 阶行列式的 k 阶子式. 划去子式 M 所在的行和列,由余下来的元素按原来的次序所排成的 $(n-k)$ 阶行列式 N,称为 M 的余子式. 设 M 所在行的序号为 $i_1,i_2,\cdots,i_k$,M 所在列的序号为 $j_1,j_2,\cdots,j_k$,则称

$$A=(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}N$$

为 M 的代数余子式.

2. 拉普拉斯展开定理

在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中，任意取定 k 行(或列)$(1\leqslant k\leqslant n-1)$，则这 k 行(或列)中所有的 k 阶子式(共有 $C_n^k=t$ 个，记为 $M_1,M_2,\cdots,M_t$) 分别与它们对应的代数余子式乘积之和等于该行列式，即

$$D=\sum_{i=1}^{t}M_iA_i=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t.$$

§1.2　典型题型与解题思路提示

题型 Ⅰ　排列逆序数的计算

【思路提示】　任一排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数可如下计算：$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=i_1$ 后面比 i_1 小的数的个数 $+\,i_2$ 后面比 i_2 小的数的个数 $+\cdots+\,i_{n-1}$ 后面比 i_{n-1} 小的数的个数.

【例 1.1】　求下列排列的逆序数，并确定它们的奇偶性.

(1)53214；　　(2)$n(n-1)\cdots2\cdot1$；

(3)$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

【解】　(1)$\tau(53214)=4+2+1+0=7$，为奇排列.

(2)$\tau(n(n-1)\cdots2\cdot1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

由于$\dfrac{n(n-1)}{2}$的奇偶性需根据 n 而定，故讨论如下：

当 $n=4k$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$ 为偶数；

当 $n=4k+1$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$ 为偶数；

当 $n=4k+2$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$ 为奇数；

当 $n=4k+3$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$ 为奇数.

综上所述，当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，此排列为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，此排列为奇排列，其中 k 为任意非负整数.

(3) 该排列中前 n 个数 $1,3,5,\cdots,(2n-1)$ 之间不构成逆序，后 n 个数 $2,4,6,\cdots,(2n)$ 之间也不构成逆序，只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序，

$$\begin{aligned}\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n))&=0+1+2+\cdots+(n-1)\\&=\frac{n(n-1)}{2},\end{aligned}$$

奇偶性情况与(2) 完全一致.

【例 1.2】　设排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为 k，问 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少？

【解】　若排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 中关于 x_1 有 m_1 个逆序，则有$(n-1)-m_1$ 个顺序，即在排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中关于 x_1 有$(n-1)-m_1$ 个逆序；若关于 x_2 有 m_2 个逆序，则有$(n-2)-m_2$ 个顺序；……，依此类推，关于 x_n 有 m_n 个逆序，则有$(n-n)-m_n$ 个顺序，而 $m_1+m_2+\cdots+m_n=k$，故 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数为

$$\begin{aligned}\tau(x_n x_{n-1}\cdots x_1) &= [(n-n)-m_n]+\cdots+[(n-2)-m_2]+[(n-1)-m_1]\\ &= (n-1)+(n-2)+\cdots+1+0-k\\ &= \frac{1}{2}n(n-1)-k.\end{aligned}$$

题型 Ⅱ　n 阶行列式的概念

【思路提示】 n 阶行列式的概念应注意抓住两点：一是每一项的构成，直观地说，应为不同行、不同列的 n 个元素相乘；另一是每一项的符号，当第一个下标为自然顺序时，由第二个下标排列的奇偶性确定符号.

【例 1.3】 填空题

(1) 在 5 阶行列式中，项 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$ 的符号应取______.

(2) 4 阶行列式中，带负号且包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项为______.

(3) 如果 n 阶行列式中，负项的个数为偶数，则 $n \geqslant$ ______.

(4) 如果 n 阶行列式中等于零的元素个数大于 n^2-n，那么此行列式的值为______.

(5) 在函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0\\ 1 & x & 2 & 3\\ 2 & 3 & x & 2\\ 1 & 1 & 2 & x\end{vmatrix}$ 中，x^3 的系数是______.

【答案】 (1) +.　(2) $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.　(3) 4.　(4) 0.　(5) -1.

【分析】 (1) 适当调整该项元素位置，使第一个下标按自然数顺序排列，则第二个下标排列为 25134，其逆序数 $\tau(25134)=4$，故取正号.

(2) 由行列式的定义可知，包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项必为 $a_{1i}a_{23}a_{31}a_{4j}$，其中 i,j 为 2,4 或 4,2. 又此项符号为负，所以 $i31j$ 为奇排列，从而有 $i=4,j=2$.

(3) n 阶行列式中，共有 $n!$ 项，其中正负项各占一半，若负项的个数为偶数，必有 $n\geqslant 4$.

(4) n 阶行列式中共有 n^2 个元素，若等于零的元素个数大于 n^2-n，那么不等于零的元素个数就小于 n，又 n 阶行列式的每一项是 n 个不同元素的乘积，所以每一项必定为零，从而此行列式的值也为零.

(5) 根据行列式的定义，仅当 $a_{12},a_{21},a_{33},a_{44}$ 四个元素相乘才能出现 x^3，这时该项排列的逆序数为 $\tau(2134)=1$，故此项为

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-x^3,$$

因此 x^3 项的系数为 -1.

【例 1.4】 计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 2002 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2003\end{vmatrix}.$$

【分析】 对于含零元素较多的行列式，可直接用定义计算. 因行列式的项中有一元素为零时，该项值为零，故只需求出所有非零项即可. 为求出非零项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的列下标 $j_1j_2\cdots j_n$ 的所有

n 级排列，先由第 1 行的非零元素及其位置，写出 j_1 可能取的数码；再由第 2，3，…，n 行的非零元素及其位置分别写出 $j_2,j_3,\cdots,j_n$ 可能取的数码，进而求出 $j_1j_2\cdots j_n$ 的所有 n 级排列，非零项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的列下标 $j_1j_2\cdots j_n$ 的 n 级排列有多少个，相应地该行列式就含多少个非零项；如果一个也没有，则不含非零项，行列式的值为零.

【解】　D 中第 1 行的非零元素只有 $a_{1\,2002}$，因而 j_1 只能取 2002，同理由第 2，3，…，2003 行知，$j_2=2001,j_3=2000,\cdots,j_{2002}=1,j_{2003}=2003$. 于是 $j_1,j_2,\cdots,j_{2003}$ 在可能取的数码中，只能组成一个 2003 级排列

$$(2002)(2001)\cdots21(2003)$$

即 D 中非零项只有一项，故

$$\begin{aligned}D&=(-1)^{\tau(2002\cdots2\ 1\ 2003)}a_{1\,2002}\cdots a_{2002\,1}a_{2003\,2003}\\&=(-1)^{2001+\cdots+2+1}1\times2\times\cdots\times2002\times2003\\&=-2003!\end{aligned}$$

【例 1.5】　计算行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}a_1&0&b_1&0\\0&a_2&0&b_2\\b_3&0&a_3&0\\0&b_4&0&a_4\end{vmatrix}.$$

【解】　设 $D_4=|a_{ij}|_{4\times4}$，则 D_4 中第 1 行的非零元素为 $a_{11}=a_1,a_{13}=b_1$，故 $j_1=1,3$；同理由第 2，3，4 行可求 $j_2=2,4;j_3=1,3;j_4=2,4$. 因而 j_1,j_2,j_3,j_4 能组成四个 4 级排列：1234；1432；3214；3412. 故 D_4 中相应有四个非零项为

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=a_1a_2a_3a_4,$$

$$(-1)^{\tau(1432)}a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}=-a_1b_2a_3b_4,$$

$$(-1)^{\tau(3214)}a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}=-b_1a_2b_3a_4,$$

$$(-1)^{\tau(3412)}a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}=b_1b_2b_3b_4,$$

于是有

$$\begin{aligned}D_4&=a_1a_2a_3a_4-a_1b_2a_3b_4-b_1a_2b_3a_4+b_1b_2b_3b_4\\&=(a_1a_3-b_1b_3)(a_2a_4-b_2b_4).\end{aligned}$$

【例 1.6】　写出 5 阶行列式 $D_5=|a_{ij}|_{5\times5}$ 中包含 a_{13},a_{25} 并带正号的项.

【解】　D_5 中包含 a_{13} 及 a_{25} 的所有项数为 5 级排列 $35j_3j_4j_5$ 的个数，这里 j_3,j_4,j_5 只能取 1，2，4 三个数，共有 6 个排列：124；142；214；241；412；421，因而 $35j_3j_4j_5$ 能组成 6 个 5 级排列：35124；35142；35214；35241；35412；35421. 相应的项分别为

$$(-1)^{\tau(35124)}a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54}=-a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54};$$

$$(-1)^{\tau(35142)}a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52}=a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52};$$

$$(-1)^{\tau(35214)}a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54}=a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54};$$

$$(-1)^{\tau(35241)}a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51}=-a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51};$$

$$(-1)^{\tau(35412)}a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}a_{52} = -a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}a_{52};$$

$$(-1)^{\tau(35421)}a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51} = a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}.$$

故包含 a_{13},a_{25} 并带正号的所有项为

$$a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52},a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54},a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}.$$

题型 III　低阶行列式的计算

【思路提示】 低阶(3－5阶)行列式的计算一般有两个方法:一是根据行(或列)元素的特点,利用行列式的性质化为上(或下)三角形行列式;二是根据行列式按一行(或列)展开公式降阶求解.

【例1.7】 计算下列行列式

$$(1)D=\begin{vmatrix}103&100&204\\199&200&395\\301&300&600\end{vmatrix};\quad (2)D=\begin{vmatrix}2&4&4&-3\\1&-6&-2&1\\-3&5&2&0\\4&-12&0&3\end{vmatrix}.$$

【解】 (1) 注意到该行列式第1列、第3列与第2列的整数倍接近,把第2列的(－1)倍加到第1列,(－2)倍加到第3列即可简化得

$$\begin{vmatrix}103&100&204\\199&200&395\\301&300&600\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&100&4\\-1&200&-5\\1&300&0\end{vmatrix}$$

$$=100\begin{vmatrix}3&1&4\\-1&2&-5\\1&3&0\end{vmatrix}=100\begin{vmatrix}3&-8&4\\-1&5&-5\\1&0&0\end{vmatrix}$$

$$=100\begin{vmatrix}-8&4\\5&-5\end{vmatrix}=2000.$$

(2) 注意到该行列式的第4列含有0元素,且 $a_{24}=1$,所以,可用行列式的性质把第4列的元素 a_{14}、a_{44} 化为0,再按第4列展开

$$D=\begin{vmatrix}5&-14&-2&0\\1&-6&-2&1\\-3&5&2&0\\1&6&6&0\end{vmatrix}=(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}5&-14&-2\\-3&5&2\\1&6&6\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}5&-14&-2\\2&-9&0\\16&-36&0\end{vmatrix}=-2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&-9\\16&-36\end{vmatrix}$$

$$=-144.$$

【评注】 一般数字型行列式的计算都是采用把某行(或列)元素中除去某一元素外的其它元素,用行列式的性质都化为零,再利用按行(或列)展开的性质,降低行列式的阶数进行计算,通常这样的行(或列)都选取含0元素较多的行(或列).

【例 1.8】计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

(2) $\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_1b_4 & a_2b_4 & a_3b_4 & a_4b_4 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$

【解】 (1) 注意到各行元素之和相等，故可利用行列式的性质，先把各列加到第1列，提出第1列的公因子，使第1列的元素都变为1，进而用第1行的(-1)倍加到其余各行即可.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{C_1+C_2+C_3+C_4} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{r_2-r_1,r_3-r_1} x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ x & 0 & -x \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = x^4.$$

(2) 认真观察行列式中元素的规律，第4行提出公因子 b_4 后，再把第4行的 $-b_1, -b_2, -b_3$ 倍分别加到第1,2,3 行，得

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_1b_4 & a_2b_4 & a_3b_4 & a_4b_4 \end{vmatrix} = b_4 \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3 - b_3r_4]{r_1 - b_1r_4, r_2 - b_2r_4} b_4 \begin{vmatrix} 0 & a_1b_2 - a_2b_1 & a_1b_3 - a_3b_1 & a_1b_4 - a_4b_1 \\ 0 & 0 & a_2b_3 - a_3b_2 & a_2b_4 - a_4b_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3b_4 - a_4b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$= -a_1b_4 \begin{vmatrix} a_1b_2 - a_2b_1 & a_1b_3 - a_3b_1 & a_1b_4 - a_4b_1 \\ 0 & a_2b_3 - a_3b_2 & a_2b_4 - a_4b_2 \\ 0 & 0 & a_3b_4 - a_4b_3 \end{vmatrix}$$

$$= -a_1b_4 \sum_{i=1}^{3} (a_ib_{i+1} - a_{i+1}b_i)$$

(3) 考虑到第 1 行只有两个非零元素,按第 1 行展开得

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= (1-a) \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$+ a \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (1-a)D_4 + aD_3 \\ &= (1-a)[(1-a)D_3 + aD_2] + aD_3 \\ &= [(1-a)^2 + a]D_3 + a(1-a)D_2 \\ &= (1-a+a^2)[(1-a)D_2 + a(1-a)] + a(1-a)D_2 \\ &= (1-a+a^2)[(1-a)(1-a+a^2) + a(1-a)] \\ &\quad + a(1-a)(1-a+a^2) \\ &= (1-a+a^2)(1-a^3). \end{aligned}$$

【评注】 ① 上述行列式的求解方法均不是惟一的,读者可从不同角度试着自己求解.

② 今后为了方便起见,用 r_i 表示行列式的第 i 行,C_j 表示行列式的第 j 列,对换第 i 行与第 j 行记成 $r_i \leftrightarrow r_j$,第 i 行乘以 k 记成 kr_i,第 i 行的 k 倍加至第 j 行记成 $r_j + kr_i$,类似有列变换

的记号.

【例 1.9】记行列式

$$\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$$为$f(x)$,则方程$f(x)=0$的根的个数为

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.

【分析】本题实质上是计算一四阶行列式,确定$f(x)$是几次多项式,即有几个根.首先不能认为$f(x)$就是一4次多项式;其次,由于行列式中各项均含有x,若直接展开是繁琐的,一定要注意利用性质先作恒等变形.

【解】将第1列的(-1)倍依次加至其余各列,有

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{C_4+C_2}}\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

再由重要公式与结论(或直接用拉普拉斯展开式)知

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}=5x(x-1),$$

可见$f(x)=0$有两个根,故应选(B).

题型Ⅳ　行列式按行(列)展开定理的应用

【思路提示】根据行列式按行(列)展开定理,n阶行列式可通过$n-1$阶行列式计算,$n-1$阶行列式可通过$n-2$阶行列式计算,……,直到可通过2阶行列式计算,这样从理论上完全解决了行列式的计算问题,但实际应用时对零元素比较多的行列式用此方法比较简便.

反过来,有时候利用公式

$$k_1A_{i1}+k_2A_{i2}+\cdots+k_nA_{in}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将某些低阶行列式(代数余子式或余子式)的计算转化为高阶行列式计算反而更方便.